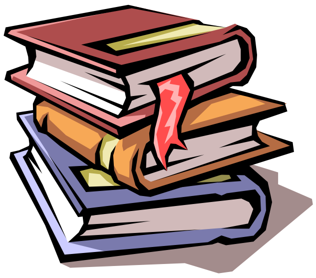
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



23 CHUYÊN ĐỀ
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9

Tài liệu sưu tầm, ngày 31 tháng 5 năm 2021

Mục Lục

Trang

Chương 1. CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

Chuyên đề 1. CĂN BẬC HAI, CĂN THỨC BẬC HAI

A. Kiến thức cần nhớ

1. Căn bậc hai số học

- Căn bậc hai số học của số thực *a* không âm là số không âm *x* mà $x^2 = a$.
- Với $a \ge 0$

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \end{cases}$$

Phép toán tìm căn bậc hai số học của một số gọi là phép khai phương.

Với hai số *a*, *b* không âm, thì ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2. Căn thức bậc hai

- Cho *A* là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của *A*, còn *A* được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.
- $A \ge 0$ xác định (hay có nghĩa) khi $A \ge 0$.
- Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

3. Chú ý

- Với $a \ge 0$ thì:

  $\sqrt{x} = a \Rightarrow x = a^2$

  $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$.
- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \left(hay\ B \ge 0\right) \\ A = B \end{cases}$
- $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: So sánh các cặp số sau mà không dùng máy tính.

a) $\sqrt{10}$ và 3;

b) $3\sqrt{2}$ và $\sqrt{17}$;

c) $\sqrt{35} + \sqrt{15} + 1$ và $\sqrt{123}$;

d) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ và 2.

Giải

Tìm cách giải. Khi so sánh hai số $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ không dùng số máy tính, ta có thể:

- So sánh *a* và *b*

- So sánh $\left(\sqrt{a}\right)^2$ và $\left(\sqrt{b}\right)^2$
- Sử dụng kĩ thuật làm trội.

Trình bày lời giải

a) Ta có $10>9 \Rightarrow \sqrt{10}>\sqrt{9}$ nên $\sqrt{10}>3$.

b) Xét $\left(3\sqrt{2}\right)^2=3^2.\left(\sqrt{2}\right)^2=18;\ \left(\sqrt{17}\right)^2=17$

vì $18>17$ nên $\left(3\sqrt{2}\right)^2>\left(\sqrt{17}\right)^2 \Rightarrow 3\sqrt{2}>\sqrt{17}$

c) $\sqrt{35}+\sqrt{15}+1<\sqrt{36}+\sqrt{16}+1=6+4+1=11,$

$\sqrt{123}>\sqrt{121}=11$ suy ra $\sqrt{35}+\sqrt{15}+1<\sqrt{123}$.

d) Ta có $\sqrt{2}<\sqrt{4}=2 \Rightarrow 2+\sqrt{2}<4 \Rightarrow \sqrt{2+\sqrt{2}}<\sqrt{4}=2$.

Ví dụ 2: Tìm điều kiện để các biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{8+2x}$;

b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}$;

c) $\dfrac{x}{x^2-9}+\sqrt{x+3}$.

Giải

Tìm cách giải. Để tìm điều kiện biểu thức có ý nghĩa, bạn lưu ý:

- $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A\ge 0$
- $\dfrac{A}{M}$ có nghĩa khi $M\ne 0$

Trình bày lời giải

a) $\sqrt{8+2x}$ có nghĩa khi $8+2x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -4$.

b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}$ có nghĩa khi $x-1\ge 0$ và $11-x\ge 0 \Leftrightarrow 1\le x\le 11$.

c) $\dfrac{x}{x^2-9}+\sqrt{x+3}$ có nghĩa khi $x+3\ge 0$ và $x^2-9\ne 0 \Leftrightarrow x>-3; x\ne 3$.

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức sau:

a) $A=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

b) $B=a+1-\sqrt{a^2-2a+1}$ với $a<1$

Giải

Tìm cách giải. Để rút gọn biểu thức chứa dấu căn, bạn nhớ rằng:

$a \pm 2\sqrt{a}+1=\left(\sqrt{a}\pm 1\right)^2$ và lưu ý: $|A-B|=\begin{cases} A-B \text{ nếu } A \ge B \\ B-A \text{ nếu } A<B \end{cases}$

Trình bày lời giải

a) Ta có $A=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$$A=\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}-\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}$$

$$A=\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$$

$$A=\left(\sqrt{5}+1\right)-\left(\sqrt{5}-1\right)=2.$$

b) $B=a+1-\sqrt{a^2-2a+1}$ với $a<1$

$$B=a+1-\sqrt{(a-1)^2}$$

$$B=a+1-|a-1|=a+1-(1-a)=2a.$$

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

a) $A=3+\sqrt{2x^2-8x+33}$;

b) $B=\sqrt{x^2-8x+18}-1$;

c) $C=\sqrt{x^2+y^2-2xy+2x-2y+10}+2y^2-8y+2020$.

Giải

a) Ta có: $A=3+\sqrt{2x^2-8x+33}=3+\sqrt{2(x-2)^2+25}\ge 3+\sqrt{25}=8$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là 8 khi $x=2$.

b) Ta có: $B=\sqrt{x^2-8x+18}-1=\sqrt{(x-4)^2+2}-1\ge\sqrt{2}-1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức B là $\sqrt{2}-1$ khi $x=4$.

c) Ta có: $C=\sqrt{x^2+y^2-2xy+2x-2y+10}+2y^2-8y+2020$

$$\Rightarrow C=\sqrt{(x-y+1)^2+9}+2(y-2)^2+2012$$

$$\Rightarrow C\ge\sqrt{9}+2012=2015.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là 2015.

Khi $\begin{cases} x-y+1=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A=\sqrt{x^2-12x+36}+\sqrt{x^2-16x+64}$;

b) $B=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-9)^2}+\sqrt{(x-1945)^2}$.

Giải

Tìm cách giải. Thoáng nhìn biểu thức ta có thể bỏ căn và đưa về biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối. Để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối, ta sử dụng:

- $|A-B|=|B-A|$ và $|A|\ge 0$
- $|A|+|B|\ge|A+B|$. Dấu bằng xảy ra khi $A.B\ge 0$.

Trình bày lời giải

a) Ta có:

$$A=\sqrt{x^2-12x+36}+\sqrt{x^2-16x+64}=\sqrt{(x-6)^2}+\sqrt{(x-8)^2}$$

$$A=|x-6|+|x-8|=|x-6|+|8-x|\ge|x-6+8-x|=2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $(x-6)(8-x)\ge 0$ hay $6\le x\le 8$.

b) Ta có:

$$B=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-9)^2}+\sqrt{(x-1945)^2}$$

$$B=|x-2|+|x-9|+|x-1945|$$

$$B=|x-2|+|1945-x|+|x-9|\ge|x-2+1945-x|+0=1943.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 1943 khi $(x-2)(1945-x)\ge 0$ và $x-9=0$ tức là $x=9$.

Ví dụ 6: Cho a,b,c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab+bc+ca=2020$. Chứng minh rằng biểu thức $A=\sqrt{\dfrac{(a^2+2020)(b^2+2020)}{c^2+2020}}$ là một số hữu tỉ.

Giải

- Ta có: $a^2+2020=a^2+ab+bc+ca$

$\Rightarrow a^2+2020=(a+b)(a+c)\quad (1)$

- Tương tự, ta có: $b^2+2020=(b+a)(b+c)\quad (2)$

$c^2+2020=(c+a)(c+b)\quad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $A=\sqrt{\dfrac{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)}{(c+a)(c+b)}}=\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|$

$\Rightarrow A = |a+b|$.

Vì a, b là các số hữu tỉ nên $a+b$ cũng là số hữu tỉ. Vậy A là một số hữu tỉ.

Lưu ý: Các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa của các số hữu tỉ có kết quả cũng là một số hữu tỉ.

Ví dụ 7: Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2=2$

Chứng minh rằng: $\sqrt{a^4+8b^2}+\sqrt{b^4+8a^2}=6 \quad (1)$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát phần kết luận cũng như giả thiết. Định hướng chung khi nghĩ tới là chúng ta biến đổi phần trong căn thức ở phần kết luận thành dạng bình phương. Với suy nghĩ ấy, cũng như khai thác phần giả thiết. Chúng ta có hai hướng suy luận:

Hướng thứ nhất. Dùng thừa số 2 trong mỗi căn để cân bằng bậc.

Hướng thứ hai. Từ giả thiết suy ra: $b^2=2-a^2; a^2=2-b^2$, dùng phương pháp thế, để mỗi căn thức chỉ còn một biến.

Trình bày lời giải

Cách 1. Thay $a^2+b^2=2$ vào (1) ta có:

Vế trái: $\sqrt{a^4+4b^2\left(a^2+b^2\right)}+\sqrt{b^4+4a^2\left(a^2+b^2\right)}$

$=\sqrt{a^4+4a^2b^2+4b^2}+\sqrt{b^4+4a^2b^2+4a^4}$

$=\sqrt{\left(a^2+2b^2\right)^2}+\sqrt{\left(b^2+2a^2\right)^2}=a^2+2b^2+b^2+2a^2$

$=3\left(a^2+b^2\right)=3.2=6$.

Vế trái bằng vế phải. Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. Từ giả thiết suy ra: $b^2=2-a^2; a^2=2-b^2$ thay vào (1) ta được:

$\sqrt{a^4+8\left(2-a^2\right)}+\sqrt{b^4+8\left(2-b^2\right)}=\sqrt{\left(a^2-4\right)^2}+\sqrt{\left(b^2-4\right)^2}$

$=\left|a^2-4\right|+\left|b^2-4\right|$ (do $a^2<4; b^2<4$)

$=4-a^2+4-b^2=6$. Vế trái bằng vế phải. Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 8: Tính tổng: $S=\sqrt{1+\dfrac{8.1^2-1}{1^2.3^2}}+\sqrt{1+\dfrac{8.2^2-1}{3^2.5^2}}+...+\sqrt{1+\dfrac{8.1003^2-1}{2005^2.2007^2}}$

(Thi Olympic Toán học, Hy Lạp – năm 2007)

Giải

Ta có $\sqrt{1+\dfrac{8n^2-1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}}=\sqrt{1+\dfrac{8n^2-1}{(4n^2-1)^2}}=\sqrt{\dfrac{16n^4-8n^2+1+8n^2-1}{(4n^2-1)^2}}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{4n^2}{4n^2-1}\right)^2}=\dfrac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}=1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ với $n\geq 1$.

Suy ra $\sqrt{1+\dfrac{8n^2-1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}}=1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ (*)

Thay n lần lượt từ 1 đến 1003 vào đẳng thức (*) ta được:

$S=1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+...+1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2005}-\dfrac{1}{2007}\right)$

$S=1003+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2007}\right)=1003\dfrac{1003}{2007}$.

C. Bài tập vận dụng

1.1. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa:

a) $A=\sqrt{x^2-5}$;

b) $B=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5x-6}}$;

c) $C=\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{2x-1}}}$;

d) $D=\dfrac{1}{1-\sqrt{x^2-3}}$;

e) $E=\sqrt{x+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{-2x}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Điều kiện để A có nghĩa là $x^2-5\geq 0\Leftrightarrow |x|\geq\sqrt{5}$.

b) Điều kiện để biểu thức B có nghĩa là

$$x^2+5x-6>0\Leftrightarrow (x+6)(x-1)>0\Leftrightarrow x+6 \text{ và } x-1 \text{ cùng dấu}$$

Trường hợp 1. $\begin{cases}x+6>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-6\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>1$

Trường hợp 2. $\begin{cases}x+6<0\\x-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-6\\x<1\end{cases}\Leftrightarrow x<-6$

Vậy điều kiện để biểu thức B có nghĩa là $x>1; x<-6$.

c) Điều kiện để biểu thức C có nghĩa là:

$$\begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ x-\sqrt{2x-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ x^2>2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ (x-1)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ x\ne 1 \end{cases}$$

Vậy điều kiện để biểu thức C có nghĩa là: $S=\left\{x\,/\,x\ge \dfrac{1}{2};x\ne 1\right\}$.

d) Điều kiện để biểu thức D có nghĩa là:

$$\begin{cases} x^2-3\ge 0 \\ 1-\sqrt{x^2-3}\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 3 \\ x^2-3\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\ge \sqrt{3} \\ x\ne \pm 2 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} |x|\ge \sqrt{3} \\ x\ne \pm 2 \end{cases}$ thì biểu thức D có nghĩa.

e) Điều kiện để biểu thức E có nghĩa là: $\begin{cases} x+\dfrac{2}{x}\ge 0 \\ -2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+2}{x}\ge 0 \\ x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\le 0 \end{cases}$

vậy không tồn tại x để biểu thức E có nghĩa.

1.2. a) Cho $x,\ y,\ z$ khác 0 thỏa mãn $x+y+z=0$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}}=\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right|$.

b) Tính giá trị biểu thức:

$$A=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{199^2}+\frac{1}{200^2}}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Xét: $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+2\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)$.

Mà $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{z+x+y}{xyz}=0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}=\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right|.$$

b) Áp dụng câu a, ta có: $1+K+(-1-K)=0$

nên: $\sqrt{1+\dfrac{1}{K^2}+\dfrac{1}{(K+1)^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{K^2}+\dfrac{1}{(-K-1)^2}}=\left|\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{K}+\dfrac{1}{-K-1}\right|$

Suy ra: $\sqrt{1+\frac{1}{K^2}+\frac{1}{(K+1)^2}}=1+\frac{1}{K}-\frac{1}{K+1}$.

Thay *k* lần lượt 2,3,…, 199, ta được:

$$A=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+1+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=198+\frac{1}{2}-\frac{1}{200}=198\frac{99}{200}.$$

1.3. Tìm số nguyên dương *k* thỏa mãn

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{2009^2-1}{2009}$$

(thi học sinh giỏi toán lớp 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng công thức $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ta có:

$$1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}=\frac{2009^2-1}{2009}$$

$$\Leftrightarrow k+1-\frac{1}{k+1}=\frac{2009^2-1}{2009}\Leftrightarrow\frac{(k+1)^2-1}{k+1}=\frac{2009^2-1}{2009}$$

$\Leftrightarrow k=2008$.

1.4. Tìm các số $x,\ y,\ z$ thỏa mãn đẳng thức:

$$(2x-y)^2+(y-2)^2+\sqrt{(x+y+z)^2}=0$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $(2x-y)^2+(y-2)^2+|x+y+z|=0$ (*)

Mà $(2x-y)^2\ge 0;\ (y-2)^2\ge 0;\ |x+y+z|\ge 0$;

Nên đẳng thức (*) chỉ xảy ra khi $\begin{cases}2x-y=0\\ y-2=0\\ x+y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=-3\end{cases}$.

1.5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{25x^2-20x+4}+\sqrt{25x^2-30x+9}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $P=\sqrt{(5x-2)^2}+\sqrt{(5x-3)^2}=|5x-2|+|5x-3|$

$$P=|5x-2|+|3-5x|\ge 5x-2+3-5x=1$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} 5x-2\ge 0 \\ 3-5x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{5}\le x\le \dfrac{3}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $\dfrac{2}{5}\le x\le \dfrac{3}{5}$.

1.6. Cho ba số dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=2$ và $a^2+b^2+c^2=2$.

Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{\frac{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{1+a^2}}+b\sqrt{\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+c^2\right)}{1+b^2}}+c\sqrt{\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}{1+c^2}}=2\ (*)$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $a+b+c=2 \Rightarrow \left(a+b+c\right)^2=4 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)=4$

Mà $a^2+b^2+c^2=2 \Rightarrow 2\left(ab+bc+ca\right)=2 \Leftrightarrow ab+bc+ca=1$.

Ta có: $a^2+1=a^2+ab+bc+ca \Rightarrow a^2+1=\left(a+b\right)\left(a+c\right) \quad (1)$

Tương tự, ta có: $b^2+1=\left(b+a\right)\left(b+c\right) \quad (2)$

$c^2+1=\left(c+a\right)\left(c+b\right) \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) thay vào vế trái của (*), ta có:

$$a\sqrt{\frac{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{1+a^2}}+b\sqrt{\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+c^2\right)}{1+b^2}}+c\sqrt{\frac{\left(1+a\right)^2\left(1+b^2\right)}{1+c^2}}$$

$$=a\sqrt{\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}}+b\sqrt{\frac{\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)}}+c\sqrt{\frac{\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(a+b\right)\left(b+c\right)}{\left(b+c\right)\left(a+c\right)}}$$

$$=a\left(b+c\right)+b\left(a+c\right)+c\left(a+b\right)$$

$$=2\left(ab+bc+ca\right)=2.$$

1.7. Cho $x=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$.

Tính giá trị biểu thức: $T=\left(1+x^{21}-x^{10}\right)^{2020^{5^{19}}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $x=\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}+\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2\sqrt{5}}$

$$x=\frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}=1$$

Vậy $T=\left(1+1^{21}-1^{10}\right)^{2020^{5^{19}}}=1$.

1.8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A=\sqrt{(x-2019)^2}+\sqrt{(x-2020)^2}$;

b) $B=\sqrt{(x-2018)^2}+\sqrt{(y-2019)^2}+\sqrt{(x-2020)^2}$;

c) $C=\sqrt{(x-2017)^2}+\sqrt{(x-2018)^2}+\sqrt{(x-2019)^2}+\sqrt{(x-2020)^2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $A=|x-2019|+|x-2020|$

$=|x-2019|+|2020-x|\ge x-2019+2020-x=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 1 khi $x-2019\ge 0$ và $2020-x\ge 0$ hay $2019\le x\le 2020$.

b) Giá trị nhỏ nhất của B là 2 khi $2018\le x\le 2020$ và $y=2019$.

c) Giá trị nhỏ nhất của C là 4 khi $2018\le x\le 2019$.

1.9. Giải phương trình: $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=4$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=4$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x+\frac{1}{4}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}}=4$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}=4\Leftrightarrow x+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=4$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{4}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}=4\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2=4$

$\Leftrightarrow\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=2\left(\text{vì }\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}>0\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=2$.

1.10. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2-6\sqrt{x^2}+9}+\sqrt{x^2}-7=0$;

b) $\sqrt{2x+4-6\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x-4+2\sqrt{2x-5}}=4$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $\sqrt{x^2-6\sqrt{x^2}+9}+\sqrt{x^2}-7=0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(|x|-3\right)^2}+|x|-7=0$

$$\Leftrightarrow \left||x|-3\right|+|x|-7=0$$

Trường hợp 1: Xét $|x|\geq 3$ phương trình có dạng:

$$|x|-3+|x|-7=0 \Leftrightarrow |x|=5 \Leftrightarrow x=\pm 5.$$

Trường hợp 2: Xét $0\leq x<3$ phương trình có nghiệm: $3-|x|+|x|-7=0$ vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-5;5\}$.

b) $\sqrt{2x+4-6\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x-4+2\sqrt{2x-5}}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5-6\sqrt{2x-5}+9}+\sqrt{2x-5+2\sqrt{2x-5}+1}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{2x-5}-3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2x-5}+1\right)^2}=4$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{2x-5}-3\right|+\sqrt{2x-5}+1=4$

Ta có: $\left|\sqrt{2x-5}-3\right|=\left|3-\sqrt{2x-5}\right|\geq 3-\sqrt{2x-5}$

Vậy vế trái $\geq 3-\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x+5}+1=4$.

Do vậy vế trái bằng vế phải khi:

$$\sqrt{2x-5}\leq 3 \Leftrightarrow 0\leq 2x-5\leq 9 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\leq x\leq 7.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{x/\frac{5}{2}\leq x\leq 7\right\}$.

1.11. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A=\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+15-8\sqrt{a-1}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$A=\sqrt{a-1-4\sqrt{a-1}+4}+\sqrt{a-1-8\sqrt{a-1}+16}$

$\Leftrightarrow A=\sqrt{\left(\sqrt{a-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{a-1}-4\right)^2}$

$\Rightarrow A=\left|\sqrt{a-1}-2\right|+\left|4-\sqrt{a-1}\right|\geq \sqrt{a-1}-2+4-\sqrt{a-1}$

$\Rightarrow A \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $2 \leq \sqrt{a-1} \leq 4 \Leftrightarrow 4 \leq a-1 \leq 16$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $5 \leq a \leq 17$.

1.12. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt{7+2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{6}}$;

b) $B = x + 2y - \sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}$ với $x < 2y$;

c) $D = \sqrt{\left(1-\sqrt{2020}\right)^2}.\left(\sqrt{2021-2\sqrt{2020}}\right)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $A = \sqrt{7+2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{6}}$

$$A = \sqrt{\left(\sqrt{6}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}$$

$$A = \left(\sqrt{6}+1\right) + \left(\sqrt{6}-1\right) = 2\sqrt{6}.$$

b) $B = x + 2y - \sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}$ với $x < 2y$;

$B = x + 2y - \sqrt{(x-2y)^2}$

$B = x + 2y - |x-2y| = x + 2y - (2y - x) = 2x$.

c) $D = \sqrt{\left(1-\sqrt{2020}\right)^2}.\left(\sqrt{2021-2\sqrt{2020}}\right)$

$D = \left|1-\sqrt{2020}\right|\sqrt{\left(\sqrt{2020}-1\right)^2}$

$= \left(\sqrt{2020}-1\right)\left(\sqrt{2020}-1\right) = 2021 - 2\sqrt{2020}$.

1.13. Cho x và y là hai số thực thỏa mãn:

$$y = \sqrt{\frac{2019x+2020}{2020x-2021}} + \sqrt{\frac{2019x+2020}{2021-2020x}} + 2022.$$

Tính giá trị của y.

Hướng dẫn giải – đáp số

Điều kiện để y có nghĩa là $\dfrac{2019x+2020}{2020x-2021} \geq 0 \ (1)$

và $\dfrac{2019x+2020}{2021-2020x} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-(2019x+2020)}{2020x-2021} \geq 0 \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $2019x + 2020 = 0$ hay $x = -\dfrac{2020}{2019}$

Suy ra $y = 2022$.

1.14. Tính $\dfrac{x}{y}$ biết $x > 1; y < 0$ và $\dfrac{(x+y)(x^3-y^3)\sqrt{\left(1-\sqrt{4x-1}\right)^2}}{\left(1-\sqrt{4x-1}\right)(x^2y^2+xy^3+y^4)} = -6$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: Với $x > 1 \Rightarrow 4x > 4 \Rightarrow 4x - 1 > 3 \Rightarrow \sqrt{4x-10} > \sqrt{3}$

Do đó $\sqrt{\left(1-\sqrt{4x-1}\right)^2} = \sqrt{4x-1} - 1$

Từ đó $\dfrac{(x+y)(x^3-y^3)\left(\sqrt{4x-1}-1\right)}{\left(1-\sqrt{4x-1}\right)(x^2y^2+xy^3+y^4)} = -6$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+y)(x^3-y^3)}{x^2y^2+xy^3+y^4} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y^2(x^2+xy+y^2)} = 6$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 6y^2 \Leftrightarrow x^2 = 7y^2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x}{y}\right| = \sqrt{7}$

Mà $x > 1; y < 0$ nên $\dfrac{x}{y} = -\sqrt{7}$.

1.15. Cho $A = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}}$, gồm 100 dấu căn.

Chứng minh rằng *A* không phải là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A > \sqrt{6} > 2$.

Mặt khác $\sqrt{6+\sqrt{6}} < \sqrt{6+3} = 3; \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} < \sqrt{6+3} = 3$

$... \Rightarrow A < 3$.

Do đó $2 < A < 3$. Chứng tỏ rằng *A* không phải số tự nhiên.

Nhận xét: Nếu *A* nằm giữa hai số tự nhiên liên tiếp thì *A* không phải số tự nhiên.

1.16. Cho ba số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$

Chứng minh rằng $A = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ là số hữu tỉ.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết ta có $bc + ac = ab \Rightarrow 2ab - 2bc - 2ca = 0$

Suy ra $a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

$$=(a+b-c)^2$$

$\Rightarrow A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=|a+b-c|$ là số hữu tỉ.

1.17. Cho ba số dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=\dfrac{1}{abc}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}}=a+b$.

(thi học sinh giỏi toán lớp 9, TP, Hồ Chí Minh, năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $a+b+c=\dfrac{1}{abc}\Rightarrow abc(a+b+c)=1$

Do đó: $1+b^2c^2=abc(a+b+c)+b^2c^2=bc(a+b)(a+c)$

Tương tự, ta có: $1+a^2c^2=ac(a+b)(b+c)$

$$1+a^2b^2=ab(b+c)(a+c)$$

Suy ra: $\sqrt{\dfrac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}}=\sqrt{\dfrac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2(1+a^2b^2)}}$

$$=\sqrt{\frac{bc(a+b)(a+c)ac(a+b)(b+c)}{c^2ab(a+c)(b+c)}}=\sqrt{(a+b)^2}=a+b.$$

1.18. Cho $x,\ y$ thỏa mãn $0<x<1,\ 0<y<1$ và $\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{y}{1-y}=1$.

Tính giá trị của biểu thức $P=x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}$.

(Tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên, Đại học sư phạm Hà Nội, năm học 2015 – 2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết, suy ra: $x(1-y)+y(1-x)=(1-x)(1-y)$

$\Leftrightarrow 2x+2y-1=3xy \Leftrightarrow x^2-xy+y^2=(x+y)^2-2(x+y)+1=(x+y-1)^2$

Vậy $P=x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}=x+y+|x+y-1|$

Từ giả thiết, ta lại có: $\dfrac{x}{1-x}<1\Rightarrow x<\dfrac{1}{2}$

Tương tự ta có: $y<\dfrac{1}{2}$. Suy ra $0<x+y<1$, ta có $P=x+y+1-x-y=1$.

Chương 1. CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

Chuyên đề 2. LIÊN HỆ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Với $A \ge 0, B \ge 0$ thì: $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ và ngược lại $\sqrt{A}.\sqrt{B} = \sqrt{A.B}$

Đặc biệt, khi $A \ge 0$, ta có: $\left(\sqrt{A}\right)^2 = \sqrt{A^2} = A$.

2. Với $A \ge 0, B > 0$ thì $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ và ngược lại $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$

3. Bổ sung

- Với $A_1, A_2, ..., A_n \ge 0$ thì: $\sqrt{A_1}.\sqrt{A_2}...\sqrt{A_n} = \sqrt{A_1.A_2...A_n}$
- Với $a \ge 0; b \ge 0$ thì: $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$).
- Với $a \ge b \ge 0$ thì: $\sqrt{a-b} \ge \sqrt{a} - \sqrt{b}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ hoặc $b = 0$).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{8-\sqrt{15}}.\sqrt{8+\sqrt{15}}$;

b) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}} + \sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$.

Giải

a) $\sqrt{8-\sqrt{15}}.\sqrt{8+\sqrt{15}} = \sqrt{64-15} = \sqrt{49} = 7$.

b) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}} + \sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2 = 6 - \sqrt{11} + 2\sqrt{\left(6-\sqrt{11}\right)\left(6+\sqrt{11}\right)} + 6 + \sqrt{11}$

$= 12 + 2\sqrt{36-11} = 22$.

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức sau: $P = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{4+\sqrt{8}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kĩ đề bài, ta thấy có hai biểu thức trong căn có dạng $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ và $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ nên ta dùng tính chất giao hoán và thực hiện phép tính.

Trình bày lời giải

$$P = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{4+\sqrt{8}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{4+\sqrt{8}}$$

$P=\sqrt{4-2-\sqrt{2}}.\sqrt{4+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2}$

$P=\sqrt{4-2}.\sqrt{2}=2$.

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{10+2\sqrt{21}}-\sqrt{3}$.

Giải

Tìm cách giải. Để rút gọn biểu thức có dạng $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}$ ta chú ý tới hằng đẳng thức $x\pm 2\sqrt{xy}+y=\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)^2$

Ta cần biến đổi: $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}=\sqrt{\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)^2}$, do vậy ta xác định x và y thông qua $x+y=a;\ xy=b$.

Chẳng hạn: $x+y=10;\ x.y=21\Rightarrow\{x;y\}=\{3;7\}$.

Trình bày lời giải

$A=\sqrt{3+2.\sqrt{3.7}+7}-\sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{3}=\sqrt{7}$.

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức: $B=\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{8-3\sqrt{5}}-\sqrt{2}$

Giải

Tìm cách giải. Đề bài chưa xuất hiện dạng $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}$.

Ta cần biến đổi bài toán về dạng $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}$ và giải theo cách trên.

Trình bày lời giải

Ta có: $B.\sqrt{2}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}-2$

$B.\sqrt{2}=\sqrt{\left(\sqrt{7}+1\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}-2$

$B.\sqrt{2}=\sqrt{7}+1+3-\sqrt{7}-2=2\Rightarrow B=\sqrt{2}$.

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}}}$

Giải

Tìm cách giải. Với những bài toán có nhiều căn "*chồng chất*", ta có thể giảm bớt số căn, bằng cách đưa các căn ở phía trong về dạng $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}$ sau đó dùng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$ và giải như các ví dụ trên.

Trình bày lời giải

Ta có $A=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}}}$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}}=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}=\sqrt{4}.$$

Suy ra $A=2$.

Ví dụ 6: Rút gọn: $C=\sqrt{2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}}-\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}}$

Giải

Tìm cách giải.

Ví dụ này không thể biến đổi để đưa về dạng $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}=\sqrt{\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)^2}$.

Do vậy để rút gọn biểu thức dạng $C=\sqrt{x+\sqrt{y}}\pm\sqrt{x-\sqrt{y}}$ ta thường tính C^2 sau đó nhận xét dấu của C, từ đó tìm được C.

Trình bày lời giải

Xét $C^2=2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}+2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}-2\sqrt{\left(2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}\right)\left(2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}\right)}$

$C^2=4-2\sqrt{4-2\sqrt{5}+2}=4-2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=4-2\left(\sqrt{5}-1\right)$

$C^2=6-2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$. Vì $C<0$ nên $C=1-\sqrt{5}$.

Ví dụ 7: Cho $x,\ y$ thỏa mãn $\sqrt{x-1}+x^2=\sqrt{y-1}+y^2$. Chứng minh rằng: $x=y$.

Giải

Tìm cách giải. Nhận xét giả thiết *x, y* có vai trò như nhau. Phân tích từ kết luận để có $x=y$, chúng ta cần phân tích giả thiết xuất hiện nhân tử $(x-y)$.

Dễ thấy x^2-y^2 có chứa nhân tử $(x-y)$, do vậy phần còn lại để xuất hiện nhân tử $(x-y)$ chúng ta vận dụng $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$ từ đó suy ra: $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Lưu ý rằng mẫu số khác 0.

Từ đó chúng ra có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Từ đề bài ta có điều kiện: $x \ge 1;\ y \ge 1$.

- *Trường hợp 1:* Xét $x = 1; y = 1 \Rightarrow x = y$.

- *Trường hợp 2:* Xét ít nhất *x* hoặc *y* khác 1. Ta có:

$$x^2 - y^2 + \sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) + \frac{(x-1)-(y-1)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x+y+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}\right) = 0$$

Vì $x + y + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} > 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

Ví dụ 8: Cho $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. Tính giá trị biểu thức $\sqrt{16a^8 - 51a}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, Tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2011 – 2012)

Giải

Tìm cách giải. Để thay giá trị trực tiếp $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ vào biểu thức thì khai triển dài dòng, dễ dẫn đến sai lầm. Do vậy chúng ta nên tính từ từ, bằng cách tính $a^2; a^4$ và a^8 bằng hằng đẳng thức. Bài toán sẽ đơn giản và không dễ mắc sai lầm.

Trình bày lời giải

$$2a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow 2a - 1 = -\sqrt{2} \Rightarrow 4a^2 - 4a + 1 = 2$$

$$\Rightarrow 4a^2 = 1 + 4a = 1 + 2\left(1-\sqrt{2}\right) = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow 16a^4 = 9 - 12\sqrt{2} + 8 = 17 - 12\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 256a^8 = 289 - 408\sqrt{2} + 288 = 577 - 408\sqrt{2} \Rightarrow 16a^8 = \frac{577-408\sqrt{2}}{16}$$

Xét $16a^8 - 51a = \dfrac{577-408\sqrt{2}}{16} - \dfrac{51\left(1-\sqrt{2}\right)}{2}$

$$= \frac{577 - 408\sqrt{2} - 408 + 408\sqrt{2}}{16} = \frac{169}{16}$$

Vậy $\sqrt{16a^8 - 51a} = \sqrt{\dfrac{169}{16}} = \dfrac{13}{4}$.

Ví dụ 9: Tính giá trị $S = \dfrac{1}{a^7} + \dfrac{1}{b^7}$ với $a = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2};\ b = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

Giải

Tìm cách giải. Nếu thay giá trị của *a* và *b* vào biểu thức và biến đổi thì bài toán sẽ phức tạp, có thể dẫn đến sai lầm. Bài toán có dạng đối xứng cơ bản, ta có thể tính tổng và tích của *a* và *b*, sau đó dùng các hằng đẳng thức để tính dần dần.

Trình bày lời giải

Từ đề bài suy ra: $a+b=\sqrt{6};\ ab=1$

Ta có: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4$;

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=6\sqrt{6}-3.1.\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

Xét $(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^5+a^2b^3+a^3b^2+b^5=a^5+b^5+a^2b^2(a+b)$

$4.3\sqrt{6}=a^5+b^5+1\sqrt{6}$

Từ đó tính được: $a^5+b^5=11\sqrt{6}$

Xét $(a^2+b^2)(a^5+b^5)=a^7+a^2b^5+a^5b^2+b^7=a^7+b^7+a^2b^2(a^3+b^3)$

Suy ra: $4.11\sqrt{6}=a^7+b^7+1.3\sqrt{6}\Rightarrow a^7+b^7=41\sqrt{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{1}{a^7}+\dfrac{1}{b^7}=b^7+a^7=41\sqrt{6}$.

Ví dụ 10: Cho $b\ge 0;\ a\ge\sqrt{b}$. Chứng minh đẳng thức:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Giải

Đặt vế phải là: $B=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

Ta có $B\ge 0$

Xét $B^2=\dfrac{a+2\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2.\sqrt{\dfrac{\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)}{2}.\dfrac{\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)}{2}}+\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$

$B^2=a\pm 2.\sqrt{\dfrac{a^2-(a^2-b)}{4}};\ B^2=a\pm\sqrt{b}$

Vì $B\ge 0$ nên $B=\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$.

Vế phải bằng vế trái. Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 11: Cho các số thực x; y thỏa mãn: $\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\left(y-1+\sqrt{y^2-2y+3}\right)=2$

Chứng minh rằng: $x^3+y^3+3xy=1$

Giải

Đặt $y-1=z$ từ giả thiết ta có: $\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\left(z+\sqrt{z^2+2}\right)=2 \ (*)$

Nhân hai vế với $\sqrt{x^2+2}-x$ ta được

$$\left(x^2+2-x^2\right)\left(z+\sqrt{z^2+2}\right)=2\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(z+\sqrt{z^2+2}\right)=2\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\Leftrightarrow z+\sqrt{z^2+2}=\sqrt{x^2+2}-x \ (1)$$

Nhân hai vế của đẳng thức (*) với $\sqrt{z^2+2}-z$ ta được

$$\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\left(z^2+2-z^2\right)=2\left(\sqrt{z^2+2}-z\right)$$

$$\Rightarrow \left(x+\sqrt{x^2+2}\right)2=2\left(\sqrt{z^2+2}-z\right)$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{x^2+2}=\sqrt{z^2+2}-z \ (2)$$

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, rút gọn ta được:

$$x+z=0\Rightarrow x+y-1=0\Rightarrow x+y=1$$

Xét $x^3+y^3+3xy=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)+3xy=x^2-xy+y^2+3xy$

$$=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=1$$

Vậy $x^3+y^3+3xy=1$. Điều phải chứng minh.

C. Bài tập vận dụng

2.1. Tính: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-5\right)\left(5-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2\right)=2\sqrt{6}.2\sqrt{6}=24$.

2.2. Chứng minh rằng các số sau là số tự nhiên.

a) $A=\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$;

b) $B=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $A=\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right).\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)=\sqrt{6-2\sqrt{5}}.\left(\sqrt{5}-1\right).\left(3+\sqrt{5}\right)$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}.\left(\sqrt{5}-1\right).\left(3+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}-1\right).\left(\sqrt{5}-1\right).\left(3+\sqrt{5}\right)$$

$$=\left(5-2\sqrt{5}+1\right).\left(3+\sqrt{5}\right)=2\left(3-\sqrt{5}\right).\left(3+\sqrt{5}\right)=2.(9-5)=8.$$

Vậy A là số tự nhiên.

b) Ta có $B=\left(\sqrt{3}+1\right).\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\left(\sqrt{3}+1\right).\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$

$\Rightarrow B=\left(\sqrt{3}+1\right).\left(\sqrt{3}-1\right)=3-1=2$.

Vậy B là số tự nhiên.

2.3. Rút gọn biểu thức:

a) $P=\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{20}-3\sqrt{6}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

b) $Q=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $P=\dfrac{\sqrt{10}\left(3+\sqrt{2}\right)-\sqrt{6}\left(3+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$$P=\frac{\left(3+\sqrt{2}\right).\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=3\sqrt{2}+2.$$

b) Ta có $Q=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+2+\sqrt{6}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=1+\sqrt{2}$.

2.4. Rút gọn các biểu thức:

a) $C=\dfrac{\sqrt{6+2\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}-\sqrt{6-2\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}}{\sqrt{2}}$;

b) $D=\dfrac{\sqrt{9-6\sqrt{2}}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $C=\dfrac{\sqrt{1+2+3+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}-\sqrt{1+2+3-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}}$

$$C=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}$$

$C=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$.

b) $D=\dfrac{\sqrt{3.\left(3-2\sqrt{2}\right)}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}}=-1.$$

2.5. Cho $x+\sqrt{3}=2$. Tính giá trị $B=x^5-3x^4-3x^3+6x^2-20x+2018$.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $x-2=-\sqrt{3}$, bình phương hai vế ta được:

$$x^2-4x+4=3\Leftrightarrow x^2-4x+1=0\ (*)$$

Ta có $B=x^3\left(x^2-4x+1\right)+x^2\left(x^2-4x+1\right)+5\left(x^2-4x+1\right)+2013$

Kết hợp với (*) ta có: $B=2013$.

2.6. Tính giá trị biểu thức $A=x^2+2002x-2003$ với

$$x=\frac{\left(27+10\sqrt{2}\right)\sqrt{27-10\sqrt{2}}-\left(27-10\sqrt{2}\right)\sqrt{27+10\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{\sqrt{13}-3}+\sqrt{\sqrt{13}+3}\right):\sqrt{\sqrt{13}+2}}$$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(5+\sqrt{2}\right)^2}=5+\sqrt{2}$.

$\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(5-\sqrt{2}\right)^2}=5-\sqrt{2}$

Tử số là: $\left(5+\sqrt{2}\right)^2.\left(5-\sqrt{2}\right)-\left(5-\sqrt{2}\right)^2.\left(5+\sqrt{2}\right)$

$$=\left(5+\sqrt{2}\right).23-\left(5-\sqrt{2}\right).23=46\sqrt{2}.$$

Xét $a=\sqrt{\sqrt{13}-3}+\sqrt{\sqrt{13}+3};\ a>0$.

$\Rightarrow a^2 = \sqrt{13} - 3 + \sqrt{13} + 3 + 2\sqrt{\left(\sqrt{13} - 3\right)\left(\sqrt{13} + 3\right)}$

$\Rightarrow a^2 = 2\sqrt{13} + 4 \Leftrightarrow a = \sqrt{2\left(\sqrt{13} + 2\right)}$.

Do đó $x = \dfrac{46\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(\sqrt{13}+2\right)} : \sqrt{\sqrt{13}+2}} = 46$.

Vậy giá trị biểu thức $A = 46^2 + 2002.46 - 2003 = 92205$.

2.7. So sánh:

a) $\sqrt{\sqrt{6+\sqrt{20}}}$ và $\sqrt{1+\sqrt{6}}$;

b) $\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$ và $\sqrt{2}+1$;

c) $\sqrt{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}$ và $\sqrt{3}-2$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $\sqrt{\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}} = \sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}} = \sqrt{\sqrt{5}+1} < \sqrt{\sqrt{6}+1}$

Vậy $\sqrt{\sqrt{6+\sqrt{20}}} < \sqrt{1+\sqrt{6}}$.

b) Ta có $\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{9+12\sqrt{2}+8}} = \sqrt{\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2}}$

$= \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \sqrt{2}+1$.

c) $\sqrt{\sqrt{16-16\sqrt{3}+12}} = \sqrt{\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)^2}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$= \sqrt{3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{3}-1 > \sqrt{3}-2$.

Vậy $\sqrt{\sqrt{28-16\sqrt{3}}} > \sqrt{3}-2$.

2.8. a) Giả sử a và b là hai số dương khác nhau và thỏa mãn:

$$a - b = \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2}$$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 = 1$.

b) Chứng minh rằng số $\sqrt{2009^2 + 2009^2.2010^2 + 2010^2}$ là số nguyên dương.

(Tuyển sinh lớp 10, chuyên toán ĐHSP Hà Nội, năm học 2010 – 2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $a+\sqrt{1-a^2}=b+\sqrt{1-b^2}$.

Bình phương hai vế không âm, ta được:

$a^2+2a\sqrt{1-a^2}+1-a^2=b^2+2b\sqrt{1-b^2}+1-b^2 \Leftrightarrow a\sqrt{1-a^2}=b\sqrt{1-b^2}$.

Bình phương hai vế không âm, ta được:

$a^2\left(1-a^2\right)=b^2\left(1-b^2\right) \Leftrightarrow a^4-b^4-a^2+b^2=0$

$\Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-1\right)=0$

Do *a*, *b* là hai số dương khác nhau nên $a^2-b^2\neq 0$

$\Rightarrow a^2+b^2-1=0$ hay $a^2+b^2=1$. Điều phải chứng minh.

b) Đặt $a=2009$, ta có:

$\sqrt{a^2+a^2\left(a+1\right)^2+\left(a+1\right)^2}=\sqrt{a^2+a^4+2a^3+a^2+\left(a+1\right)^2}$

$=\sqrt{a^4+2a^2\left(a+1\right)+\left(a+1\right)^2}=\sqrt{\left(a^2+a+1\right)^2}$

$=\left(a^2+a+1\right)=2009^2+2009+1$ là số nguyên dương.

2.9. Cho $b\geq 0;\ a\geq\sqrt{b}$. Chứng minh đẳng thức:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2\left(a\pm\sqrt{a^2-b}\right)}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $A=\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}$ ta có $A\geq 0$.

Xét $A^2=a+\sqrt{b}\pm 2.\sqrt{\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)}+a-\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow A^2=2a\pm 2\sqrt{a^2-b} \Leftrightarrow A^2=2.\left(a\pm\sqrt{a^2-b}\right)$

Vì $A\geq 0$ nên $A=\sqrt{2\left(a\pm\sqrt{a^2-b}\right)}$. Suy ra điều phải chứng minh.

2.10. Cho $x_1=\sqrt{3+\sqrt{5}}$ và $x_2=\sqrt{3-\sqrt{5}}$. Hãy tính: $A=x_1.x_2;\ B=x_1^2+x_2^2;\ C=x_1^3+x_2^3;\ D=x_1^5+x_2^5$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=x_1.x_2=\sqrt{3+\sqrt{5}}.\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{9-5}=2$.

Ta có: $B=x_1^2+x_2^2=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=6$.

Ta có: $C=\left(x_1+x_2\right)\left(x_1^2-x_1x_2+x_2^2\right)=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)\left(6-2\right)$

$$\Rightarrow C=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right).4$$

$$\Rightarrow C=\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right).2.\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow C=\left(\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1\right).2\sqrt{2}=4\sqrt{10}.$$

Xét $\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^3+x_2^3\right)=x_1^5+x_1^2x_2^3+x_1^3x_2^3+x_2^5$

$$\Rightarrow 6.4\sqrt{10}=x_1^5+x_2^5+x_1^2x_2^2\left(x_1+x_2\right)$$

$$\Rightarrow 24\sqrt{10}=x_1^5+x_2^5+4\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow 24\sqrt{10}=x_1^5+x_2^5+\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right).2.\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 24\sqrt{10}=x_1^5+x_2^5+\left(\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1\right).2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow D=x_1^5+x_2^5=20\sqrt{10}.$$

2.11. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{7+\sqrt{5}}+\sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

(Tuyển sinh lớp 10, chuyên toán, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $B=\sqrt{7+\sqrt{5}}+\sqrt{7-\sqrt{5}}$

$\Rightarrow B^2=7+\sqrt{5}+2\sqrt{\left(7+\sqrt{5}\right)\left(7-\sqrt{5}\right)}+7-\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow B^2=14+2\sqrt{49-5}=14+4\sqrt{11}$

Mà $B>0$ nên $B=\sqrt{14+4\sqrt{11}}$.

Từ đó suy ra: $A=\dfrac{\sqrt{14+4\sqrt{11}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}\Rightarrow A=\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right)=1$.

2.12. Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $\sqrt{x-1}-y\sqrt{y}=\sqrt{y-1}-x\sqrt{x}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=x^2+3xy-2y^2-8y+12$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Tập xác định $x\ge 1; y\ge 1$.

- Trường hợp 1: Xét $x=y=1$ suy ra:

$$P = 1^2 + 3.1.1 - 2.1^2 - 8.1 + 12 = 6 \ (1)$$

• Trường hợp 2: Xét ít nhất $x \neq 1$ hoặc $y \neq 1$. Ta có:

$x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + \sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right).\left(x + \sqrt{xy} + y\right) + \dfrac{x - 1 - y + 1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right).\left(x + \sqrt{xy} + y\right) + \dfrac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right).\left(x + \sqrt{xy} + y + \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}}\right) = 0$

Mà $x \geq 1; y \geq 1$ nên $x + \sqrt{xy} + y + \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} > 0$

Suy ra $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow x = y$

Ta có: $S = x^2 + 3x^2 - 2x^2 - 8x + 12$

$\Leftrightarrow S = 2x^2 - 8x + 12 \Leftrightarrow S = 2.(x-2)^2 + 4 \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của S là 4 khi $x = 2 \ (2)$.

Từ (1) và (2) vậy giá trị nhỏ nhất của S là 4 khi $x = 2$.

2.13. Rút gọn các biểu thức sau:

$P = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}$;

$Q = \left(\sqrt{3} - 1\right)\sqrt{6 + 2\sqrt{2}.\sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $P = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3}}}}$

$$P = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2}}}}$$

$$P = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\left(2 + \sqrt{3}\right)}}}$$

$$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}}$$

$$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{25-10\sqrt{3}+3}}}$$

$$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}}}$$

$$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\left(5-\sqrt{3}\right)}}$$

$$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+25-5\sqrt{3}}}=\sqrt{4+\sqrt{25}}=\sqrt{9}=3.$$

b) $Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{16-8\sqrt{2}+2}}}}$

$$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2}}}}$$

$$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}}}}$$

$$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}}$$

$$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{3}-1}}=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=2.$$

2.14. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{3}+1}$

b) $T=\dfrac{2\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $A=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{12+4\sqrt{3}+1}}}}{\sqrt{3}+1}$

$$A=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}}}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5-2\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{3}+1}$$

$$A=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}}{\sqrt{3}+1}$$

$$A=\frac{\sqrt{6+2\left(\sqrt{3}-1\right)}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}$$

$$A=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=1.$$

b) Ta có $T=\dfrac{2\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$$T=\frac{2\sqrt{3-\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3-\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3-\sqrt{3}-1}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$T=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=1.$$

2.15. Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}}:\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}}.\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$A=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right).\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$A=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$A=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}.$$

2.16. Biết $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Tính giá trị biểu thức: $S=x^4-16x^2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $x^2=2+\sqrt{2+\sqrt{3}}+6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$

$\Leftrightarrow x^2=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{3\left(4-2-\sqrt{3}\right)}$

$\Leftrightarrow x^2=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{6-3\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow 8-x^2=2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right)$.

Bình phương hai vế ta được:

$64-16x^2+x^4=4\left(2+\sqrt{3}+6-3\sqrt{3}+2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(6-3\sqrt{3}\right)}\right)$

$\Leftrightarrow 64-16x^2+x^4=32$

$\Rightarrow x^4-16x^2=32$.

2.17. Cho $\left(x-2019+\sqrt{(x-2019)^2+2020}\right)\left(y-2019+\sqrt{(y-2019)^2+2020}\right)=2020$.

Tính giá trị của $A=x+y$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $x-2019=a;\ y-2019=b$.

Đẳng thức đã cho có dạng: $\left(a+\sqrt{a^2+2020}\right).\left(b+\sqrt{b^2+2020}\right)=2020\ (*)$

Nhân hai vế của đẳng thức (*) với $\sqrt{a^2+2020}-a$, ta được:

$\left(a^2+2020-a^2\right)\left(b+\sqrt{b^2+2020}\right)=\left(\sqrt{a^2+2020}-a\right).2020$

$\Leftrightarrow b+\sqrt{b^2+2020}=\sqrt{a^2+2020}-a\ \ (1)$

Nhân hai vế của đẳng thức (*) với $\sqrt{b^2+2020}-b$, ta được:

$\left(a+\sqrt{a^2+2020}\right)\left(b^2+2020-b^2\right)=2020.\left(\sqrt{b^2+2020}-b\right)$

$\Leftrightarrow a+\sqrt{a^2+2020}=\sqrt{b^2+2020}-b\ \ (2)$

Từ (1) và (2) cộng vế với vế và rút gọn ta được:

$a+b=0 \Rightarrow x-2019+y-2019=0$

Vậy $A=x+y=4038$.

2.18. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}:2\sqrt{1+\dfrac{2x}{3-x}}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\dfrac{(x+2)(x+3)+x\sqrt{(3-x)(3+x)}}{x(3-x)+(x+2)\sqrt{(3-x)(3+x)}}:2\sqrt{\dfrac{3-x+2x}{3-x}}$

Điều kiện xác định $-3<x<3$,

$$A=\frac{\sqrt{x+3}\left((x+2)\sqrt{x+3}+x\sqrt{3-x}\right)}{\sqrt{3-x}\left(x\sqrt{3-x}+(x+2)\sqrt{x+3}\right)}:2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$$

$$A=\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}}.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}=\frac{1}{2}.$$

2.19. Cho biểu thức $P=\left(a^{2013}-8a^{2012}+11a^{2011}\right)+\left(b^{2013}-8b^{2012}+11b^{2011}\right)$.

Tính giá trị biểu thức của P với $a=4+\sqrt{5}$ và $b=4-\sqrt{5}$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP. Hà Nội, năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $a-4=\sqrt{5}$ bình phương hai vế ta được:

$a^2-8a+16=5 \Rightarrow a^2-8a+11=0$

Xét $b-4=-\sqrt{5}$ bình phương hai vế ta được:

$b^2-8b+16=5 \Rightarrow b^2-8b+11=0$.

$P=a^{2011}\left(a^2-8a+11\right)+b^{2011}\left(b^2-8b+11\right)$

$\Rightarrow P=0$.

2.20. Cho $\dfrac{-3}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}; x\ne 0$ và $\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}=a$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{9-4x^2}}}{x}$ theo *a*.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $P=\dfrac{\sqrt{3+2x+2\sqrt{(3+2x)(3-2x)}+3-2x}}{x}$

$$P=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x}\right)^2}}{x}=\dfrac{\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x}}{x}$$

$$P=\dfrac{(3+2x)-(3-2x)}{x\left(\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}\right)}=\dfrac{4x}{x\left(\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}\right)}=\dfrac{4}{a}.$$

2.21. Tính giá trị của biểu thức: $A=2x^3+3x^2-4x+2$

Với $x=\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1$.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $a=\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}, a>0$.

Xét $a^2=4+2\sqrt{4-\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}=4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=4+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=3+\sqrt{5}$

$\Rightarrow a=\sqrt{3+\sqrt{5}}$

$\Rightarrow x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}}-1$

$=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1$

$x=\sqrt{2}-1\Rightarrow x+1=\sqrt{2}\Rightarrow (x+1)^2=2\Rightarrow x^2+2x-1=0$.

Ta có: $A=2x^3+3x^2-4x+2$

$A=2x\left(x^2+2x-1\right)-\left(x^2+2x-1\right)+1=1$.

2.22. ***Đố.*** Căn bậc hai của 64 có thể viết dưới dạng như sau: $\sqrt{64}=6+\sqrt{4}$. Hỏi có tồn tại hay không các số có hai chữ số có thể viết căn bậc hai của chúng dưới dạng như trên.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt số đó là $\overline{ab}$. Theo đầu bài, ta có:

$\sqrt{\overline{ab}}=a+\sqrt{b}\Leftrightarrow \overline{ab}=a^2+2a\sqrt{b}+b$

$\Leftrightarrow 10a = a^2 + 2a\sqrt{b} \Leftrightarrow a + 2\sqrt{b} = 10$

$\Rightarrow a$ chẵn. Đặt $a = 2K\left(K \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow 2K + 2\sqrt{b} = 10 \Rightarrow K + \sqrt{b} = 5$.

Do $b \le 9$ nên $b = 0;1;4;9$.

• Nếu $b = 0 \Rightarrow K = 5 \Rightarrow a = 10$ (loại)

• Nếu $b = 1 \Rightarrow K = 4 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow$ Số đó là 81

• Nếu $b = 4 \Rightarrow K = 3 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow$ Số đó là 64 (đã cho)

• Nếu $b = 9 \Rightarrow K = 2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow$ Số đó là 49.

Chương 1. CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

Chuyên đề 3. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN – BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. Kiến thức cần nhớ

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn $\sqrt{A^2B}=|A|\sqrt{B}\left(B\ge 0\right)$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

$A.\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}$ (với $A\ge 0;\ B\ge 0$)

$A.\sqrt{B}=-\sqrt{A^2.B}$ (với $A<0;\ B\ge 0$)

3. Khử mẫu ở biểu thức chứa căn

$\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\sqrt{\dfrac{AB}{B^2}}=\dfrac{1}{|B|}\sqrt{AB}$ (với $AB\ge 0;\ B\ne 0$)

4. Trục căn thức ở mẫu

$\dfrac{M}{\sqrt{A}}=\dfrac{M\sqrt{A}}{A}\left(A>0\right);\ \dfrac{M}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\dfrac{M\left(\sqrt{A}\mp\sqrt{B}\right)}{A-B}\left(A\ge 0;B\ge 0;A\ne B\right)$

5. Rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai

Bước 1. Dùng các phép biến đổi đơn giản để đưa các căn thức bậc hai phức tạp thành căn thức bậc hai đơn giản.

Bước 2. Thực hiện phép tính theo thứ tự đã biết.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $4\sqrt{3};\ 3\sqrt{5};\ 5\sqrt{2};\ 2\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{15};\ 2\sqrt{6};\ 6\sqrt{\dfrac{1}{3}};\ 3\sqrt{2}$.

Giải

Tìm cách giải. Để sắp xếp các căn thức không đồng dạng, chúng ta đưa các thừa số vào trong dấu căn. Sau đó so sánh biểu thức trong căn.

Trình bày lời giải

a) Đưa các thừa số vào trong dấu căn, ta được:

$4\sqrt{3}=\sqrt{48}$; $\quad 3\sqrt{5}=\sqrt{45}$;

$5\sqrt{2}=\sqrt{50}$; $\quad 2\sqrt{5}=\sqrt{20}$

Mà $\sqrt{20} < \sqrt{45} < \sqrt{48} < \sqrt{50}$.

Suy ra thứ tự tăng dần là $2\sqrt{5};\ 3\sqrt{5};\ 4\sqrt{3};\ 5\sqrt{2}$.

b) Đưa các thừa số vào trong dấu căn, ta được:

$\sqrt{15}$; $\qquad 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$;

$6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{12}$; $\qquad 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$.

Mà $\sqrt{12} < \sqrt{15} < \sqrt{18} < \sqrt{24}$.

Suy ra thứ tự tăng dần là $6\sqrt{\frac{1}{3}};\ \sqrt{15};\ 3\sqrt{2};\ 2\sqrt{6}$

Ví dụ 2: Khử căn thức ở mẫu số: $A = \dfrac{59}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

Giải

Tìm cách giải. Chúng ta không thể vận dụng một lần hằng đẳng thức để khử đồng thời ba căn thức ở mẫu được. Do vậy, chúng ta tìm cách giảm bớt số căn ở mẫu bằng hằng đẳng thức:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right) = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 - c = a+b-c+2\sqrt{ab}.$$

Sau đó khử thường mẫu bằng cách nhân cả tử và mẫu của mẫu với biểu thức liên hợp.

Trình bày lời giải

$$A = \frac{59\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-7} = \frac{59\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{2\sqrt{15}+1} = \frac{59\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{15}-1\right)}{60-1}$$

$$A = \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{15}-1\right).$$

Ví dụ 3: Thực hiện phép tính.

a) $A = \sqrt{20} - 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125}$;

b) $B = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right).\left(\sqrt{3} - 4\sqrt{\dfrac{1}{3}} + 2\right).\sqrt{0,2}$.

Giải

Tìm cách giải. Để thực hiện phép tính, bạn luôn chú ý:

- Đưa thừa số ra ngoài dấu căn.
- Trục căn thức ở mẫu, khử mẫu của biểu thức lấy căn.
- Sau đó thu gọn các căn thức đồng dạng.

Trình bày lời giải

a) Ta có: $A=\sqrt{20}-2\sqrt{45}-3\sqrt{80}+\sqrt{125}$

$$A=2\sqrt{5}-6\sqrt{5}-12\sqrt{5}+5\sqrt{5}=-11\sqrt{5}.$$

b) Ta có: $B=\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-5}.\left(\sqrt{3}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+2\right).\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$$B=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}-5+1+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{15}+5-1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-1}.\left(2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$B=\frac{2\sqrt{15}}{2\sqrt{3}-1}.\frac{6-\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$B=\frac{10\sqrt{3}.\left(6-\sqrt{3}\right)}{15\left(2\sqrt{3}-1\right)}=\frac{2\left(6\sqrt{3}-3\right)}{3\left(2\sqrt{3}-1\right)}=\frac{2.3.\left(2\sqrt{3}-1\right)}{3.\left(2\sqrt{3}-1\right)}=2$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức: $R=\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Giải

Tìm cách giải. Nhận xét thấy rằng, mẫu thức chứa biểu thức căn "chồng chất". Do vậy trước khi thực hiện rút gọn, chúng ta nên khai căn "chồng chất" trước đã. Quan sát thấy, để biến đổi căn "chồng chất" này, chúng ta chỉ cần làm xuất hiện $2\sqrt{5}$.

Do vậy chúng ta có hai hướng biến đổi nhằm xuất hiện yêu cầu đó:

Cách 1. Mỗi phân thức nhân cả tử và mẫu với $\sqrt{2}$.

Cách 2. Nhân hai vế với $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Trình bày lời giải

Cách 1. Mỗi phân thức nhân cả tử và mẫu với $\sqrt{2}$, ta được:

$$R=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

$$R=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}+1}+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

$$R=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{3+\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{3-\sqrt{5}}$$

$$R=\frac{\left(3\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(3\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

$$R=\frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{10}+3\sqrt{10}-5\sqrt{2}+9\sqrt{2}+3\sqrt{10}-3\sqrt{10}-5\sqrt{2}}{9-5}$$

$$R=\frac{8\sqrt{2}}{4}=2\sqrt{2}.$$

Cách 2. Nhân hai vế với $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ta được:

$$R.\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{3-\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

$$R.\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+1}+\frac{3-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}+1}$$

$$R.\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}+\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=2$$

Suy ra: $R=2\sqrt{2}$.

Ví dụ 5: Cho biểu thức: $A=\left(\frac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}\right):\left(2-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $A=-6$.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2014 – 2015)

Giải

Tìm cách giải. Khi rút gọn biểu thức chứa căn thức, chú ý các bước:

- Xác định điều kiện để biểu thức có nghĩa.
- Vận dụng các quy tắc của phép tính về phân thức, phép tính về căn thức để đưa biểu thức về dạng đơn giản nhất.

Trình bày lời giải

a) TXĐ: $x\ge 0;\ x\ne 1;\ x\ne 4$.

$$A=\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(3\sqrt{x}+7\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$

$$A=\left(\frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$

$$A=\left(\frac{2\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}=\left(2-\frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-1}.\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

$$A=\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2}.$$

b) $A=-6\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2}=-6\Leftrightarrow\sqrt{x}-9=-6\left(\sqrt{x}-2\right)$

$7\sqrt{x}=21\Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy để $A=-6$ thì $x=9$.

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức:

$$P=\left(\frac{\sqrt{a-2}+2}{3}\right).\left(\frac{\sqrt{a-2}}{3+\sqrt{a-2}}+\frac{a+7}{11-a}\right):\left(\frac{3\sqrt{a-2}+1}{a-3\sqrt{a-2}-2}-\frac{1}{\sqrt{a-2}}\right).$$

Giải

Tìm cách giải. Bài toán có nhiều thành phần giống nhau, chúng ta nên đổi biến bằng cách đặt $\sqrt{a-2}=x$. Sau đó rút gọn biểu thức với biến *x*.

Trình bày lời giải

Đặt $\sqrt{a-2}=x$, biểu thức có dạng:

$$P=\left(\frac{x+2}{3}\right).\left(\frac{x}{3+x}+\frac{x^2+2+7}{11-\left(x^2+2\right)}\right):\left(\frac{3x+1}{x^2-3x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$P=\frac{x+2}{3}\left(\frac{x}{3+x}+\frac{x^2+9}{9-x^2}\right):\frac{3x+1-\left(x-3\right)}{x\left(x-3\right)}$$

$$P=\frac{x+2}{3}.\frac{x\left(3-x\right)+x^2+9}{\left(3+x\right)\left(3-x\right)}:\frac{2x+4}{x\left(x-3\right)}$$

$$P=\frac{x+2}{3}.\frac{3x+9}{\left(3+x\right)\left(3-x\right)}.\frac{x\left(x-3\right)}{2\left(x+2\right)}$$

$$P=\frac{\left(x+2\right).3\left(x+3\right).x\left(x-3\right)}{3\left(3+x\right).\left(3-x\right)2\left(x+2\right)}$$

$P=\frac{-x}{2}$. Vậy $P=\frac{-\sqrt{a-2}}{2}$.

Ví dụ 7: Cho các số dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện $xyz=100$.

Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+10}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{10\sqrt{z}}{\sqrt{xz}+10\sqrt{z}+10}$$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát giả thiết và kết luận, chúng ta nhận thấy giữa số 100 và số 10 có liên quan tới nhau: $10=\sqrt{100}=\sqrt{xyz}$. Do vậy, suy luận tự nhiên chúng ta thay 10 ở biểu thức bằng $\sqrt{xyz}$ và biến đổi tiếp.

Trình bày lời giải

Thay $10=\sqrt{100}=\sqrt{xyz}$ vào biểu thức *A*, ta có:

$$A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{xyz}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{\sqrt{xyz}.\sqrt{z}}{\sqrt{zx}+\sqrt{xyz}.\sqrt{z}+\sqrt{xyz}}$$

$$A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(\sqrt{y+1}+\sqrt{yz}\right)}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{\sqrt{zx}.\sqrt{yz}}{\sqrt{zx}\left(1+\sqrt{yz}+\sqrt{y}\right)}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{y}+1+\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{\sqrt{yz}}{1+\sqrt{yz}+\sqrt{y}}$$

$$A=\frac{1+\sqrt{y}+\sqrt{yz}}{\sqrt{y}+1+\sqrt{yz}}=1.$$

Ví dụ 8: Tính giá trị biểu thức:

a) $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$;

b) $T=\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{13}}+...+\frac{1}{\sqrt{3022}+\sqrt{3025}}$.

Giải

Tìm cách giải. Bài toán này không thể quy đồng mẫu thức để thực hiện. Quan sát bài toán ta nhận thấy mỗi biểu thức là một dãy các phân thức viết theo quy luật. Mặt khác quan sát các thành phần trong căn ta có: $2-1=3-2=...=3025-3024(=1)$ ở biểu thức *A*, còn ở biểu thức *B* là: $7-4=10-7=...=3025-3022\ (=3)$. Do vậy, chúng ta nghĩ tới việc trục căn thức ở mẫu nhằm đưa về mẫu thức chung là lẽ tự nhiên.

Trình bày lời giải

a) $A=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+...+\dfrac{\sqrt{2015}-\sqrt{2014}}{2015-2014}=\sqrt{2015}-1$.

b) $T=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{4}}{7-4}+\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{7}}{10-7}+\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{10}}{13-10}+...+\dfrac{\sqrt{3025}-\sqrt{3022}}{3025-3022}$

$=\dfrac{\sqrt{3025}-\sqrt{4}}{3}=\dfrac{55-2}{3}=\dfrac{53}{3}$.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}}+...+\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}}>\frac{9}{4}.$$

Giải

Tìm cách giải. Thoáng nhìn qua bài toán cũng có quy luật như ví dụ trên. Song thực hiện tương tự ngay thì không thành công bởi chúng không khử liên tiếp được. Vẫn định hướng đó, chúng ta nghĩ tới kĩ thuật làm trội để sau khi trục căn thức có thể khử liên tiếp được. Do vậy, chúng ta có hai cách giải sau:

Trình bày lời giải

Cách 1. Đặt $A=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}}$

và $B=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}$

- Ta có: $A>B\Rightarrow 2A>A+B$
- Xét $A+B=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{11}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}$

$\Leftrightarrow A+B=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{3-1}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{9-7}+...+\dfrac{\sqrt{101}-\sqrt{99}}{101-99}$

$\Leftrightarrow A+B=\dfrac{\sqrt{101}-\sqrt{1}}{2}>\dfrac{\sqrt{100}-1}{2}=\dfrac{9}{2}$.

Mà $2A>A+B\Rightarrow 2A>\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow A>\dfrac{9}{4}$. Điều phải chứng minh.

Cách 2. Ta có: $A>\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}}+\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}}+...\dfrac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{101}}$

$\Rightarrow A>\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{5-1}+\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{9-5}+\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{9}}{11-9}+...+\dfrac{\sqrt{101}-\sqrt{97}}{101-97}$

$A > \dfrac{\sqrt{101}-\sqrt{1}}{4} > \dfrac{\sqrt{100}-1}{4} = \dfrac{9}{4}$. Điều phải chứng minh.

C. Bài tập vận dụng

3.1. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$;

b) $\dfrac{15}{\sqrt{10}-\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}+\sqrt{80}}$;

c) $\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2}\left(2+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}$

$$= \dfrac{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}{(4-5)(1-2)} = \left(2-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{2}\right).$$

b) $\dfrac{15}{\sqrt{10}-2\sqrt{5}+2\sqrt{10}+\sqrt{5}+4\sqrt{5}} = \dfrac{15}{3\sqrt{10}+3\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$

$$= \dfrac{5\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)}{10-5} = \sqrt{10}-\sqrt{5}.$$

c) $\dfrac{2\sqrt{10}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2-7} = \dfrac{2\sqrt{10}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{7+2\sqrt{10}-7} = \sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$.

3.2. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \dfrac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$;

b) $B = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $A = \dfrac{3-2}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{1}{3-\sqrt{6}+\sqrt{6}+2} = \dfrac{1}{5}$.

b) Ta có: $B = \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} : \left(\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{6}} + \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{6}}\right)$

$$B = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{6}} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}}\right)$$

$$B=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}:\left(\frac{\left(\sqrt{3}+1\right).\sqrt{3}-4+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}}\right)$$

$$B=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}:\frac{3+\sqrt{3}-4+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}}$$

$$B=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}:\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

3.3. Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $P=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{5}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}-\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2\sqrt{5}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

$$P=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{5}+\sqrt{5}+1}-\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}$$

$$P=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{3\sqrt{5}+1}-\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{3\sqrt{5}-1}$$

$$P=\frac{\left(3\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\left(3\sqrt{5}-1\right)-\left(3\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)\left(3\sqrt{5}+1\right)}{\left(3\sqrt{5}-1\right)\left(3\sqrt{5}+1\right)}$$

$$P=\frac{9\sqrt{10}-3\sqrt{2}+15\sqrt{2}-\sqrt{10}-9\sqrt{10}-3\sqrt{2}+15\sqrt{2}+\sqrt{10}}{45-1}$$

$$P=\frac{24\sqrt{2}}{44}=\frac{6\sqrt{2}}{11}.$$

3.4. Thực hiện phép tính:

a) $A=\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\sqrt{175}-2\sqrt{2}$;

b) $B=\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $A=\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{8-7}+5\sqrt{7}-2\sqrt{2}=\sqrt{8}-\sqrt{7}+5\sqrt{7}-2\sqrt{2}$.

$A=4\sqrt{7}$

b) $B=\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{9-12\sqrt{2}+8}}-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{9+12\sqrt{2}+8}}=\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}}-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2}}$

$$B=\sqrt{\frac{1}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{1}{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}-\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow B=\frac{\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1}=2.$$

3.5. Rút gọn biểu thức: $B=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$B=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(2-\sqrt{6}\right)}{4-6}+\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right).\sqrt{6}}{2.6}.\frac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{6}\right)+\sqrt{3}\left(2-\sqrt{6}\right)}{4-6}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-2+\sqrt{6}}{-2}+\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right).\sqrt{6}}{2.6}.\frac{\sqrt{3}.4}{-2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B=\frac{-\sqrt{2}-2+\sqrt{6}}{-2}+\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right).3\sqrt{2}}{-6}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{2}+\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2-\sqrt{2}}{2}$$

$B=0$.

3.6. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ b) $T=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $A=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2-\left(2+\sqrt{3}\right)}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\left(2-\sqrt{3}\right)}$

$$A=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

$$A=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$$

$$A=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\sqrt{2}.$$

b) Ta có: $T=\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4-3}}+\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}}$

$S=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}$

$S=4$.

3.7. Cho $A=\frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)}}$ và $B=\frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}}$. Tính A^3-B^3.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Gia Lai, năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}=\frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}+1}=\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{25-5}$

$$A=\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{20}=\frac{10+2\sqrt{5}}{20}=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

Ta có: $B=\frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4-\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}{25-5}$

$$B=\frac{15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{20}=\frac{10-2\sqrt{5}}{20}=\frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Suy ra: $A-B=\frac{5+\sqrt{5}}{10}-\frac{5-\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}$; $A.B=\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{10.10}=\frac{1}{5}$.

Ta có: $A^3-B^3=\left(A-B\right)^3+3AB\left(A-B\right)=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3+3.\frac{1}{5}.\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{25}$.

3.8. Xác định a, b biết: $\frac{13}{3\sqrt{7}+\sqrt{11}}+\frac{17}{4\sqrt{7}+2\sqrt{11}}=a\sqrt{7}+b\sqrt{11}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét vế trái: $\frac{13\left(3\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)}{9.7-11}+\frac{17.\left(4\sqrt{7}-2\sqrt{11}\right)}{16.7-4.11}$

$$=\frac{13\left(3\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)}{52}+\frac{17\left(4\sqrt{7}-2\sqrt{11}\right)}{4.17}$$

$$=\frac{3\sqrt{7}-\sqrt{11}}{4}+\frac{4\sqrt{7}-2\sqrt{11}}{4}=\frac{7}{4}.\sqrt{7}-\frac{3}{4}.\sqrt{11}.$$

Đồng nhất hai vế ta được: $a=\frac{7}{4};b=-\frac{3}{4}$.

3.9. Cho $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\sqrt{2}$. Với $|x|<1;\ x\neq 0$.

Chứng minh rằng $\frac{x-1}{x+1}=12\sqrt{2}-17$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2}{1+x-(1-x)}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{2x}=\sqrt{2}$

ĐKXĐ: $x\neq 0$

$\Leftrightarrow\frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x}=\sqrt{2}\Leftrightarrow 1+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}.x$

$\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}.x-1.$

Bình phương hai vế, ta được: $1-x^2=2x^2-2\sqrt{2}.x+1\Leftrightarrow 3x^2-2\sqrt{2}x=0$.

Vì $x\neq 0$ nên $3x-2\sqrt{2}=0\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Xét $\frac{x-1}{x+1}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}-1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}+1}=\frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}+3}=\frac{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2}{8-9}=\frac{8-12\sqrt{2}+9}{-1}=12\sqrt{2}-17$.

Điều phải chứng minh.

3.10. Tính giá trị biểu thức $M=x^5-6x^3+x$ tại $x=\frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $x=\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)}{8-1}=\frac{7\sqrt{2}+7}{7}=\sqrt{2}+1$

$\Rightarrow x=\sqrt{2}+1\Rightarrow x^2=3+2\sqrt{2}$

Ta có: $x^3=x.x^2=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)=5\sqrt{2}+7$

$x^5 = x^2.x^3 = \left(3+2\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+7\right) = 29\sqrt{2}+41$

Thay vào biểu thức *M* ta có:

$M = 29\sqrt{2}+41-6\left(5\sqrt{2}+7\right)+\sqrt{2}+1 \Rightarrow M = 0$.

3.11. Cho biểu thức: $M = \dfrac{2}{3}.\left[\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right].\dfrac{2020}{x+1}$

a) Rút gọn *M;*

b) Tìm giá trị lớn nhất của *M.*

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $M = \dfrac{2}{3}.\left[\dfrac{3}{3+\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}+\dfrac{3}{3+\left(2\sqrt{x}-1\right)^2}\right].\dfrac{2020}{x+1}$

$M = \dfrac{2}{3}.\left[\dfrac{3}{3+4x+4\sqrt{x}+1}+\dfrac{3}{3+4x-4\sqrt{x}+1}\right].\dfrac{2020}{x+1}$

$M = \dfrac{2}{3}.\left[\dfrac{3}{4x+4\sqrt{x}+4}+\dfrac{3}{4x-4\sqrt{x}+4}\right].\dfrac{2020}{x+1}$

$M = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4}.\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x}+1}\right).\dfrac{2020}{x+1}$

$M = \dfrac{1}{2}.\dfrac{x-\sqrt{x}+1+x+\sqrt{x}+1}{\left(x+1\right)^2-x}.\dfrac{2020}{x+1}$

$M = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2x+2}{x^2+x+1}.\dfrac{2020}{x+1}$

$M = \dfrac{2020}{x^2+x+1}$. TXĐ: $x \geq 0$.

b) Ta có: $x^2+x+1 \geq 1$. Vì $x \geq 0$

nên $M = \dfrac{2020}{x^2+x+1} \leq \dfrac{2020}{1} = 2020$.

Vậy giá trị lớn nhất của *M* là 2020 khi $x = 0$.

3.12. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{2\sqrt{x}+3}{3x-6\sqrt{x}}$ $\left(x>0; x\neq 4\right)$

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A = 2\sqrt{x} - 1$.

(Tuyển sinh lớp 10 chuyên, ĐHSP, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2015 – 2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $A = \dfrac{2\left(2\sqrt{x}+1\right)+3\left(\sqrt{x}-2\right)-5\sqrt{x}+7}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)} \cdot \dfrac{3x-6\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3}$

$$A = \frac{4\sqrt{x}+2+3\sqrt{x}-6-5\sqrt{x}+7}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)} \cdot \frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{2\sqrt{x}+3}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)} \cdot \frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$$

b) $A = 2\sqrt{x-1} \Rightarrow \dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right) = 3\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 4x - 3\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(4\sqrt{x}+1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$, thuộc tập xác định.

Vậy với $x = 1$ thì $A = 2\sqrt{x} - 1$.

3.13. Cho các số dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện $xyz = 4$.

Đặt: $P = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+2} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \dfrac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx}+2\sqrt{z}+2}$. Tính $\sqrt{P}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Thay $2 = \sqrt{4} = \sqrt{xyz}$ vào biểu thức P, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{xyz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{\sqrt{xyz}.\sqrt{z}}{\sqrt{zx}+\sqrt{xyz}.\sqrt{z}+\sqrt{xyz}}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+1+\sqrt{yz}\right)} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{\sqrt{zx}.\sqrt{yz}}{\sqrt{zx}\left(1+\sqrt{yz}+\sqrt{y}\right)}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{y}+1+\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+1} + \frac{\sqrt{yz}}{1+\sqrt{yz}+\sqrt{y}}$$

$$P = \frac{1+\sqrt{y}+\sqrt{yz}}{\sqrt{y}+1+\sqrt{yz}} = 1 \Rightarrow \sqrt{P} = 1.$$

3.14. Cho biểu thức $P=\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1}+\frac{\sqrt{n+1}+3}{\sqrt{n+1}-3}-\frac{n-\sqrt{n+1}+7}{n-2\sqrt{n+1}-2}$ với $n\in\mathbb{N};n\neq 8$.

a) Rút gọn biểu thức: $Q=\frac{P}{n+3\sqrt{n+1}+1}$ với $n\in\mathbb{N};n\neq 8$.

b) Tìm tất cả các giá trị $n\left(n\in\mathbb{N};n\neq 8\right)$ sao cho P là số nguyên tố.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP. Đà Nẵng, năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $\sqrt{n+1}=x$ khi đó biểu thức P có dạng:

$$P=\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+3}{x-3}+\frac{x^2-x+6}{x^2-2x-3}$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)+(x+1)(x+3)-x^2+x-6}{(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-4x+3+x^2+4x+3-x^2+x-6}{(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2+x}{(x+1)(x-3)}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-3)}=\frac{x}{x-3}.$$

a) Do đó $Q=\frac{x}{x-3}:\left(x^2+3x\right)=\frac{x}{x-3}.\frac{1}{x(x+3)}=\frac{1}{x^2-9}$

Suy ra $Q=\frac{1}{n+1-9}=\frac{1}{n-8}$.

Theo câu a, ta có $P=\frac{x}{x-3}$ nên $P=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-3}$

$P=1+\frac{3}{\sqrt{n+1}-3}$, P là số nguyên tố nên P phải là số nguyên dương.

$\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{n+1}-3}\in\mathbb{N}\Rightarrow\sqrt{n+1}-3\in$ Ư(3)

$\sqrt{n+1}-3$	1	3
$\sqrt{n+1}$	4	6
n	15	35

Thử lại, với $n=15$ thì $P=4$ là hợp số (loại);

với $n=35$ thì $P=2$ là số nguyên tố (thỏa mãn)

Vậy với $n = 35$ thì $P = 2$ là số nguyên tố.

3.15. Cho $x, y, z > 0$ và khác nhau đôi một. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào vị trí của các biến.

$$P = \frac{x}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)} + \frac{y}{\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)} + \frac{z}{\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{z}-\sqrt{y}\right)}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $P = \dfrac{x\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right) - y\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right) + z\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)}$

$$P = \frac{x\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right) - y\sqrt{x} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x} - z\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)}$$

$$P = \frac{x\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right) + \sqrt{x}\left(z-y\right) + \sqrt{yz}\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)}$$

$$P = \frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)}$$

$\Rightarrow P = 1$. Vậy biểu thức P không phụ thuộc vào vị trí của các biến.

3.16. Cho biểu thức: $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}\right).\dfrac{\sqrt{x^3y}}{x+y} - \dfrac{2y}{x-y}$

Chứng minh rằng P luôn nhận giá trị nguyên với mọi x, y thỏa mãn điều kiện: $x > 0,\ y > 0$ và $x \neq y$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $P = \left[\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} + \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}\right].\dfrac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \dfrac{2y}{x-y}$

$$P = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{xy}\left(x-y\right)}.\frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$P = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y + x + 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{xy}\left(x-y\right)}.\frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$P=\frac{2\left(x+y\right)}{\sqrt{xy}\left(x-y\right)}.\frac{x\sqrt{xy}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}$$

$P=\frac{2x}{x-y}-\frac{2y}{x-y}=2$. Điều phải chứng minh.

3.17. Cho biểu thức: $P=\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right):\left(\frac{3}{\sqrt{x}-1}+\frac{2\sqrt{x}+5}{1-x}\right)$

a) Rút gọn biểu thức *P*.

b) Tính giá trị của *P* khi $x=\frac{8}{3-\sqrt{5}}$.

c) Tìm *x* để *P* có giá trị là số tự nhiên.

d) Tìm *x* để $P<-1$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $P=\frac{2x+1-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}:\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)-2\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$$P=\frac{2x+1-x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$P=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-2}$$

$P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. ĐKXĐ: $x\ge 0$ và $x\ne 4$.

b) $x=\frac{8\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5}=6+2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}+1\right)^2\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{5}+1$ thuộc TXĐ.

Thay vào biểu thức *P*, ta có:

$$P=\frac{\sqrt{5}+1+1}{\sqrt{5}+1-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\frac{7+3\sqrt{5}}{4}.$$

c) Ta có: $P=1+\frac{3}{\sqrt{x}-2}$. Để *P* có giá trị là số tự nhiên thì $\sqrt{x}-2\in \text{U}\left(3\right)$ và $x>2$,

Từ đó ta có bảng giá trị sau:

$\sqrt{x}-2$	1	3
$\sqrt{x}$	3	5

x	9	25

Kết hợp với tập xác định, với $x \in \{9;25\}$ thì P nhận giá trị là số tự nhiên.

d) $P < -1 \Leftrightarrow P+1<0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+1<0 \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}<0$

$\Rightarrow 2\sqrt{x}-1$ và $\sqrt{x}-2$ khác dấu.

Mặt khác, ta có $\sqrt{x}-2<\sqrt{x}-1\le 2\sqrt{x}-1$

Do đó: $\begin{cases}\sqrt{x}-2<0\\ 2\sqrt{x}-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<4\\ x>\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Kết hợp với tập xác định, ta có: $S=\left\{x/\dfrac{1}{4}<x<4\right\}$ thì $P<-1$.

3.18. Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x}}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}$.

Với $x>0,\ y>0,\ x\ne y$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$P=\frac{x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}-y\sqrt{y}+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{y}.\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right).\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}$$

$$P=\frac{3x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$P=\frac{3\sqrt{x}\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}+\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$P=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{3\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=3.$$

3.19. Chứng minh rằng nếu $a,\ b,\ c$ là các số dương thỏa mãn $a+c=2b$ thì ta luôn có:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết, suy ra $a-b=b-c$

Xét vế trái: $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}+\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{a-b}$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{a-\dfrac{a+c}{2}}=\frac{2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)}{a-c}=\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}.$$

Vế trái = Vế phải. Điều phải chứng minh.

3.20. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2011 – 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Cách 1. Đặt $A=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$

Đặt $B=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

- Ta có: $A>B\Rightarrow 2A>A+B$
- Xét $A+B=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

$$\Leftrightarrow A+B=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{5-4}+...+\frac{\sqrt{81}-\sqrt{80}}{81-80}$$

$$\Leftrightarrow A+B=\sqrt{81}-\sqrt{1}=8$$

Mà $2A>A+B\Rightarrow 2A>8\Rightarrow A>4$. Điều phải chứng minh.

Cách 2. Ta có: $A>\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$

$$\Rightarrow A>\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{3-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+...+\frac{\sqrt{81}-\sqrt{79}}{81-79}$$

$A>\dfrac{\sqrt{81}-\sqrt{1}}{2}=4$. Điều phải chứng minh.

3.21. Cho dãy số $a_1;a_2;...;a_n$ thỏa mãn $a_1=1$ và $a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}+a_n}{1-\sqrt{3}.a_n}$ với $n=1;2;3...$. Tính a_{2020}.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $a_{n+2}=\dfrac{\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}+a_n}{1-\sqrt{3}a_n}}{1-\dfrac{\sqrt{3}.\left(\sqrt{3}+a_n\right)}{1-\sqrt{3}a_n}}=\dfrac{\sqrt{3}-3a_n+\sqrt{3}+a_n}{1-\sqrt{3}a_n-3-\sqrt{3}a_n}$

$\Rightarrow a_{n+2}=\dfrac{2\sqrt{3}-2a_n}{-2-2\sqrt{3}a_n}=\dfrac{\sqrt{3}-a_n}{-1-\sqrt{3}a_n}$.

Ta có: $a_{n+3}=\dfrac{\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}-a_n}{-1-\sqrt{3}a_n}}{1-\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-a_n\right)}{-1-\sqrt{3}a_n}}=\dfrac{-\sqrt{3}-3a_n+\sqrt{3}-a_n}{-1-\sqrt{3}a_n-3+\sqrt{3}a_n}$

$\Rightarrow a_{n+3}=\dfrac{-4a_n}{-4}=a_n$.

Từ đó suy ra $a_1=a_4=a_7=...=a_{2020}$. Vậy $a_{2020}=1$.

3.22. Cho số thực $a>0$ thỏa mãn $a-\dfrac{1}{a}=\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Chứng minh rằng: $a-\dfrac{1}{a}=\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)$

$\Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{1}{a}}=1 \Leftrightarrow a-\sqrt{a}-1=0 \Leftrightarrow a-\sqrt{a}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{4}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sqrt{a}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$

Nhận xét: Vì $\sqrt{a}>0$ nên $\sqrt{a}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ loại, suy ra $\sqrt{a}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Xét $a+\sqrt{\dfrac{1}{a}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\dfrac{\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt{5}$

Từ đó ta có: $a-\dfrac{1}{a}=\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{5}$. Điều phải chứng minh.

Chuyên đề 4. CĂN BẬC BA, CĂN BẬC n

A. Kiến thức cần nhớ

1. Căn bậc ba

a) Định nghĩa: Căn bậc ba của một số *a*, kí hiệu $\sqrt[3]{a}$, là số *x* sao cho $x^3 = a$

• Cho $a \in \mathbb{R}, \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$

• Mỗi số thực *a* đều có duy nhất một căn bậc ba.

• Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$

• Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$

• Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$

b) Tính chất

• $a < 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

• $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$

• $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}(b \neq 0)$

c) Các phép biến đổi căn bậc ba

• $A\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3B}$

• $\sqrt[3]{A^3B} = A\sqrt[3]{B}$

• $\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{1}{B}\sqrt[3]{AB^2}\ (B \neq 0)$

• $\dfrac{1}{\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{A \pm B}(A \mp B)$

2. Căn bậc n

a) Định nghĩa: Cho $a \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$. Căn bậc *n* của *a* là một số mà lũy thừa bậc *n* của nó bằng *a*.

• *Trường hợp n lẻ* $(n = 2k+1;\ k \in \mathbb{N})$

Mỗi số thực *a* đều có một căn bậc lẻ duy nhất: $\sqrt[2k+1]{a} = x \Leftrightarrow x^{2k+1} = a$

Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[2k+1]{a} > 0$

Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[2k+1]{a} = 0$

Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[2k+1]{a} < 0$

• *Trường hợp 11 chẵn* $(n=2k;\ k\in\mathbb{N})$

Mỗi số thực $a>0$ đều có hai căn bậc chẵn đối nhau. Căn bậc chẵn dương kí hiệu là $\sqrt[2k]{a}$ (gọi là căn bậc $2k$ số học của a), căn bậc chẵn âm kí hiệu là $-\sqrt[2k]{a}$

$\sqrt[2k]{a}=x\Leftrightarrow x\ge 0$ và $x^{2k}=a$

$-\sqrt[2k]{a}=x\Leftrightarrow x\le 0$ và $x^{2k}=a$

Mọi số $a<0$ đều không có căn bậc chẵn.

b) Tính chất của căn bậc n $(n\in\mathbb{N};n\ge 2.)$

$\sqrt[n]{A^m}=\sqrt[nk]{A^{mk}}\quad (1)\left(A\ge 0,k,m\in\mathbb{N}^*\right)$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[mn]{A}\quad (2)\left(A\ge 0,m\in\mathbb{N},m\ge 2\right)$

$\sqrt[n]{AB}=\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}\quad (3)\left(A\ge 0,B\ge 0\right)$

$\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\quad (4)\left(A\ge 0,B>0\right)$

$\left(\sqrt[n]{A}\right)^m=\sqrt[n]{A^m}\quad (5)\left(A>0,m\in\mathbb{N}^*\right)$

Ứng dụng:

- Công thức (1) dùng để hạ bậc một căn thức hoặc quy đồng chỉ số các căn thức.

- Công thức (2) dùng để khai căn một căn thức.

- Công thức (3) dùng để khai căn một tích, nhân các căn thức cùng chỉ số, để đưa một thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn.

- Công thức (4) dùng để khai căn một thương và chia các căn thức cùng chỉ số, để khử mẫu của biểu thức lấy căn.

- Công thức (5) dùng để nâng một căn thức lên một lũy thừa.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt[3]{54}:\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}.\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}$

Giải

Tìm cách giải. Để thực hiện phép tính nhân căn bậc 3 ta sử dụng tính chất $\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{A.B}$

Trình bày lời giải

a) $\sqrt[3]{54}:\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{54:2}=\sqrt[3]{27}=3$

b) $\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}.\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}=\sqrt[3]{\left(8+\sqrt{37}\right)\left(8-\sqrt{37}\right)}$

$=\sqrt[3]{64-37}=\sqrt[3]{27}=3$

Ví dụ 2: Rút gọn $A=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$

Giải

Tìm cách giải. Để rút gọn biểu thức có dạng $\sqrt[3]{a\pm b\sqrt{c}}$ ta viết biểu thức dưới dạng: $\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\pm y\right)^3}$, ta chú ý tới hằng đẳng thức:

$$\left(\sqrt{x}\pm y\right)^3=x\sqrt{x}\pm 3xy+3y^2\sqrt{x}\pm y^3$$

Do vậy ta xác định x và y thông qua $3xy+y^3=a;\ x+3y^2=b$, nhưng lưu ý $x=c$ chẳng hạn $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$ ta chọn x và y theo $3xy+y^3=26;\ x+3y^2=15$ và $x=3$ suy ra: $y=2$.

Trình bày lời giải:

Ta có: $A=\sqrt[3]{8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}}$

$A=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$

Ví dụ 3: Rút gọn $B=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$

Giải

Tìm cách giải. Bài này thú vị và khó hơn ví dụ trước, không thể đưa về dạng $\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\pm y\right)^3}$. Do đó, để tính giá trị biểu thức có dạng $B=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$ chúng ta nghĩ tới việc lập phương hai vế và sử dụng hằng đẳng thức $\left(x+y\right)^3=x^3+y^3+3xy\left(x+y\right)$ sau đó phân tích đa thức thành nhân tử rồi tìm B.

Trình bày lời giải

Áp dụng hằng đẳng thức $\left(a+b\right)^3=a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)$ ta có:

$B^3 = 1 + \frac{\sqrt{84}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{3} + 3.\sqrt[3]{\left(1 + \frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{84}}{9}\right)}.B$

$B^3 = 2 + 3B.\sqrt[3]{1 - \frac{84}{81}} = 2 - B$

$B^3 + B - 2 = 0 \Leftrightarrow (B-1)\left(B^2 + B + 2\right) = 0$ mà $B^2 + B + 2 > 0$

Suy ra $B = 1$.

Ví dụ 4: Hãy tính giá trị biểu thức: $Q = \left(3x^3 - x^2 - 1\right)^{2020}$, biết:

$$x = \frac{\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}.\left(2 - \sqrt{3}\right)}{\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}}$$

Giải

Tìm cách giải. Bản chất của bài toán là rút gọn *x*. Quan sát biểu thức *x*, chúng ta nhận thấy trước hết cần rút gọn căn bậc ba ở tử thức và mẫu thức trước. Bằng kỹ thuật của hai ví dụ trên, chúng ta biến đổi $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$ bằng cách đưa về hằng đẳng thức lũy thừa bậc ba; đồng thời đặt $a = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$ và xác định *a*. Sau đó xác định *x*.

Trình bày lời giải

Xét $a = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$

$\Leftrightarrow a^3 = 9 + \sqrt{80} + 9 - \sqrt{80} + 3.\sqrt[3]{\left(9 + \sqrt{80}\right)\left(9 - \sqrt{80}\right)}.a$

$\Leftrightarrow a^3 = 18 + 3.\sqrt[3]{81 - 80}.a$

$\Leftrightarrow a^3 = 18 + 3a \Leftrightarrow a^3 - 3a - 18 = 0$

$\Leftrightarrow a^3 - 27 - 3a + 9 = 0 \Leftrightarrow (a-3)\left(a^2 + 3a + 6\right) = 0$

Ta có $a^2 + 3a + 6 = \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ nên $a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3$

Do đó $x = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3} + 18 + 12\sqrt{3} + 8}.\left(2 - \sqrt{3}\right)}{3} = \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3} + 2\right)^3}\left(2 - \sqrt{3}\right)}{3}$

$x = \frac{\left(\sqrt{3} + 2\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)}{3} = \frac{4 - 3}{3} = \frac{1}{3}$

Vậy $Q = \left(3.\frac{1}{27} - \frac{1}{9} - 1\right)^{2020} = (-1)^{2020} = 1$

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức: $Q=\sqrt[10]{\frac{1}{2}\left(19+6\sqrt{10}\right)}.\sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy rằng đây là nhân hai căn thức không cùng bậc. Do vậy chúng ta cần phải đưa về cùng bậc. Dễ thấy $10=5.2,$ do vậy chúng ta có thể đưa căn bậc 10 về căn bậc 5 dựa theo công thức: $\sqrt[10]{A^2}=\sqrt[5]{|A|}.$ Với cách suy luận đó, chúng ta biến đổi $\frac{1}{2}\left(19+6\sqrt{10}\right)$ về dạng bình phương của một biểu thức

Trình bày lời giải

Ta có $Q=\sqrt[10]{\frac{1}{4}\left(38+12\sqrt{10}\right)}.\sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$

$$Q=\sqrt[10]{\frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)^2}.\sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$$

$$Q=\sqrt[5]{\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)}.\sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=\sqrt[5]{\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)}$$

$$Q=\sqrt[5]{\frac{1}{2}(18-20)}=\sqrt[5]{-1}=-1$$

Ví dụ 6: Tính giá trị biểu thức: $T=\left(\frac{\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt[4]{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}\right)^2-\frac{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{2}}$

Giải

Tìm cách giải. Bài toán này có nhiều yếu tố giống nhau, do vậy chúng ta có thể đặt biến mới nhằm đưa về bài toán đơn giản hơn. Với cách suy luận ấy chúng ta đặt $\sqrt[4]{2}=a$ (căn nhỏ nhất) thì $a^4=2;\sqrt[4]{4}=a^2=\sqrt{2}.$ Từ đó chúng ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Đặt $\sqrt[4]{2}=a$ thì $a^4=2;\sqrt[4]{4}=a^2=\sqrt{2}.$

Khi đó $T=\left(\frac{a^2-a}{1-a}+\frac{1+a^2}{a}\right)^2-\frac{\sqrt{1+\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^4}}}{1+a^2}$

$$\Rightarrow T=\left(\frac{1+a^2}{a}-a\right)^2-\frac{a^2+1}{a^2\left(1+a^2\right)}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2}=0$$

Vậy $T=0$

C. Bài tập vận dụng

4.1. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}}+\dfrac{x+8}{10-x}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$

a) Rút gọn biểu thức *P*.

b) Tính giá trị của *P* khi $x=\sqrt[4]{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Thanh Hóa, năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $\sqrt{x-1}=a$ biểu thức *P* có dạng:

$$P=\left(\frac{a}{3+a}+\frac{a^2+9}{9-a^2}\right):\left(\frac{3a+1}{a^2-3a}-\frac{1}{a}\right)$$

$$P=\frac{a(3-a)+a^2+9}{(3+a)(3-a)}:\frac{3a+1-(a+3)}{a(a-3)}$$

$$P=\frac{3a-a^2+a^2+9}{(3+a)(3-a)}:\frac{3a+1-a+3}{a(a-3)}$$

$$P=\frac{3a+9}{(3+a)(3-a)}.\frac{2a+4}{a(a-3)}$$

$$P=\frac{3(a+3)}{(3+a)(3-a)}.\frac{a(a-3)}{2(a+2)}$$

$$P=\frac{-3a}{2(a+2)}$$

Vậy $P=\dfrac{-3\sqrt{x-1}}{2\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$

b) Ta có: $x=\sqrt[4]{\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}-\sqrt[4]{\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$

$$x=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2-1}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1}}=\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=2$$

Vậy $P=\dfrac{-3\sqrt{2-1}}{2\left(\sqrt{2-1}+2\right)}=\dfrac{-3}{2.3}=\dfrac{-1}{2}$

4.2. Tính giá trị của biểu thức

a) $B=\left(x^3+12x-9\right)^{2020}$, biết $x=\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}+1\right)}-\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}-1\right)}$

b) $C=x^3+ax+b,$ biết $x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Xét $x^3=4\left(\sqrt{5}+1\right)-4\left(\sqrt{5}-1\right)-3.\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}+1\right).4\left(\sqrt{5}-1\right)}.x$

$x^3=8-12x\Rightarrow x^3+12x-9=1$

Vậy $B=1^{2020}=1$

b) Xét $x^3=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{b^3}{27}}-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{b^3}{27}}+3.\sqrt[3]{\left(-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}\right)\left(-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}\right)}.x$

$x^3=-b+3\sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27}}.x$

$x^3=-b-ax\Rightarrow x^3+ax+b=0$

Vậy $C=0$

4.3. Hãy tính giá trị của biểu thức: $P=x^3+3x+2$ với $x=\sqrt[3]{\sqrt{2-1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2-1}}}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$

Xét $x^3=\sqrt{2}-1-\left(\sqrt{2}+1\right)-3.\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}.x$

$x^3=-2-3x\Rightarrow x^3+3x+2=0$

Vậy $P=0$

4.4. Hãy tính giá trị của biểu thức: $T=\left(3x^3+8x-2\right)^{2020}$, biết

$$x=\frac{\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}.\left(\sqrt{5}+2\right)$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $x=\frac{\sqrt[3]{5\sqrt{5}-30+12\sqrt{5}-8}}{\sqrt{5}+\sqrt{9-6\sqrt{5}+5}}.\left(\sqrt{5}+2\right)$

$$x=\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-2\right)^3}}{\sqrt{5}+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}}.\left(\sqrt{5}+2\right)=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}.\left(\sqrt{5}+2\right)$$

$$x=\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3}$$

Suy ra $T=\left(3.\frac{1}{27}+8.\frac{1}{9}-2\right)^{2020}=\left(-1\right)^{2020}=1$

4.5. Cho *x, y* thỏa mãn $x=\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=x^4+x^3y+3x^2+xy-2y^2+1$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $x^3=y-\sqrt{y^2+1}+y+\sqrt{y^2+1}+3.\sqrt[3]{\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)}.x$

$$x^3=2y+3.\sqrt[3]{y^2-y^2-1}.x$$
$$x^3=2y-3x\Rightarrow x^3+3x-2y=0(*)$$

Ta có
$$A=x^4+3x^2-2xy+x^3y+3xy-2y^2+1$$
$$A=x\left(x^3+3x-2y\right)+y\left(x^3+3x-2y\right)+1$$

Kết hợp với (*) suy ra $A=1$

4.6. Tính giá tri biểu thức $P=\left(x^2+4x-2\right)^{2013}$, với $x=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$

(Tuyển sinh lớp 10, chuyên Bắc Ninh, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$x=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt[3]{3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1}}{\sqrt{20+4\sqrt{5}+1}+3}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right).\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}}{\sqrt{\left(2\sqrt{5}+1\right)^2}+3}$$

Ta có $x=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right).\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{5}+1+3}=\dfrac{3-1}{2\sqrt{5}+4}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{1}$

$$\Leftrightarrow x+2=\sqrt{5}\Rightarrow x^2+4x+4=5\Rightarrow x^2+4x=1$$

Vậy $P=\left(1-2\right)^{2013}=-1$

4.7. Cho $a>0;a\neq 1$. Rút gọn biểu thức:

$$S=\sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\left(a+3\right)\sqrt{a}-3a-1}:\left[\frac{a-1}{2\sqrt{a}-2}-1\right]$$

(Tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có

$$S=\sqrt{4-4\sqrt{2}+2}.\sqrt[3]{8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{a\sqrt{a}-3a+3\sqrt{a}-1}:\left[\frac{\sqrt{a}+1}{2}-1\right]$$

$$S=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}.\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{a}-1\right)^3}:\frac{\sqrt{a}+1-2}{2}$$

$$S=\left(2-\sqrt{2}\right).\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{a}-1\right).\frac{2}{\sqrt{a}-1}$$

$$S=4-2+2=4$$

4.8. Tính giá trị biểu thức: $P=\dfrac{a^3-3a+2}{a^3-4a^2+5a-2}$ biết:

$$a=\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}+\sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}.$$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Phú Thọ, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $a^3=55+\sqrt{3024}+55-\sqrt{3024}+3\sqrt[3]{\left(55+\sqrt{3024}\right)\left(55-\sqrt{3024}\right)}.a$

$$a^3=110+3.\sqrt[3]{3025-3024}.a\Leftrightarrow a^3-3a-110=0$$

$$\Leftrightarrow a^3-125-3a+15=0$$

$$\Leftrightarrow (a-5)\left(a^2+5a+25\right)-3(a-5)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-5)\left(a^2+5a+22\right)=0$$

Nhận xét: $a^2+5a+22=\left(a+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{63}{4}>0$ nên $a-5=0\Rightarrow a=5$

Từ đó suy ra $P=\dfrac{5^3-3.5+2}{5^3-4.5^2+5.5-2}=\dfrac{112}{48}=\dfrac{7}{3}$

4.9. Rút gọn biểu thức: $T=\left(\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}-\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}\right).\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $T=\left(\sqrt[4]{4+4\sqrt{3}+3}-\sqrt[4]{4\left(4-4\sqrt{3}+3\right)}\right).\sqrt[4]{4+4\sqrt{3}+3}-\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}$

$$T=\left(\sqrt[4]{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt[4]{4\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\right).\sqrt[4]{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}$$

$$T=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)}\right).\sqrt{2+\sqrt{3}}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

$$T=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

$$T=2+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}=2$$

4.10. Tính giá trị của biểu thức: $M=\dfrac{10}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}.\left[\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}:\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}-1}\right]$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $M=\dfrac{10\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}.\left[\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}.\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+1}\right]$

$$M=\frac{10\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{3+2}.\left[\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}.\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+1}\right]$$

$$M=2\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right).\frac{2-1}{3-1}$$

$$M=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$$

4.11. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}}$

b) $\dfrac{15}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{16}}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}{4-3}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$

b) $\dfrac{15}{\sqrt[4]{2}(1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8})}=\dfrac{15.\sqrt[4]{8}\left(1-\sqrt[4]{2}\right)}{\sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{8}\left(1-\sqrt[4]{2}\right)\left(1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}\right)}$

$$=\frac{15\left(\sqrt[4]{8}-2\right)}{2(1-2)}=\frac{15\left(2-\sqrt[4]{8}\right)}{2}$$

4.12. Làm phép tính:

a) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}.\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$

b) $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

c) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}.\sqrt[6]{44+16\sqrt{6}}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}.\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}.\sqrt[6]{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}.\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[3]{2-1}=1$

b) $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[6]{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}.\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}.\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{4-5}=-1$

c) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}.\sqrt[6]{44+16\sqrt{6}}=\sqrt[3]{2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}.\sqrt[6]{\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt[3]{2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}$
$=\sqrt[3]{4.3-16.2}=\sqrt[3]{-20}=-\sqrt[3]{20}$

4.13. Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$Q=\left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}.\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}\right]:\left[\frac{a-1}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}+1\right]$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$\frac{1}{2}\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}.\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\sqrt{2}+12+12\sqrt{2}+8}.\sqrt{4-4\sqrt{2}+2}$
$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+2\right)^3}.\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+2\right)\left(2-\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}(4-2)=1$

Ta có: $\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}=\sqrt[3]{a\sqrt{a}-3a+3\sqrt{a}-1}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{a}-1\right)^3}=\sqrt{a}-1$

Ta có: $\frac{a-1}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}+1=\frac{\sqrt{a}-1}{2}+1=\frac{\sqrt{a}+1}{2}$

Suy ra $Q=\left(1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-1\right)\right):\frac{\sqrt{a}+1}{2}$

$Q=\frac{\sqrt{a}+1}{2}:\frac{\sqrt{a}+1}{2}=1$

4.14. Chứng minh rằng nếu $ax^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ thì:

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $ax^3=by^2=cz^3=k$, suy ra $a=\frac{k}{x^3};b=\frac{k}{y^3};c=\frac{k}{z^3}$,

Xét $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{k}{x^3}x^2+\frac{k}{y^3}y^2+\frac{k}{z^3}z^2}$

$=\sqrt[3]{\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z}}=\sqrt[3]{k\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=\sqrt[3]{k}\,(1)$

Xét $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{\frac{k}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{y^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{z^3}}$

$=\frac{\sqrt[3]{k}}{x}+\frac{\sqrt[3]{k}}{y}+\frac{\sqrt[3]{k}}{z}=\sqrt[3]{k}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{k}\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

4.15. Chứng minh rằng nếu: $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$ thì:

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$, bình phương 2 vế, ta có:

$x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}+2\sqrt{\left(x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}\right)\left(y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)}=a^2$

$\Leftrightarrow x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}+2\sqrt{x^2y^2+\sqrt[3]{x^4y^8}+\sqrt[3]{x^8y^4}+x^2y^2}=a^2$

$\Leftrightarrow x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}+2\sqrt{\sqrt[3]{x^8y^4}+2x^2y^2+\sqrt[3]{x^4y^8}}=a^2$

$\Leftrightarrow x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}+2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)^2}=a^2$

$\Leftrightarrow x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}+2\left(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)=a^2$

$\Leftrightarrow x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2=a^2$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3=a^2\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$

Điều phải chứng minh

4.16. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\left(\frac{\sqrt[4]{2020^2}-\sqrt[4]{2020}}{1-\sqrt[4]{2020}}+\frac{1+\sqrt{2020}}{\sqrt[4]{2020}}\right)^2-\frac{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{2020}}+\frac{1}{2020}}}{1+\sqrt{2020}}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\left(\dfrac{\sqrt[4]{2020}\left(\sqrt[4]{2020}-1\right)}{1-\sqrt[4]{2020}}+\dfrac{1+\sqrt{2020}}{\sqrt[4]{2020}}\right)^2-\dfrac{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2020}}\right)^2}}{1+\sqrt{2020}}$

$$A=\left(-\sqrt[4]{2020}+\frac{1+\sqrt[4]{2020}}{\sqrt[4]{2020}}\right)^2-\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2020}}}{1+\sqrt{2020}}$$

$$A=\left(\frac{-\sqrt{2020}+1+\sqrt[4]{2020}}{\sqrt[4]{2020}}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{2020}+1\right):\sqrt{2020}}{1+\sqrt{2020}}$$

$$A=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2020}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{2020}}=\frac{1}{\sqrt{2020}}-\frac{1}{\sqrt{2020}}=0$$

4.17. Cho $x=1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$. Tính giá trị biểu thức:

$$P=\left(x^3-3x^2\ -6x-3\right)^{1945}+2020$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $x\left(\sqrt[3]{3}-1\right)=\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)=3-1=2$

$x\sqrt[3]{3}=x+2\Rightarrow 3x^3=x^3+6x^2+12x+8\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=4$

Suy ra $P=1^{1915}+2020=2021$

4.18. Rút gọn biểu thức:

$$A=\left(\sqrt{\sqrt{3}+2-\sqrt{31-21\sqrt{3}}}-\sqrt{3}\right):\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $\sqrt{\sqrt{3}+2-\sqrt{31-21\sqrt{3}}}-\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt{3}+2-\sqrt{\left(3\sqrt{3}-2\right)^2}}-\sqrt{3}$

$=\sqrt{\sqrt{3}+2-3\sqrt{3}+2}-\sqrt{3}=-1$

Ta có: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}$

$=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$

Do đó $A=\dfrac{-1}{2}$

Chuyên đề 5. BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI

A. Kiến thức cần nhớ

Trong các bài toán về bất đẳng thức và cực trị thì bất đẳng thức Cô-si được ví như viên kim cương bởi tính ưu việt trong việc chứng minh các bất đẳng thức khác cũng như tìm cực trị. Trong chương trình THCS chủ yếu là vận dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm. Do vậy trong chuyên đề này sẽ chỉ nêu ứng dụng trong việc giải các bài toán bằng việc vận dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm.

• Bất đẳng thức Cô-si: cho hai số *x, y* không âm, ta có:

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ hoặc $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $x = y$.

Bất đẳng thức Cô-si còn được gọi là bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân (AM-GM).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số dương *a, b, c,* ta có:

$$4a + 3b + 5c \geq 2\left(\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 3\sqrt{ca}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Gia Lai, năm học 2007-2008)

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy vế phải xuất hiện $\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 3\sqrt{ca}$, do vậy rất tự nhiên chúng ta nghĩ tới việc dùng bất đẳng thức Cô-si. Vấn đề còn lại là tách vế trái thành những hạng tử thích hợp nhằm khi vận dụng bất đẳng thức Cô-si thì lần lượt xuất hiện các hạng tử vế phải.

Trình bày lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (1)$$
$$2b + 2c \geq 4\sqrt{bc} \quad (2)$$
$$3a + 3c \geq 6\sqrt{ca} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế ta được:

$$4a + 3b + 5c \geq 2\left(\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 3\sqrt{ca}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 2: Cho $S = \sqrt{1.2019} + \sqrt{3.2017} + \sqrt{5.2015} + \ldots + \sqrt{2019.1}$. So sánh S với 1010^2

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy các hạng tử trong tổng S, thì $1 + 2019 = 3 + 2017 = \ldots = 2019 + 1$ và bằng 2.1010. Nhằm xuất hiện tổng giống nhau đó và cũng liên quan tới số 1010, chúng ta nghĩ tới việc vận dụng bất đẳng thức Cô-si dạng $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$

Trình bày lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$

Suy ra $S < \dfrac{1+2019}{2} + \dfrac{3+2017}{2} + \dfrac{5+2015}{2} + \ldots + \dfrac{2019+1}{2}$

$\Leftrightarrow S < 1010 + 1010 + 1010 + \ldots + 1010 \Leftrightarrow S < 1010^2$

Ví dụ 3: Cho a, b, c là các số lớn hơn 1. Chứng minh: $\dfrac{a^2}{b-1} + \dfrac{b^2}{c-1} + \dfrac{c^2}{a-1} \ge 12$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy vế phải là tổng ba hạng tử dương có chứa mẫu số, còn vế trái là một số thực. Do vậy chúng ta cần chọn một hạng tử thích hợp để khi vận dụng bất đẳng thức Cô-si khử mẫu các hạng tử vế trái, chẳng hạn:

$\dfrac{a^2}{b-1} + \alpha(b-1) \ge 2.\sqrt{\dfrac{a^2}{b-1}.\alpha(b-1)} = 4a\sqrt{\alpha}$, và

chọn $\alpha = 4$!

Trình bày lời giải

Áp dụng bất đẳng thức cô-si; ta có:

$$\dfrac{a^2}{b-1} + 4(b-1) \ge 2.\sqrt{\dfrac{a^2}{b-1}.4(b-1)} = 4a \quad (1)$$
$$\dfrac{b^2}{c-1} + 4(c-1) \ge 2.\sqrt{\dfrac{b^2}{c-1}.4(c-1)} = 4b \quad (2)$$
$$\dfrac{c^2}{a-1} + 4(a-1) \ge 2.\sqrt{\dfrac{c^2}{a-1}.4(a-1)} = 4c \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế ta được:

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{a-1}+4(a+b+c-3)\ge 4(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{a-1}\ge 12$$

Điều phải chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{a^2}{b-1}=4(b-1)\\ \dfrac{b^2}{c-1}=4(c-1)\\ \dfrac{c^2}{a-1}=4(a-1)\end{cases} \Leftrightarrow a=b=2$

Ví dụ 4: Cho *a, b* là số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2\le 2,$ hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=a\sqrt{3b(a+2b)}+b\sqrt{3a(b+2a)}.$

Giải

Tìm cách giải. Giả thiết là điều kiện liên quan các biến với số mũ 2, còn biểu thức *M* phần biến có chứa căn. Nhằm biến đổi từ biểu thức chứa căn tới biểu thức không có căn và có số mũ 2, chúng ta cần áp dụng bất đẳng thức Cô-si dạng $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$ và $xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$

Trình bày lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt{3b(a+2b)}\le\frac{3b+a+2b}{2}=\frac{a+5b}{2}(1)$$
$$\sqrt{3a(b+2a)}\le\frac{3a+b+2a}{2}=\frac{5a+b}{2}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $M\le\frac{a(a+5b)}{2}+\frac{b(5a+b)}{2}$

$$\Rightarrow M\le\frac{a^2+b^2+10ab}{2}\le\frac{a^2+b^2+5(a^2+b^2)}{2}=3(a^2+b^2)$$
$$\Rightarrow M\le 3(a^2+b^2)\le 3.2\Rightarrow M\le 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=1.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức *M* là 6 khi $a=b=1.$

Ví dụ 5: Cho hai số thực dương *x, y* thỏa mãn: $\frac{4}{x}+\frac{5}{y}\ge 23.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$B=8x+\frac{6}{x}+18y+\frac{7}{y}$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát cả giả thiết và kết luận, hiển nhiên chúng ta cần tách phần biểu thức *B* có xuất hiện bộ phận của giả thiết để khai thác. Phần còn lại cứ cùng biến ta nhóm với nhau để vận dụng bất đẳng thức Cô-si.

Trình bày lời giải

Ta có: $B=\left(8x+\frac{2}{x}\right)+\left(18y+\frac{2}{y}\right)+\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{y}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được:

$8x+\frac{2}{x}\ge 2\sqrt{8x.\frac{2}{x}}=8(1)$

$18y+\frac{2}{y}\ge 2\sqrt{18y.\frac{2}{y}}=12(2)$

Mặt khác từ giả thiết ta có $\frac{4}{x}+\frac{5}{y}\ge 23\ (3)$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế ta được:

$B\ge 8+12+23=43$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}8x=\frac{2}{x}\\18y=\frac{2}{y}\\\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=23\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2};y=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của *B* là 43 khi $x=\frac{1}{2};y=\frac{1}{3}$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng: $21\left(a+\frac{1}{b}\right)+3\left(b+\frac{1}{a}\right)\ge 80$ với $a\ge 3;b\ge 3.$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải

Tìm cách giải. Thoáng nhìn qua, chúng ta nghĩ ngay tới việc dùng bất đẳng thức Cô-si. Tuy nhiên sẽ là sai lầm nếu chúng ta nhóm và dùng bất đẳng thức Cô-si như sau:

$$21a+\frac{21}{b}+3b+\frac{3}{a}=\left(21a+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{21}{b}+3b\right)\ge 2\sqrt{21a.\frac{3}{a}}+\sqrt{\frac{21}{b}.3b}=12\sqrt{7}$$

Sai lầm thứ nhất là $12\sqrt{7}<80,$ sai lầm thứ hai là không đúng với điều kiện $a\ge 3; b\ge 3.$

Do vậy chúng ta cần tách và chọn các hạng tử thích hợp. Trước hết dự đoán dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức khi $a=3$ và $b=3.$ Sau đó chọn điểm rơi để khử mẫu ở vế trái như sau:

- $ma+\frac{3}{a}\ge\sqrt{ma.\frac{3}{a}}=2\sqrt{3m},$ xác định m bằng cách cho $ma=\frac{3}{a}$ và $a=3$ suy ra $m=\frac{1}{3}.$ Từ đó ta có cách tách $21a=\frac{62a}{3}+\frac{a}{3}$

- $nb+\frac{21}{b}\ge 2\sqrt{nb.\frac{21}{b}}=2\sqrt{21n},$ xác định n bằng cách cho $nb=\frac{21}{b}$ và $b=3$ suy ra $n=\frac{7}{3}.$ Từ đó ta có cách tách $3b=\frac{2b}{3}+\frac{7b}{3}$

Trình bày lời giải

Ta có vế trái $\left(\frac{7}{3}b+\frac{21}{b}\right)+\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)+\frac{2}{3}b+\frac{62}{3}a$

Áp dụng bất đẳng thức Cô -si, ta có:

$$\frac{7}{3}b+\frac{21}{b}\ge 2\sqrt{\frac{7}{3}b.\frac{21}{b}}=14$$
$$\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{3}.\frac{3}{b}}=2$$

Mà $a\ge 3; b\ge 3$ nên $21\left(a+\frac{1}{b}\right)+3\left(b+\frac{1}{a}\right)\ge 14+2+\frac{2}{3}.3+\frac{62}{3}.3=80$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=3$

Ví dụ 7: Cho *x; y; z* là các số dương

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}>2$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $x+y+z\ge 2\sqrt{x\left(y+z\right)}\Rightarrow\frac{1}{x\left(y+z\right)}\ge\frac{2}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y+z}} \geq \frac{2x}{x+y+z} (1)$$

Tương tự ta có: $\sqrt{\frac{y}{x+z}} \geq \frac{2y}{x+y+z} (2)$

$$\sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z} (3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế theo vế, ta được $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq 2$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = y+z \\ y = z+x \\ z = x+y \end{cases}$ cộng lại ta có $x+y+z=0$

Điều này không xảy ra vì $x, y, z > 0$

Ví dụ 8: Cho các số thực *x; y; z* thỏa mãn:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2} = \frac{3}{2}$$

Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Hà Tĩnh, năm học 2005 – 2006)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán không có bóng dáng của bất đẳng thức hay cực trị đại số. Tuy nhiên quan sát kỹ phần kết luận (các phần biến có mũ 2), phần giả thiết có căn bậc hai và chỉ cần áp dụng bất đẳng thức Cô-si một lần cho mỗi hạng tử cũng xuất hiện phần biến mũ 2. Với suy luận tự nhiên như vậy bất đẳng thức Cô-si cho lời giải đẹp.

Trình bày lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$x\sqrt{1-y^2} \leq \frac{x^2+1-y^2}{2} (1)$$

$$y\sqrt{1-z^2} \leq \frac{y^2+1-z^2}{2} (2)$$

$$z\sqrt{1-x^2} = \frac{z^2+1-x^2}{2} (3)$$

Từ (1) và (2), (3) cộng vế với vế ta được: $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-z^2}+z\sqrt{1-x^2}\le\frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x^2=1-y^2\,(4)\\y^2=1-z^2\,(5)\\z^2=1-x^2\,(6)\end{cases}$

Từ (4), (5) và (6) cộng vế với vế ta được: $x^2+y^2+z^2=3-x^2-z^2-x^2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{3}{2}$

Điều phải chứng minh

Ví dụ 9: Cho *x; y; z* là những số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Chứng minh rằng: $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\ge\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát điều kiện của biến x, y, z rất tự nhiên chúng ta thấy cần đổi biến bằng cách đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}\Rightarrow a+b+c=1.$ Khi đó bất đẳng thức có dạng $\sqrt{bc+a}+\sqrt{ac+b}+\sqrt{ab+c}\ge 1+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}.$ Nhận thấy vai trò của *a, b, c* trong bất đẳng thức là như nhau. Mặt khác $bc+a$ là lệch bậc, do vậy sử dụng dụng điều kiện $a+b+c=1$ để đưa vô cùng bậc (gọi là cân bằng bậc). Sau đó dùng bất đẳng thức Cô-si đê đánh giá đưa về hằng đẳng thức.

Trình bày cách giải

Chia hai vế của bất đẳng thức cho $\sqrt{xyz}$, khi đó bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{\frac{1}{yz}+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{xz}+\frac{1}{y}}+\sqrt{\frac{1}{yx}+\frac{1}{z}}\ge 1+\sqrt{\frac{1}{yz}}+\sqrt{\frac{1}{xz}}+\sqrt{\frac{1}{yx}}$$

Đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}\Rightarrow a+b+c=1.$

Khi đó bất đẳng thức có dạng:

$$\sqrt{bc+a}+\sqrt{ac+b}+\sqrt{ab+c}\ge 1+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{aligned}bc+a=bc+a\left(a+b+c\right)&=bc+ab+ac+a^2\\&\ge bc+2a\sqrt{bc}+a^2\end{aligned}$$

hay $bc+a\ge\left(\sqrt{bc}+a\right)^2\Rightarrow\sqrt{bc+a}\ge\sqrt{bc}+a\ \ (1)$

Tượng tự ta có:

$$\sqrt{ac+b} \ge \sqrt{ac}+b \ \ (2)$$
$$\sqrt{ba+c} \ge \sqrt{ba}+c \ \ (3)$$

Từ (1); (2) và (3) cộng vế với vế ta có:

$$\sqrt{bc+a}+\sqrt{ac+b}+\sqrt{ab+c} \ge 1+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}.$$

Hay $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy} \ge \sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

Dấu bằng khi $x=y=z=3$

C. Bài tập vận dụng

5.1. Cho *a; b; c; d* là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$a^8+b^8+2c^4+4d^2 \ge 8abcd$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$a^8+b^8 \ge 2a^4b^4 \ (1)$$
$$2a^4b^4+2c^4 \ge 4a^2b^2c^2 \ (2)$$
$$4a^2b^2c^2+4d^2 \ge 8abcd \ (3)$$

Từ các bất đẳng thức (1), (2) và (3) cộng vế với vế, ta được:

$$a^8+b^8+2c^4+4d^2 \ge 8abcd$$

Dấu bằng khi $a^2=b^2=c=d$

5.2. Cho *a; b* là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$(a+b)^2+\frac{a+b}{2} \ge 2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}$$

(Thi học sinh giỏi Toán, lớp 9, tỉnh Quãng Ngãi, năm học 2011- 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$a+b \ge 2\sqrt{ab}$$

$$a+b+\frac{1}{2}=a+\frac{1}{4}+b+\frac{1}{4} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Suy ra $(a+b)\left(a+b+\frac{1}{2}\right) \ge 2\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

Hay $(a+b)^2+\frac{a+b}{2} \ge 2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}$

Dấu bằng khi $a=b=\frac{1}{4}$

5.3. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}}\geq\frac{1}{2}$ với *a, b* là các số dương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$\sqrt{4a(3a+b)}\leq\frac{4a+3a+b}{2}(1)$

$\sqrt{4b(3b+a)}\leq\frac{4b+3b+a}{2}(2)$

Từ (1), (2) cộng vế với vế, ta được:

$\sqrt{4a(3a+b)}+\sqrt{4b(3b+a)}\leq 4a+4b$

$\Rightarrow\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}\leq 2a+2b$

Suy ra $\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}}\geq\frac{a+b}{2a+2b}=\frac{1}{2}$

Dấu bằng khi $a=b$

5.4. Cho $S=\frac{1}{\sqrt{1.2019}}+\frac{1}{\sqrt{2.2018}}+...+\frac{1}{\sqrt{k(2019-k+1)}}+...+\frac{1}{\sqrt{2019.1}}$

Hãy so sánh *S* và $2.\frac{2019}{2020}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với $x;y>0$ ta có:

$x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}\geq\frac{2}{x+y}$

Từ đó suy ra $S>\frac{1}{1+2019}+\frac{1}{2+2018}+...+\frac{1}{k+2019-k+1}+...+\frac{1}{2019+1}$

Hay $S>2.\frac{2019}{2020}$. Điều phải chứng minh

5.5. Cho *a, b, c, d* dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c}}>2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$a+b+c+d \geq 2\sqrt{a(b+c+d)}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a(b+c+d)}} \geq \dfrac{2}{a+b+c+d} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}} \geq \dfrac{2a}{a+b+c+d} (1)$

Tương tự ta có:

$\sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}} \geq \dfrac{2b}{a+b+c+d} (2)$

$\sqrt{\dfrac{c}{d+a+b}} \geq \dfrac{2c}{a+b+c+d} (3)$

$\sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}} \geq \dfrac{2d}{a+b+c+d} (4)$

Từ các bất đẳng thức (1), (2), (3) và (4) cộng vế với vế, ta được điều phải chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=b+c+d \\ b=a+c+d \\ c=a+b+d \\ d=a+b+c \end{cases}$ cộng lại ta có $a+b+c+d=0$

Điều này không xảy ra vì $a,b,c,d>0$

5.6. Cho $a \geq 2;\ b \geq 3; c \geq 4.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{ab\sqrt{c-4}+bc\sqrt{a-2}+ca\sqrt{b-3}}{abc}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $P=\dfrac{\sqrt{c-4}}{c}+\dfrac{\sqrt{a-2}}{a}+\dfrac{\sqrt{b-3}}{b}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$\sqrt{(c-4)4} \leq \dfrac{c-4+4}{2}=\dfrac{c}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{c-4}}{2} \leq \dfrac{1}{4} (1)$

$\sqrt{(a-2).2} \leq \dfrac{a-2+2}{2}=\dfrac{a}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a-2}}{c} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} (2)$

$\sqrt{(b-3).3} \leq \dfrac{b-3+3}{2}=\dfrac{b}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{b-3}}{c} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{3}} (3)$

Từ các bất đẳng thức (1), (2), (3) cộng vế với vế, ta được:

$P \leq \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} c-4=4 \\ a-2=2 \\ b-3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=6 \\ c=8 \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}$ khi $(a;b;c)=(4;6;8)$

5.7. Với *a, b, c* là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$Q=\sqrt{2a+bc}+\sqrt{2b+ca}+\sqrt{2c+ab}$

(Tuyển sinh vào lớp 10, THPT TP. Hà Nội. năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$\sqrt{2a+bc}=\sqrt{(a+b+c)a+bc}=\sqrt{a^2+ab+ac+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)}$

$\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\frac{a+b+a+c}{2}=\frac{2a+b+c}{2}$

Suy ra $\sqrt{2a+bc}\le\frac{2a+b+c}{2}(1)$

Chứng minh tương tự ta có:

$\sqrt{2b+ca}\le\frac{a+2b+c}{2}(2)$

$\sqrt{2c+ab}\le\frac{a+b+2c}{2}(3)$

Từ (1), (2) và (2) cộng vế với vế, ta được:

$Q\le 2(a+b+c)=2.2=4$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của Q khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

5.8. Cho các số *a, b, c* đều lớn hơn $\frac{25}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$Q=\frac{a}{2\sqrt{b}-5}+\frac{b}{2\sqrt{c}-5}+\frac{c}{2\sqrt{a}-5}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{a}{2\sqrt{b}-5}+\left(2\sqrt{b}-5\right)\geq 2\sqrt{\frac{a}{2\sqrt{b}-5}.\left(2\sqrt{b}-5\right)}=2\sqrt{a}\,(1)$$

$$\frac{b}{2\sqrt{c}-5}+\left(2\sqrt{bc}-5\right)\geq 2\sqrt{\frac{b}{2\sqrt{c}-5}\left(2\sqrt{c}-5\right)}=2\sqrt{b}\,(2)$$

$$\frac{c}{2\sqrt{a}-5}+\left(2\sqrt{a}-5\right)\geq 2\sqrt{\frac{c}{2\sqrt{a}-5}.\left(2\sqrt{a}-5\right)}=2\sqrt{c}\,(3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế, ta được:

$$\frac{a}{2\sqrt{b}-5}+\frac{b}{2\sqrt{c}-5}+\frac{c}{2\sqrt{a}-5}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}+2\sqrt{a}-15\geq 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}$$

$$\frac{a}{2\sqrt{b}-5}+\frac{b}{2\sqrt{c}-5}+\frac{c}{2\sqrt{a}-5}\geq 15\Leftrightarrow Q\geq 15$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{a}{2\sqrt{b}-5}=2\sqrt{b}-5\\ \dfrac{b}{2\sqrt{c}-5}=2\sqrt{c}-5\\ \dfrac{c}{2\sqrt{a}-5}=2\sqrt{a}-5\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=25$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 15 khi $a=b=c=25$

5.9. Cho $x; y$ là các số dương thỏa mãn $x+y\leq 2.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=xy+\dfrac{10}{xy}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $T=xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{9}{xy}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$xy+\frac{1}{xy}\geq 2\sqrt{xy.\frac{1}{xy}}=2$$

$$\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}\leq\frac{2}{2}=1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}\geq 1\Rightarrow\frac{1}{xy}\geq 1$$

Từ đó suy ra: $T\geq 2+\dfrac{9}{1}=11$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 11 khi $x=y=1$

5.10. Cho a, b, c, d là các số thực dương có tổng bằng 1.

Chứng minh: $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+d}+\dfrac{d^2}{d+a}\ge \dfrac{1}{2}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Thanh Hóa, năm học 2007-2008)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{a+b}.\frac{a+b}{4}}=a\left(1\right)$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{b^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge b\left(2\right);\frac{c^2}{c+d}+\frac{c+d}{4}\ge c\left(3\right);\frac{d^2}{d+a}+\frac{d+a}{4}\ge d\left(4\right)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) cộng vế với vế, ta được:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}+\frac{a+b+c+d}{2}\ge a+b+c+d$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\ge \frac{a+b+c+d}{2}=\frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$

5.11. Cho các số thực dương *a, b* thỏa mãn $ab>2013a+2014b$.

Chứng minh rằng: $a+b>\left(\sqrt{2013}+\sqrt{2014}\right)^2$.

(Tuyển sinh lớp 10, chuyên toán ĐHSP Hà Nội, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết suy ra:

$$1>\frac{2013}{b}+\frac{2014}{a}\Leftrightarrow (a+b)>\left(\frac{2013}{b}+\frac{2014}{a}\right)\left(a+b\right)$$

$$\Leftrightarrow a+b>2013+\frac{2013a}{b}+\frac{2014b}{a}+2014\left(1\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{2013a}{b}+\frac{2014b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{2013a}{b}.\frac{2014b}{a}}$$

Kết hợp với (1) suy ra:

$$a+b>2013+2\sqrt{2013.2014}+2014\Rightarrow a+b>\left(2013+2014\right)^2$$

Điều phải chứng minh

5.12. Cho $P=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{1+\sqrt{2^2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2+\sqrt{3^2}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{3+\sqrt{4^2}}+...+\frac{\sqrt{2020}-\sqrt{2019}}{2019+\sqrt{2020^2}}$

So sánh P với $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho mẫu số ta có:

$$P<\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2\sqrt{1.2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2.3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3.4}}+...+\frac{\sqrt{2020}-\sqrt{2019}}{2\sqrt{2019.2020}}$$

$$P<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{2019}}-\frac{1}{\sqrt{2020}}\right)$$

$$P<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2020}}\right)<\frac{1}{2}.$$

Vậy $P<\frac{1}{2}$

5.13. Cho tam giác *ABC* có chu vi bằng 1. Cạnh *a, b, c* thỏa mãn:

$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}=\frac{3}{2}$. Chứng minh tam giác *ABC* đều.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hà Tĩnh, năm học 2012- 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo giả thiết

$$\left(\frac{a}{1-a}+1\right)+\left(\frac{b}{1-b}+1\right)+\left(\frac{c}{1-c}+1\right)=\frac{3}{2}+3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}=\frac{9}{2}(*)$$

Do *a, b, c* là ba cạnh của tam giác có chi vi bằng 1 nên

$0<a<1;0<b<1;0<c<1$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{9(1-a)}{4}\ge 2\sqrt{\frac{1}{1-a}.\frac{9(1-a)}{4}}=3(1)$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{1-c}+\frac{9(1-b)}{4}\ge 3(2)$$

$$\frac{1}{1-c}+\frac{9(1-c)}{4}\ge 3(3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế, ta được:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{9}{4}(1-a+1-b+1-c)\ge 9$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{9}{4}.2\ge 9$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\ge \frac{9}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{1-a}=\dfrac{9(1-a)}{4}\\ \dfrac{1}{1-b}=\dfrac{9(1-b)}{4}\\ \dfrac{1}{1-c}=\dfrac{9(1-c)}{4}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Vậy tam giác ABC là tam giác đều

5.14. Cho $x;\ y;\ z$ là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$4(xy+yz+zx)\le\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi vế phải, ta được:

$$\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)$$
$$=(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(z+x)}+(z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$(y+z)(z+x)=yz+xy+z^2+xz$$
$$\ge z^2+2z\sqrt{xy}+xy$$

$$\Leftrightarrow (y+z)(z+x)\ge\left(z+\sqrt{xy}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(y+z)(z+x)}\ge z+\sqrt{xy}$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{(x+y)(z+x)}\ge x+\sqrt{yz};\sqrt{(x+y)(y+z)}\ge y+\sqrt{xz}$$

Từ đó suy ra:

$$VP\ge(x+y)\left(z+\sqrt{xy}\right)+(z+y)\left(x+\sqrt{yz}\right)+(x+z)\left(y+\sqrt{xz}\right)$$

$$\Leftrightarrow VP\ge(x+y)\sqrt{xy}+(z+y)\sqrt{zy}+(x+z)\sqrt{xz}+2(xy+yz+zx)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$

$z+y\ge 2\sqrt{zy}$

$z+x\ge 2\sqrt{zx}$

Từ đó suy ra

$$4(xy+yz+zx)\le\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$

5.15. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}$

(thi học sinh giỏi lớp 9, TP. Hà Nội, năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương ta có:

$$a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow a^2-ab+b^2\ge 2ab\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\le\frac{1}{\sqrt{ab}}(1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}\le\frac{1}{\sqrt{bc}}(2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}\le\frac{1}{\sqrt{ca}}(3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế, ta được: $P\le\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}(4)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3(5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $P\le 3.$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 khi $a=b=c=1$

5.16. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1(*)$

Chứng minh rằng: $(a-1)(b-1)(c-1)\le\frac{1}{8}(a+1)(b+1)(c+1)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có (*) $\Leftrightarrow 1+\frac{1}{c}=1-\frac{1}{a}+1-\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{c+1}{c}=\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}$

Từ $a,b,c>0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$

Suy ra $a,b,c>1$ hay $a-1>0;b-1>0;c-1>0$

Ta có: $\frac{c+1}{c}=\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{(a-1)(b-1)}{ab}}\,(1)$

Tương tự:

$$\frac{b+1}{b}=\frac{c-1}{c}+\frac{a-1}{a}\ge 2\sqrt{\frac{(c-1)(a-1)}{ca}}\,(2)$$

$$\frac{a+1}{a}=\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}\ge 2\sqrt{\frac{(b-1)(c-1)}{bc}}\,(3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{(c+1)}{c}.\frac{(a+1)}{a}.\frac{(b+1)}{b}\ge 2\sqrt{\frac{(a-1)(b-1)}{ab}}.2\sqrt{\frac{(c-1)(a-1)}{ca}}.1\sqrt{\frac{(b-1)(c-1)}{bc}}$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1)\ge 8(a-1)(b-1)(c-1)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1)\le\frac{1}{8}(a+1)(b+1)(c+1)$$

Điều phải chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=3$

5.17. Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^2+xy}\le\frac{3}{2}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Vì *x, y, z* dương, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương ta có:

$$2x^2\sqrt{yz}\le x^4+yz\Leftrightarrow\frac{1}{2x^2\sqrt{yz}}\ge\frac{1}{x^4+yz}\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^4+yz}\le\frac{1}{2\sqrt{yz}}\,(1)$$

$$\frac{2}{\sqrt{yz}}\le\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{yz}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x^2}{x^4+yz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Tương tự $\frac{y^2}{y^4+xz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right);\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

$$\Rightarrow A\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}.\frac{xy+yz+zx}{xyz}(3)$$

Lại có $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2\,(4)$

Từ (3) và (4) có $A\le\frac{1}{2}.\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{1}{2}\frac{3xyz}{xyz}=\frac{3}{2}$

Điều phải chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

5.18. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\a+2b+3c\ge10\end{cases}$, chứng minh rằng: $a+b+c+\frac{3}{4a}+\frac{9}{8b}+\frac{1}{c}\ge\frac{13}{2}$

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hưng Yên, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương ta có:

$$a+\frac{1}{a}\ge2\Rightarrow\frac{3}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)\ge\frac{3}{2}$$

$$b+\frac{9}{4b}\ge2\sqrt{\frac{9}{4}}=3\Rightarrow\frac{1}{2}\left(b+\frac{9}{4b}\right)\ge\frac{3}{2}$$

$$c+\frac{4}{c}\ge2\sqrt{4}=4\Rightarrow\frac{1}{4}\left(c+\frac{4}{c}\right)\ge1$$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c+\frac{3}{4a}+\frac{9}{8b}+\frac{1}{c}\ge4(3)$$

Từ $a+2b+3c\ge10$ ta có $\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b+\frac{3}{4}c=\frac{a+2b+3c}{4}\ge\frac{5}{2}(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $a+b+c+\frac{3}{4a}+\frac{9}{8b}+\frac{1}{c}\ge\frac{13}{2}$ (Điều phải chứng minh)

Dấu bằng xảy ra khi $a=1;b=\frac{3}{2};c=2$

5.19. Cho *x, y, z* là 3 số thực dương thoả mãn $x^2+y^2+z^2=2$.

Chứng minh: $\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2}{y^2+z^2}+\frac{2}{x^2+z^2}\le\frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz}+3$

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{2}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2}=1+\frac{z^2}{x^2-y^2}\le 1+\frac{z^2}{2xy}(1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{2}{y^2+z^2}\le 1+\frac{x^2}{2yz}(2)$$

$$\frac{2}{x^2+z^2}\le 1+\frac{y^2}{2zx}(3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế, ta được:

$$\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2}{y^2+z^2}+\frac{2}{x^2+z^2}\le\frac{x^2}{2yz}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy}+3$$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2}{y^2+z^2}+\frac{2}{x^2+z^2}\le\frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz}+3$ (Điều phải chứng minh)

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{3}$

5.20. Cho *x, y* là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2+12}{x+y}+y$

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh. năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $P=\frac{x^2+12}{x+y}+y=\frac{x^2+12+xy+y^2}{x+y}=\frac{4x^2+48+4xy+4y^2}{4(x+y)}$

$$P==\frac{(x-y)^2+3(x+y)^2+48}{4(x+y)}$$

Ta có $(x-y)^2\ge 0$ và áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$3(x+y)^2+48\ge 2\sqrt{3(x+y)^2.48}=24(x+y)$$

Suy ra $P==\frac{(x-y)^2+3(x+y)^2+48}{4(x+y)}\ge\frac{24(x+y)}{4(x+y)}=6$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6 khi $x = y = 2$

5.21. Cho các số thực dương *a,b,c* thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}} + \sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}} + \sqrt{\frac{ca+2b^2}{1+ca-b^2}} \geq 2 + ab + bc + ca$$

(Tuyển sinh lớp 10, THPTchuyên, Tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2013- 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. nên ta có

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}} = \sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2+ab-c^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+ab}} = \frac{ab+2c^2}{\sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}(x, y > 0)$

$$\Rightarrow \sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)} \leq \frac{2c^2+a^2+b^2+2ab}{2} \leq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{2} = a^2+b^2+c^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}} = \frac{ab+2c^2}{\sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)}} \geq \frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2} = ab+2c^2 \ (1)$$

Tương tự $\sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}} \geq bc+2a^2 \ (2); \sqrt{\frac{ca+2b^2}{1+ca-b^2}} \geq ca+2b^2 \ (3)$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) kết hợp $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5.22. Giả sử *x, y, z* là các số thực lớn hơn 2.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{\sqrt{y+z-4}} + \frac{y}{\sqrt{z+x-4}} + \frac{z}{\sqrt{x+y-4}}$$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, ĐHKHTN, Đại học Quốc Gia Hà Nội,năm học 2015- 2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$2\sqrt{y+z-4}=\sqrt{4(y+z-4)}\le\frac{4+y+z-4}{2}=\frac{y+z}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{y+z-4}\le\frac{y+z}{4}$$

Tương tự ta có: $\sqrt{z+x-4}\le\frac{z+x}{4};\sqrt{x+y-4}\le\frac{x+y}{4}$

Do đó $P\ge\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{z+y}$

$$P\ge4\left(\frac{x^2}{xy+zx}+\frac{y^2}{yz+xy}+\frac{z^2}{zx+yz}\right)\ge4\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}$$

Mà $(x+y+z)^2\ge(xy+yz+zx)$

Suy ra $P\ge4.\frac{3}{2}=6.$ Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6 khi $x=y=z=4$

5.23. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Trần Hưng Đạo , tỉnh Bình Thuận, năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $P=\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\sqrt{8x(3y+5z)}\le\frac{8x+3y+5z}{2}\Rightarrow\sqrt{x(3y+5z)}\le\frac{8x+3y+5z}{4\sqrt{2}}$$

Tương tự a có:

$$\sqrt{y(3z+5x)}\le\frac{5x+8y+3z}{4\sqrt{2}};\sqrt{z(3x+5y)}\le\frac{3x+5y+8z}{4\sqrt{2}}$$

Do đó $P\ge\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}+\frac{4\sqrt{2}}{5x+8y+3z}+\frac{4\sqrt{2}}{3x+5y+8z}$

$$=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{8x+3y+5z}+\frac{1}{5x+8y+3z}+\frac{1}{3x+5y+8z}\right)(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ với $a,b,c>0$ ta có

$$\frac{1}{8x+3y+5z}+\frac{1}{5x+8y+3z}+\frac{1}{3x+5y+8z}\ge\frac{9}{16x+16y+16z}=\frac{9}{16.3\sqrt{2}}(2)$$

Từ (1), (2) suy ra $P\ge 4\sqrt{2}.\frac{9}{16.3\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\sqrt{2}$

5.24. Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a+2b+3}+\frac{1}{b+2c+3}+\frac{1}{c+2a+3}$$

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$a+2b+3=(a+b)+(b+1)+2\ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{b}+2>0$$

Suy ra: $\frac{1}{a+2b+3}\le\frac{1}{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1\right)}(1)$

Tương tự

$$\frac{1}{b+2c+3}\le\frac{1}{2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1\right)}(2);\frac{1}{c+2a+3}\le\frac{1}{2\left(\sqrt{ca}+\sqrt{a}+1\right)}(3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1}+\frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{a}+1}\right)$$

Vì $abc=1\Rightarrow\sqrt{abc}=1$ nên:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1}+\frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{a}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}.\sqrt{abc}+\sqrt{abc}}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1}+\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{ca}+\sqrt{a}+\sqrt{abc}}$$

$$=\frac{\sqrt{c}}{1+\sqrt{bc}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1}+\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{c}+1+\sqrt{bc}}=1$$

Do đó $P\le\frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của *P* là $\frac{1}{2}$ khi $a=b=c=1$

5.25. Cho 5 số thực không âm *a, b, c, d,e* có tổng bằng 1. Xếp 5 số này trên một đường tròn. Chứng minh luôn tồn tại một cách xếp sao cho hai số bất kì cạnh nhau có tích không lớn hơn $\frac{1}{9}$

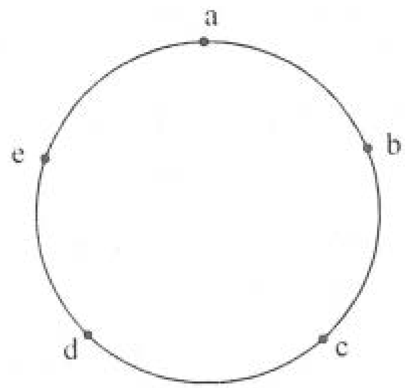
(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, TP. Hà Nội, năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Giả sử $a \ge b \ge c \ge d \ge e.$ Ta xếp 5 số như hình vẽ

Vì $ad \ge ae; bc \ge bd \ge ce.$ nên ta chỉ cần chứng minh

$ad \le \frac{1}{9}; bc \le \frac{1}{9}$



Thật vậy ta có $1 = a+b+c+d+e \ge a+3d \ge 2\sqrt{3ad}$

$\Rightarrow ad \le \frac{1}{12} < \frac{1}{9}$

$b+c = 1-a-d-e \le 1-a \le 1-\frac{b+c}{2} \Rightarrow b+c \le \frac{2}{3}$

$\Rightarrow bc \le \left(\frac{b+c}{2}\right) \le \frac{1}{9}$

Vậy luôn luôn tồn tại một cách xếp thỏa mãn đầu bài

Chuyên đề 6. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU CĂN

A. Kiến thức cần nhớ

Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn có nhiều cách giải, sau đây là một số phương pháp thường dùng:

• Nâng lên lũy thừa.

• Đặt ẩn phụ.

• Đưa về phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

• Sử dụng bất đẳng thức, đánh giá hai vế của phương trình.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}=3$

b) $\sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x-4-2\sqrt{2x-5}}=4$

c $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=5$

Giải

Tìm cách giải. Ví dụ này bản thân trong câu đều có chứa hằng đẳng thức. Nên chúng ta có thể đưa về dạng $\sqrt{(a\pm b)^2}=|a\pm b|$. Sau đó xét các khoảng để bỏ giá trị tuyệt đối để giải các phương trình.

Trình bày lời giải

a) $\sqrt{x-2-2\sqrt{x-2}+1}+\sqrt{x-2+4\sqrt{x-2}+4}=0\left(x\ge 2\right)$

$\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-2}+2\right)^2}=3$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-2}-1\right|+\sqrt{x-2}+2=3\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-2}-1\right|=1-\sqrt{x-2}$

Vì $\left|\sqrt{x-2}-1\right|=1-\sqrt{x-2}$ nên:

$\sqrt{x-2}-1\le 0\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\le 1\Leftrightarrow 0\le x-2\le 1\Leftrightarrow 2\le x\le 3$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{x/2\le x\le 3\}$

b) $\sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x-4-2\sqrt{2x-5}}=4\left(x\ge \frac{5}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5+6\sqrt{2x-5}+9}+\sqrt{2x-5-2\sqrt{2x-5}+1}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2x-5}+3)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-5}-1)^2}=4$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{2x-5}+3\right|+\left|\sqrt{2x-5}-1\right|=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5}+3+\left|\sqrt{2x-5}-1\right|=4$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{2x-5}-1\right|=1-\sqrt{2x-5}$

Nên $\sqrt{2x-5}-1\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-5}\le 1 \Leftrightarrow 0\le 2x-5\le 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\le x\le 3$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{x \mid \frac{5}{2}\le x\le 3\right\}$

c) $\sqrt{x-4+4\sqrt{x-4}+4}+\sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4}=5\left(x\ge 4\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-4}+2+\left|\sqrt{x-4}-2\right|=5$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-4}-2\right|=3-\sqrt{x-4}$

Trường hợp 1. Xét $\sqrt{x-4}\ge 2 \Leftrightarrow x\ge 8$. Phương trình có dạng:

$\sqrt{x-4}-2=3-\sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-4}=5 \Leftrightarrow \sqrt{x-4}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=10,25\left(tm\right)$

Trường hợp 2. Xét $\sqrt{x-4}\le 2 \Leftrightarrow 4\le x\le 8$.

Phương trình có dạng: $2-\sqrt{x-4}=3-\sqrt{x-4}$

Không tồn tại x.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{10,25\}$

Nhận xét. Câu b cũng có thể giải như câu c. Tuy nhiên ở đây chúng ta đã vận dụng bất đẳng thức $|A|+|B|\ge|A+B|$, đẳng thức chỉ xảy ra khi $A.B\ge 0$. Dựa vào đó câu a cũng có thể giải được như vậy.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}=3\ (1)$.

Giải

Tìm cách giải. Trước khi giải, chúng ta nên đặt điều kiện. Các biểu thức trong căn chỉ có biến là bậc nhất, nên chúng ta nâng lên lũy thừa để giảm bớt số căn.

Trình bày cách giải

Điều kiện: $-\frac{1}{3} \le x \le 2$

Với điều kiện trên phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 3 - \sqrt{2-x} \ \ge 0$

$\Leftrightarrow 3x+1 = 9 - 6\sqrt{2-x} + 2 - x$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{2-x} = 5 - 2x \ge 0$

$\Leftrightarrow 9(2-x) = 25 - 20x + 4x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{7}{4} \end{array}\right. (tm)$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1; \frac{7}{4}\right\}$

Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$

Giải

Áp dụng hằng đẳng thức: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, lập phương hai vế của phương trình, ta được:

$x + 1 + 7 - x + 3\sqrt[3]{(x+1)(7-x)}.2 = 8$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)(7-x)} = 0 \Leftrightarrow (x+1)(7-x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 7 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 7\}$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}.$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy việc nâng lên lũy thừa để khử dấu căn, ta được phương trình bậc 4, có thể giải được bằng cách phân tích đa thức thành nhân tử, song phức tạp. Bắt đầu từ $2\sqrt{2x+3}$, gợi ý cho chúng ta thêm phần thích hợp để tạo thành hằng đẳng thức, do đó rất tự nhiên ta thêm được $2x + 3 - 2\sqrt{2x+3} + 1$. Từ đó ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

TXĐ: $x \ge -\frac{3}{2}$

$x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}.$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+2x+3-2\sqrt{2x+3}+1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+\left(\sqrt{2x+3}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+3}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$ (thỏa mãn TXD)

Vậy nghiệm của phương trình $S=\{-1\}$

Ví dụ 5: Tìm tất cả các số thực $x_1;x_2;x_3;...x_{2005}$ thỏa mãn:

$\sqrt{x_1-1^2}+2\sqrt{x_2-2^2}+...+2005\sqrt{x_{2005}-2005^2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+...+x_{2005})$

(Thi học sinh giỏi lớp 9, Tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2004-2005)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán chỉ có một phương trình, có 2005 ẩn số. nên không thể giải theo cách thông thường được. Do đó chúng ta nghĩ tới việc giải phương trình bằng cách đánh giá hai vế của phương trình.

Trình bày lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si, ta có:

$K\sqrt{x-K^2}\le\frac{1}{2}\left(K^2+x-K^2\right)=\frac{1}{2}x.$ Đẳng thức xảy ra khi $x-K^2=K.$ Thay x lần lượt là $x_1;x_2;x_3;...x_{2005}$ và K lần lượt là 1, 2, 3, …, 2005, ta có:

$\sqrt{x_1-1^2}+2\sqrt{x_2-2^2}+...+2005\sqrt{x_{2005}-2005^2}\le\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+...+\frac{1}{2}x_{2005}$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $\begin{cases} x_1-1^2=1 \\ x_2-2^2=2 \\ x_{2005}-2005^2=2005 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=6 \\ x_{2005}=4022030 \end{cases}$

Ví dụ 6: giải phương trình: $x^2+2=2\sqrt{x^3+1}$

Giải

Tìm cách giải Nhận thấy $x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$ và $x^2+2=x+1+x^2-x+1,$ mặt khác lại xuất hiện $2\sqrt{x^3+1}$ nên gợi cho chúng ta dùng hằng đẳng thức để giải.

Trình bày lời giải TXĐ: $x\ge-1.$

$x^2+2=2\sqrt{x^3+1}$

$\Leftrightarrow x^2+2-2\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=0$

$\Leftrightarrow x^2-x+1-2\sqrt{(x+1)(x^2+x+1)}+x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x+1}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow x^2-x+1=x+1 \Leftrightarrow x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0; x=2$ (thỏa mãn TXĐ).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;2\}$.

Ví dụ 7: Giải phương trình $\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8.$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, tỉnh Nam định, năm học 2014-2015)

Giải

Tìm cách giải. Mới nhìn qua, bài toán này khá phức tạp. Nâng lên lũy thừa, dùng hằng đẳng thức hay đánh giá hai vế đều không khả thi. Quan sát và phân tích chúng nhận thấy $(x+6)(x-2)=x^2+4x-12$ và $x+6-(x-2)=8,$ nên bài toán có thể giải bằng phương pháp đổi biến.

Trình bày lời giải

ĐKXĐ: $x\ge 2,$ đặt $\sqrt{x+6}=a\ge 0;\ \sqrt{x-2}=b\ge 0 \Rightarrow a^2-b^2=8$ phương trình có dạng:

$(a-b)(1+ab)=a^2-b^2 \Leftrightarrow (a-b)(1+ab-a-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 1+ab-a-b=0 \end{array}\right.$

• Với $a=b,$ ta có: $\sqrt{x+6}=\sqrt{x-2}$. Phương trình vô nghiệm.

• Với $1+ab-a-b=0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+6}=1 \text{ vô nghiệm} \\ \sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow x=3(\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$

Ví dụ 8: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x-2}-\sqrt{6x-9}=16x^2-48x+35;$

b) $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}.$

Giải

Tìm cách giải. Bài toán rất phức tạp và khó tìm được đường lời giải. Bài toán không thể nâng lên lũy thừa được, bởi số mũ khá cao. Bài toán cũng không đổi biến được, bởi không có nhiều điểm giống nhau. Bài toán cũng không thể đánh giá hai vế được. Quan sát câu a, bài toán ta thử cho mỗi vế đều bằng 0 tức là

$\sqrt{2x-2}-\sqrt{6x-9}=0$ và $16x^2-48x+35=0,$ thì nhận được $x=\frac{7}{4}.$ Do vậy chúng ta dùng biểu thức liên hợp đối với vế trái để trục căn thức ở tử, khi đó bài toán sẽ giải được.

Cũng với suy nghĩ như câu a, song với kinh nghiệm đã có, trước hết ta biến đổi phương trình về dạng $\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x+3}=\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-3x-2}.$ Nhằm khi dùng biểu thức liên hợp sẽ không còn bậc hai ở tử thức.

Trình bày lời giải

a) $\sqrt{2x-2}-\sqrt{6x-9}=16x^2-48x+35;$ TXĐ: $x\ge\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-2)-(6x-9)}{\sqrt{2x-2}+\sqrt{6x-9}}=(4x-7)(4x-5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{7-4x}{\sqrt{2x-2}+\sqrt{6x-9}}-(4x-7)(4x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow (7-4x)\left[\frac{1}{\sqrt{2x-2}+\sqrt{6x-9}}+(4x-5)\right]=0$$

Nhận xét: Với $x\ge\frac{3}{2}$ ta có $4x-5>0$ nên $\frac{1}{\sqrt{2x-2}+\sqrt{6x-9}}+(4x-5)>0$

Vậy phương trình tương đương với $7-4x=0\Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$

Do đó tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\frac{7}{4}\right\}$

b) $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x+3}=\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-3x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x^2-1)-(2x^2+2x+3)}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}=\frac{(x^2-x+2)-(x^2-3x-2)}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x-4}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}-\frac{2x+4}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+4)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}\right)=0(*)$$

Nhận xét: Ta có $\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}>0$

Với x thuộc tập xác định.

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2.$

Thử lại, ta thấy $x=-2$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-2\}$

Ví dụ 9: Giải phương trình sau

$$\sqrt{13x^2-6x+10}+\sqrt{5x^2-13x+\frac{17}{2}}+\sqrt{17x^2-48x+36}=\frac{1}{2}(36x-8x^2-21)$$

Giải

Xét vế trái $T=\sqrt{13x^2-6x+10}+\sqrt{5x^2-13x+\frac{17}{2}}+\sqrt{17x^2-48x+36}$

$$=\sqrt{(3x+1)^2+(2x-3)^2}+\sqrt{\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{x^2+(4x-6)^2}$$

$$\geq \sqrt{(3x+1)^2}+\sqrt{\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2}+\sqrt{x^2}$$

Suy ra vế trái $T\geq |3x+1|+\left|2x-\frac{5}{2}\right|+|x|\geq \left|3x+1+2x-\frac{5}{2}+x\right|\geq 6x-\frac{3}{2}(1)$

Vế phải $P=\frac{1}{2}\left[12x-3-2(4x^2-12x+9)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[12x-3-2(2x-3)^2\right]\leq \frac{1}{2}(12x-3)=6x-\frac{3}{2}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra vế trái $\geq 6x-\frac{3}{2}\geq$ vế phải.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x=\frac{3}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{3}{2}$

C. Bài tập vận dụng

6.1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{x-2}=0;$

b) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=1;$

c) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1;$

d) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2;$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) DKXD: $x\ge 2$

ta có $\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{x-2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(x+1)}-\sqrt{x-2}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}.\left(\sqrt{(x+1)}-1\right)=0$

Trường hợp 1. $\sqrt{x-2}=0 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2. $\sqrt{(x+1)}-1=0 \Leftrightarrow x=0,$ không thuộc tập xác định

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$

b) Ta có: $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=1 \Leftrightarrow |x-1|+|x-3|=1$

Vế trái: $|x-1|+|x-3|\ge x-1+3-x=2>$ vế phải.

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) ĐKXĐ: $x\ge 1$

Ta có: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=1$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1$

Vế trái $\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|\ge \sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}=1$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{x-1}-2\ge 0\\ \sqrt{x-1}-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}\ge 2\\ \sqrt{x-1}\le 3\end{cases}\Leftrightarrow 5\le x\le 10$

Vậy nghiệm của phương trình là $S=\{x/5\le x\le 10\}$

6.2. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}+\dfrac{4(y-1)\sqrt[3]{y-1}+4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}=10$

b) $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-x^2}=x+1$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $x>0, y\ne 1$

phương trình viết dưới dạng:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}}-2+\frac{4(y-1)\sqrt[3]{y-1}+4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}-8=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}}+\frac{4\left(\sqrt[3]{(y-1)^2}-1\right)^2}{\sqrt[4]{(y-1)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-1=0\\ \sqrt[3]{(y-1)^2}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases};\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $(x;y)=(1;0);(x;y)=(1;2)$

b) áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-x^2}\le\frac{x+x^2+1}{2}+\frac{x-x^2+1}{2}=x+1$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$\begin{cases}x^2+x=1\\ x-x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+x^2-1=0\\ x^2-x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+x^2-1=0\\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}=0\end{cases}\text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm

6.3. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}=x^2-6x+13$;

b) $\sqrt{x-94}+\sqrt{96-x}=x^2-190x+9027$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Điều kiện: $4 \le x \le 6$

Ta có: $\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}\right)^2 = 8+2\sqrt{(7-x)(x+1)} \le 8+7-x+x+1=16$

$\Rightarrow \sqrt{7-x}+\sqrt{x+1} \le 4$

Mặt khác $x^2-6x+13=(x-3)^2+4 \ge 4$

Suy ra $\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}=x^2-6x+13 \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn)

b) Điều kiện: $94 \le x \le 96$

Ta có: $\left(\sqrt{x-94}+\sqrt{96-x}\right)^2 = 2+2\sqrt{(x-94)(96-x)} \le 2+x-94+96-x=4$

$\Rightarrow \sqrt{x-94}+\sqrt{96-x} \le 4$

Mặt khác $x^2-190x+9025=(x-95)^2+4 \ge 4$

Suy ra $\sqrt{x-94}+\sqrt{96-x}=x^2-190x+9027 \Leftrightarrow x=95$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=95$

6.4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$

b) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{7-x}=3$

c) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{5x+1}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt $\sqrt[3]{x+1}=a, \sqrt[3]{x+2}=b.$ Phương trình có dạng:

$a+b=ab+1 \Leftrightarrow (a-1)(1-b)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1}=1 \\ \sqrt[3]{x+2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $S=\{0;-1\}$

b) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{7-x}=3$

$\Leftrightarrow x+2+7-x+3\sqrt[3]{x+2}.\sqrt[3]{7-x}\left(\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{7-x}\right)=27$

$\Leftrightarrow 9+9\sqrt[3]{(x+2)(7-x)}=27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)(7-x)}=2$

$\Leftrightarrow x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=6 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là $S=\{-1;6\}$

c) Lập phương cả hai vế của phương trình đã cho ta được:

$$5x-2+3\sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{3x-1}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{3x-1}\right)=5x+1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{3x-1}.\sqrt[3]{5x+1}=1$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(15x^2-2x-1\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 30x^3-19x^2=0 \Leftrightarrow x=0; x=\frac{19}{30}$$

Với $x=0$ thì hai vế bằng nhau

Với $x=\frac{19}{30}$ thì hai vế của phương trình đã cho bằng nhau

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{19}{30}$

6.5. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3};$

b) $\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+11x+24}+1\right)=5.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $x\ge 2.$ Phương trình viết dưới dạng:

$$\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{(x-1)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)}-\sqrt{x-2}-\sqrt{(x-1)(x+3)}+\sqrt{x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}\right)=0$$

Trường hợp 1. $\sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow x=2.$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}=0.$ Không tồn tại x

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$

b) ĐKXĐ: $x\ge -3.$ Phương trình viết dưới dạng:

$(x+8-x-3)\left(\sqrt{x^2+11x+24}+1\right)=5\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+11x+24}+1=\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+8}.\sqrt{x+3}+1=\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+8}.\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+8}-1\right)\left(\sqrt{x+3}-1\right)=0$

Trường hợp 1. $\sqrt{x+8}-1=0 \Leftrightarrow x=-7.$ Không thuộc tập xác định

Trường hợp 2. $\sqrt{x+3}-1=0 \Leftrightarrow x=-2.$ Thuộc tập xác định

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-2$

6.6. Giải các phương trình:

a) $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10};$

b) $x\sqrt{x^2-x+1}+2\sqrt{3x+1}=x^2+x+3$

Hướng dẫn giải – đáp số

a)

$x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9+3x+10-2\sqrt{3x+10}+1=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+\left(\sqrt{3x+10}-1\right)^2=0 \quad ĐKXĐ: x\geq -\dfrac{10}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \sqrt{3x+10}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy nghiệm của phương trình là $S=\{-3\}$

b) $x\sqrt{x^2-x+1}+2\sqrt{3x+1}=x^2+x+3$

$2x\sqrt{x^2-x+1}+4\sqrt{3x+1}=2x^2+2x+6$

$2x^2+2x+6-2x\sqrt{x^2-x+1}-4\sqrt{3x+1}=0$

$\Leftrightarrow x^2-x+1-2x\sqrt{x^2-x+1}+x^2+3x+1-4\sqrt{3x+1}+4=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)^2+\left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-x+1}-x=0 \\ \sqrt{3x+1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Thử lại thấy $x=1$ thỏa mãn phương trình

Vậy nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$

6.7. Giải các phương trình:

a) $x+y+z+4=2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}+6\sqrt{z-5}$

b) $x+y+z+35=2\left(2\sqrt{x+1}+3\sqrt{y+2}+4\sqrt{z+3}\right)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐK: $x\ge 2, y\ge 3, z\ge 5$. Phương trình tương đương với:

$$x-2-2\sqrt{x-2}+1+y-3-4\sqrt{y-3}+4+z-5-6\sqrt{z-5}+9=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-3}-2\right)^2+\left(\sqrt{z-5}-3\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-2}-1=0\\ \sqrt{y-3}-2=0\\ \sqrt{z-5}-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=7\ (TM)\\ z=14\end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(3;7;14)$

b) ĐK: $x\ge -1, y\ge -2, z\ge -3$. Phương trình tương đương với:

$$x+1-4\sqrt{x+1}+4+y+2-6\sqrt{y+2}+9+z+3-8\sqrt{z+3}+16=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2+\left(\sqrt{y+2}-3\right)^2+\left(\sqrt{z+3}-4\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+1}-2=0\\ \sqrt{y+2}-3=0\\ \sqrt{z+3}-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=7\ (TM)\\ z=13\end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(3;7;13)$

6.8. Giải các phương trình sau:

a) $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)=8.$

b) $\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}=2\sqrt{3x+1}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $-1\le x\le 1$

đặt $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=a\ge 0$; ta có $a^2=2+2\sqrt{1-x^2}$. Phương trình đã cho trở thành: $a^3=8\Leftrightarrow a=2$

với $a=2$ thì $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=1\Rightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$

vậy phương trình có nghiệm $x=0$ (thỏa mãn)

b) ĐKXĐ: $x\ge 0$

bình phương hai vế của phương trình đã cho được:

$$x+3+4x+4\sqrt{x+3}.\sqrt{x}=4(3x+1)$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+3x}=7x+1$$
$$\Leftrightarrow 16(x^2+3x)=49x^2+14x+1$$
$$\Leftrightarrow 33x^2-34x+1=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{33} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là $x=1, x=\dfrac{1}{33}$

6.9. Giải các phương trình:

a) $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0.$

b) $x^3+(x+1)\sqrt{x+1}+2\sqrt{2}=\left(x+\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)^3$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt $\sqrt[3]{3x+1}=a;\sqrt[3]{5-x}=b;\sqrt[3]{2x-9}=c;$

Suy ra $a+b+c=\sqrt[3]{4x-3}=0 \Leftrightarrow a+b+c=\sqrt[3]{4x-3} \Leftrightarrow (a+b+c)^3=4x-3(1)$

Mặt khác $a^3+b^3+c^3=3x+1+5-x+2x-9=4x-3(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$

$$a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=a^3+b^3+c^3$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^3+b^3=0 \\ b^3+c^3=0 \\ c^3+a^3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1+5-x=0 \\ 5-x+2x-9=0 \\ 2x-9+3x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=4 \\ x=\dfrac{8}{5} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-3;4;\dfrac{8}{5}\right\}$

b) ĐKXĐ: $x\ge -1$

Đặt $y=\sqrt{x+1};z=\sqrt{2}$

Khi đó phương trình có dạng $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3\ (*)$

Chứng minh được $(*)\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(x+z)=0$

Với $x+y=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=-x \Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn)

Với $x+z=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ (không thỏa mãn)

Với $y+z=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{2}=0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

6.10. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=3-9x;$

b) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

$$\frac{\left(4x^2+5x+1\right)-4\left(x^2-x+1\right)}{\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}}+\left(9x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x-3}{\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}}+\left(9x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(9x-3\right)\left[\frac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}}+1\right]=0$$

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}}+1>0$ với x thuộc tập xác định, do đó phương trình

$(*) \Leftrightarrow 9x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

Thử lại ta thấy $x=\dfrac{1}{3}$ thỏa mãn phương trình. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

b) ĐKXĐ: $\dfrac{5}{2}\le x\le 4$

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x.$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{4-x}-1\right)+\left(\sqrt{2x-5}-1\right)=2x^2-5x-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2-1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{4-x-1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2x-5-1}{\sqrt{2x-5}+1}=\left(2x+1\right)\left(x-3\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{x-3}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2(x-3)}{\sqrt{2x-5}+1}-(2x+1)(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}-(2x+1)\right]=0$$

Trường hợp 1. Xét $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

Trường hợp 2. Xét $\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}-(2x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}-(2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=2x+1+\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}$$

Với điều kiện $\frac{5}{2}\le x\le 4$ ta có:

Vế trái $<\frac{1}{1}+\frac{2}{1}=3$

Vế phải $>2.\frac{5}{2}+1=6$

$\Rightarrow$ Vế trái < Vế phải, do đó phương trình vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$

6.11. Tìm *x, y* thỏa mãn phương trình: $4y\sqrt{x-2}+2x\sqrt{y-1}=y(3x-2)$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Ninh Thuận, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x\ge 2, y\ge 1$

$$(1)\Leftrightarrow 3xy-2y-4y\sqrt{x-2}-2x\sqrt{y-1}=0$$

$$\Leftrightarrow 2y-4y\sqrt{x-y}+2xy-4y+x-2x\sqrt{y-1}+xy-x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{y}-\sqrt{xy-2y}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\sqrt{xy-x}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{y}-\sqrt{xy-2y}=0\\ \sqrt{x}-\sqrt{xy-x}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1-\sqrt{x-2}=0\\ 1-\sqrt{y-1}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$$

6.12. Giải các phương trình:

a) $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{(7-x)(x-1)}+1;$

b) $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $1 \le x \le 7$

$$x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{(7-x)(x-1)} + 1$$
$$\Leftrightarrow x - 1 + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{(7-x)(x-1)}$$

Đặt $\sqrt{7-x} = a; \sqrt{x-1} = b$

Phương trình có dạng: $b^2 + 2a = 2b + ab$

$$\Leftrightarrow b^2 - 2b - ab + 2a = 0 \Leftrightarrow (b-2)(b-a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = a \end{array}\right.$$

Trường hợp 1. $b = 2 \Leftrightarrow \sqrt{7-x} = 2 \Leftrightarrow 7 - x = 4 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2. $b = a \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{7-x}$

$\Leftrightarrow x - 1 = 7 - x \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm phương trình là $S = \{3; 4\}$

b) ĐKXĐ: $x \ge -1$

Đặt $a = \sqrt{x+3}; b = \sqrt{x+1}$ (điều kiện $a \ge 0; b \ge 0$)

Phương trình có dạng:

$$a + 2xb = 2x + ab \Leftrightarrow a - ab - 2x + 2xb = 0$$
$$\Leftrightarrow a(1-b) - 2x(1-b) = 0 \Leftrightarrow (1-b)(a-2x) = 0$$

$\Leftrightarrow 1 - b = 0$ hoặc $a - 2x = 0$

Trường hợp 1. Xét $1 - b = 0 \Leftrightarrow b = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0\,(tm)$

Trường hợp 2. Xét $a - 2x = 0 \Leftrightarrow a = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2x$

$\Leftrightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1; x = \dfrac{-3}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm phương trình là $S = \left\{0; 1; \dfrac{-3}{4}\right\}$

6.13. Giải phương trình: $\sqrt{6x-1} + \sqrt{9x^2-1} = 6x - 9x^2$

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Điều kiện xác định: $x \geq \frac{1}{3}$

Đặt $a = \sqrt{6x-1}; b = \sqrt{9x^2-1}$ (điều kiện $a \geq 0; b \geq 0$)

Suy ra $a^2 - b^2 = 6x - 1 - 9x^2 + 1 = 6x - 9x^2$

Từ đó ta có: $a^2 - b^2 = a + b$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b-1=0 \end{array}\right.$$

Với $a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6x-1} = 0$ và $\sqrt{9x^2-1} = 0$ (loại)

Với $a - b - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6x-1} - \sqrt{9x^2-1} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 6x - 1 = 9x^2 - 1 + 2\sqrt{9x^2-1} + 1$

$\Leftrightarrow (3x-1)^2 + 2\sqrt{9x^2-1} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ 9x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm phương trình là $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

6.14. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} = \sqrt{x^2 - 8x + 24}$

b) $\left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{3x^3+7x+2} + 4\right) = 4.x - 2$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}$; ĐKXĐ: $2 \leq x \leq 6$

xét $A^2 = x - 2 + 6 - x + 2\sqrt{(x-2)(6-x)}$

$A^2 = 4 + 2\sqrt{(x-2)(6-x)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$2\sqrt{(x-2)(6-x)} \leq x - 2 + 6 - x = 4$

$\Rightarrow A^2 \leq 4 + 4 = 8 \Rightarrow A \leq 2\sqrt{2}$ vì $A > 0$

Mà $\sqrt{x^2-8x+24} = \sqrt{(x-4)^2+8} \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Vậy $VT \leq 2\sqrt{2} \leq VP$

Bất đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} VT = 2\sqrt{2} \\ VP = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=6-x \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm phương trình là $S=\{4\}$

b) điều kiện $x \ge \frac{-1}{3}$. Phương trình tương đương với

$$(3x+1-x-2)\left(\sqrt{3x^3+7x+2}+4\right)=(4x-2)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+2}\right)$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{3x^3+7x+2}+4\right)=(4x-2)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+2}\right)$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{(3x+1)(x+2)}+4\right)-(4x-2)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{(3x+1)(x+2)}+4-2\sqrt{3x+1}-2\sqrt{x+2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ \sqrt{3x+1}=2 \\ \sqrt{x+2}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=1\ (tm) \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm phương trình là $S=\left\{\frac{1}{2};1;2\right\}$

6.15. Giải phương trình: $4x^2+3x+3=4\sqrt{x^3+3x^2}+2\sqrt{2x-1}$

Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hà Nam, năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \ge \frac{1}{2}$

$$4x^2+3x+3=4\sqrt{x^3+3x^2}+2\sqrt{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+3x+3-4x\sqrt{x+3}-2\sqrt{2x-1}=0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-4x\sqrt{x+3}+x+3+2x-1-2\sqrt{2x-1}+1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\sqrt{x+3}=0 \\ \sqrt{2x-1}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\sqrt{x+3} \\ \sqrt{2x-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm phương trình là $S=\{1\}$

6.16. Giải phương trình:

$\sqrt{3x^2-7x+9}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+13}$

(Thi Học sinh giỏi toán lớp 9, Yên Bái, năm học 2007- 2008)

Hướng dẫn giải – đáp số

Phương trình đưa về dạng:

$\sqrt{3x^2-5x-1-2(x-5)}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-2-3(x-5)}$

• $x=5$ là nghiệm của phương trình

• Nếu $x>5 \Rightarrow -2(x-5)>-3(x-5) \Rightarrow$ vế trái của phương trình nhỏ hơn vế phải $\Rightarrow$ với $x>5$.

Phương trình đã cho không có nghiệm

• Nếu $x<5 \Rightarrow -2(x-5)<-3(x-5) \Rightarrow$ vế trái của phương trình lớn hơn vế phải $\Rightarrow$ với $x<5$.

Phương trình đã cho không có nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất l;à $x=5$

6.17. Giải phương trình $x^3+(x+1)\sqrt{x+1}+2\sqrt{2}=\left(x+\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)^3$.

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x\geq -1$

Đặt $y=\sqrt{x+1}; z=\sqrt{2}$

Khi đó (1) có dạng $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3\,(2)$

Chứng minh được (2) $\Leftrightarrow (x+y)(x+z)(z+x)=0$

• Với $x+y=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=-x \Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn)

• Với $x+z=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ (không thỏa mãn)

• Với $y+z=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{2}=0,$ vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

6.18. Giải phương trình: $x\sqrt{3-2x}=3x^2-6x+4.$

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, TP. Hà Nội, năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

DKXD: $x \le \frac{3}{2}$

Ta có: $x\sqrt{3-2x} = 3x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow 2x\sqrt{3-2x} = 6x^2 - 12x + 8$

$\Leftrightarrow \left(5x^2 - 10x + 5\right) + \left(x^2 - 2x\sqrt{3-2x} + 3 - 2x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 5\left(x-1\right)^2 + \left(x - \sqrt{3-2x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - \sqrt{3-2x} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

6.19. Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2}\right)\left(1 + \sqrt{x^2 + 4x - 12}\right) = 8.$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, tỉnh Nam Định, Năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \ge 2$

Đặt $\sqrt{x+6} = a, \sqrt{x-2} = b\left(a \ge 0, b \ge 0\right) \Rightarrow a^2 - b^2 = 8$

Phương trình có dạng

$\left(a-b\right)\left(1+ab\right) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(1+ab-a-b\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ 1 + ab - a - b = 0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1. Xét $a = b \Rightarrow \sqrt{x+6} = \sqrt{x-2}$ vô nghiệm

Trường hợp 2. Xét $1 + ab - a - b = 0 \Leftrightarrow \left(a-1\right)\left(b-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+6} = 1 \Leftrightarrow x = -5\left(khong \text{ thoa man DK}\right) \\ \sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow x = 3\left(TM\right) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

Chuyên đề 7. KHÁI NIỆM HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Định nghĩa*

Giả sử có hai đại lượng biến thiên x và y, trong đó x thuộc tập số D. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một **hàm số.**

Ta gọi x là **biến số** và y là **hàm số** của x. Tập D là **tập xác định** của hàm số.

2. *Cho các hàm số*

Một hàm số có thể được cho bằng các cách sau:

+ Hàm số cho bằng bảng;

+ Hàm số cho bằng biểu đồ;

+ Hàm số cho bằng công thức.

3. *Đồ thị hàm số*

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy với mọi x thuộc D.

4. *Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến*

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên tập D nếu

$\forall x_1 x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên tập D nếu

$\forall x_1 x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho bảng tiêu thụ điện năng của một hộ gia đình trong 12 tháng như sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Điện năng tiêu thụ (kw.h)	112	90	87	78	99	120	150	90	67	89	87	100

Bảng trên thể hiện sự phụ thuộc giữa điện năng tiêu thụ (kí hiệu là y) và thời gian x (tính theo tháng)

Với mỗi giá trị $x \in D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ có duy nhất một giá trị y. Vậy ta có một hàm số.

Tập hợp D là tập xác định của hàm số này.

Các giá trị $y = 112, 90, 87, ...$ được gọi là các giá trị của hàm số tương ứng tại $x = 1, 2, 3, ...$

Nhận xét:

Một hàm số có thể được cho bởi bảng. Tuy nhiên không phải mọi bảng đều là hàm số. Chẳng hạn:

Bảng ghi lại lượng các loại áo sơ mi của một cửa hàng

Màu áo	Trắng	Xanh	Đỏ	Vàng	Tím
Số lượng	2	14	3	0	6

Trong bảng trên rõ ràng mỗi màu áo (x) đều được đặt tương ứng với một và chỉ một con số y. Tuy nhiên dó màu áo (x) không phải là số nên quy tắc cho bởi bảng trên không phải là một hàm số.

Ví dụ 2. Cho hai số thực x, y sao cho: Mỗi giá trị $x(-1 \le x \le 1)$ tương ứng với y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Hỏi quy tắc đặt tương ứng x với y nêu trên có phải là một hàm số không?

Giải

Ta có: Với $x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Như vậy với một giá trị $x = 0$ được đặt tương ứng với 2 giá trị y phân biệt nên quy tắc đã cho không phải là một hàm số.

Nhận xét:

Một hàm số thường được cho bởi công thức. Tuy nhiên qua ví dụ trên ta thấy không phải mọi công thức đều biểu diễn một hàm số. Một công thức đảm bảo là một hàm số khi mỗi giá trị x thuộc tập xác định D đều đặt tương ứng với ***một và chỉ một*** giá trị y.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải

Với mọi $x_1 < x_2 \ (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2^3 - x_1^3) + 3(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3)$$

Do $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} + 3 > 0$ với mọi x_1, x_2 và $x_2 - x_1 > 0$ nên ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét :

Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trên tập D.

Ngoài cách làm như trên, ta có thể làm như sau : Với $x_1, x_2 \in D$ bất kỳ, $x_1 \neq x_2$.

Ta xét thương : $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

+ Nếu $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ thì ta có hàm số đồng biến trên D.

+ Nếu $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ thì ta có hàm số nghịch biến trên D.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x) = ax + b(a \neq 0)$ (a, b là các tham số, x là số thực). Chứng minh rằng : Hàm số $y = f(x)$ đồng biến khi và chỉ khi $a > 0$; hàm số $y = f(x)$ nghịch biến khi và chỉ khi $a < 0$.

Giải

Với mọi x_1, x_2 phân biệt thuộc $\mathbb{R}$ ta có: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Hàm số đã cho đồng biến $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Leftrightarrow a > 0$.

Hàm số đã cho nghịch biến $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \Leftrightarrow a < 0$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

C. Bài tập vận dụng

7.1. Tìm điều kiện xác định của các hàm số:

$a) y = \dfrac{x+2}{2x+1}$ $\qquad$ $b) y = \dfrac{x+1}{x^2 + 3x - 4}$

$c) y = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-2x}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$ xác định $\Leftrightarrow 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{1}{2}$

b) Hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2 + 3x - 4}$ xác định $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq -4$

c) Hàm số $y=\sqrt{x+3}-\sqrt{4-2x}$ xác định

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0 \\ 4-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -3\le x\le 2$

7.2. Chứng minh rằng hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ nghịch biến khi $x>\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $y=f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{2x-1}$

Với mọi $x_1<x_2$ và $x_1,x_2>\dfrac{1}{2}$. Xét hiệu:

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\frac{x_2+1}{2x_2-1}-\frac{x_1+1}{2x_1-1}$$
$$=\frac{\left(x_2+1\right)\left(2x_1-1\right)-\left(x_1+1\right)\left(2x_2-1\right)}{\left(2x_2-1\right)\left(2x_1-1\right)}=\frac{3\left(x_1-x_2\right)}{\left(2x_2-1\right)\left(2x_1-1\right)}$$

Do $x_1<x_2$ và $x_1,x_2>\dfrac{1}{2}$ nên ta có $x_1-x_2<0$ và $2x_1-1>0$ và $2x_2-1>0$.

Từ đó dẫn đến $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)<0$ hay $f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến khi $x>\dfrac{1}{2}$

7.3. Chứng minh rằng hàm số $y=2x^3+x-1$ đồng biến

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $y=f\left(x\right)=2x^3+x-1$

Với mọi $x_1<x_2$. Xét hiệu:

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=2\left(x_2^3-x_1^3\right)+\left(x_2-x_1\right)=\left(x_2-x_1\right)\left[2\left(x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)+1\right]$$
$$=\left(x_2-x_1\right)\left[x_1^2+x_2^2+\left(x_1+x_2\right)^2+1\right]$$

Do $x_1<x_2$ nên ta có $x_2-x_1>0$.

Từ đó dẫn đến $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)>0$ hay $f\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)$.

Suy ra hàm số đã cho đồng biến.

7.4. Cho hàm số $y=2x^2-1$. Các điểm sau có thuộc đồ thị hàm số không?

$a)A(1;1)$	$b)B\left(0;-1\right)$
$c)C\left(-1;3\right)$	$d)D\left(2;2\right)$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $y = f(x) = 2x^2 - 1$

a) Do $1 = f(1)$ nên suy ra điểm A thuộc đồ thị của hàm số đã cho.

b) Do $-1 = f(0)$ nên suy ra điểm B thuộc đồ thị của hàm số đã cho.

c) Do $3 \neq 1 = f(-1)$ nên suy ra điểm C không thuộc đồ thị của hàm số đã cho.

d) Do $2 \neq 7 = f(2)$ nên suy ra điểm D không thuộc đồ thị của hàm số đã cho.

Chuyên đề 8. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ ĐỒ THỊ

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Định nghĩa*

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bằng công thức dạng $y = ax + b$, trong đó a, b là những hằng số với $a \neq 0$.

Hàm số bậc nhất có tập xác định là $\mathbb{R}$.

2. *Tính chất*

Tính đồng biến, nghịch biến:

Với $a > 0$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a < 0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị

- Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng gọi là đường thẳng $y = ax + b$. Nó có hệ số góc bằng a và có đặc điểm:

- Không song song và không trùng với các trục tọa độ;

- Cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\frac{a}{b};0\right)$ và cắt trục tung tại điểm $B(0;b)$.

Quan hệ giữa 2 đường thẳng

Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b; (d'): y = a'x + b'$, ta có:

+ (d) song song với $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$;

+ (d) trùng với $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$;

+ (d) vuông góc với $(d') \Leftrightarrow a.a' = -1$;

+ (d) cắt $(d') \Leftrightarrow a \neq a'$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = (2m+1)x + 5$ (m là tham số).

a) Xác định các giá trị của m để hàm số trên là hàm số bậc nhất.

b) Tìm các giá trị của m để hàm số trên là hàm số đồng biến.

Giải

a) Hàm số $y = (2m+1)x + 5$ là hàm số bậc nhất $\Leftrightarrow 2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{-1}{2}$.

b) Hàm số $y=(2m+1)x+5$ là hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2m+1>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{-1}{2}$.

Nhận xét:

Để nhận dạng hàm số bậc nhất chúng ta cần lưu ý rằng: Công thức có dạng $y=ax+b \quad (a\neq 0)$. Chẳng hạn, hàm số $y=2x+1-x^2$ có hệ số $2\neq 0$ nhưng không phải là hàm bậc nhất vì nó không có dạng $y=ax+b$.

Ví dụ 2: Cho hai hàm số $y=(3m-1)x+2$ và $y=(m+1)x-7$ (với m là tham số).

Tìm giá trị của m để hai hàm số trên là hàm bậc nhất và đồ thị của chúng là hai đường thẳng cắt nhau.

Giải

Các hàm số đã cho là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}(3m-1)\neq 0\\(m+1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq \dfrac{1}{3}\\m\neq -1\end{cases}$$

Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi:

$(3m-1)\neq (m+1) \Leftrightarrow 2m\neq 2 \Leftrightarrow m\neq 1$

Vậy các giá trị của m thoả mãn đồng thời các điều kiện $m\neq \dfrac{1}{3}; m\neq -1$ và $m\neq 1$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét :

\+ Với $m=\dfrac{1}{3}$, hai hàm số đã cho trở thành $y=2$ và $y=\dfrac{4}{3}x-7$. Khi đó $y=2$ không phải là hàm số bậc nhất nhưng đồ thị của nó cũng là một đường thẳng và nó song song với trục hoành, còn hàm số bậc nhất $y=\dfrac{4}{3}x-7$ có đồ thị là đường thẳng cắt trục hoành. Từ đó ta có đồ thị của hai hàm số $y=2$ và $y=\dfrac{4}{3}x-7$ cắt nhau.

\+ Tương tự với $m=-1$, hai hàm số đã cho trở thành : $y=-4x+2$ và $y=-7$. Lập luận tương tự ta cũng có đồ thị của hai hàm số này cắt nhau.

\+ Các đường thẳng $y=2$ và $y=-7$ học ở chương III.

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng $y=(1-3m)x+4 \; (d)$ và $y=(n-3)x+n \; (d')$.

a) Tìm m và n để (d) trùng (d').

b) Tìm m và n để (d) song song (d').

Giải

a) (d) trùng (d') khi và chỉ khi $\begin{cases} 1-3m=n-3 \\ n=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ n=4 \end{cases}$

b) (d) song song (d') khi và chỉ khi $\begin{cases} 1-3m=n-3 \\ n\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4-3m \\ n\neq 4 \end{cases}$

Nhận xét :

Đối với bài toán trên, chúng ta cần xác định rõ yêu cầu của đề là tìm điều kiện để 2 đường trùng nhau hoặc song song chứ không yêu cầu chúng phải là hàm bậc nhất. Vì vậy, nếu đặt điều kiện $1-3m\neq 0$ hoặc $n-3\neq 0$ thì lời giải sẽ không đúng.

Ví dụ 4. Cho ba hàm số : $y=x+2$ có đồ thị là d_1

$y=-x-2$ có đồ thị là d_2

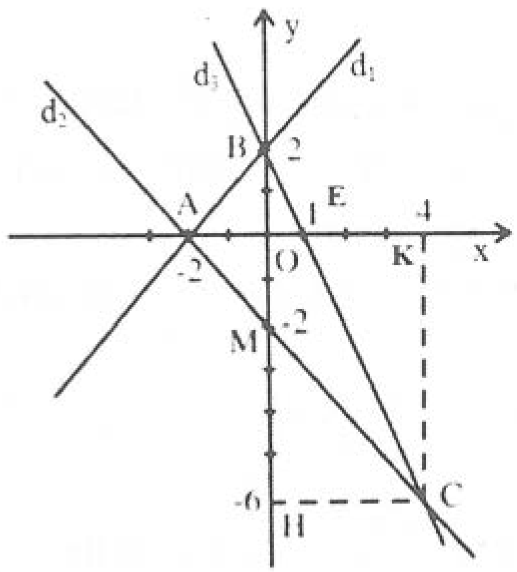
$y=-2x+2$ có đồ thị là d_3

a) Vẽ đồ thị của ba hàm số đã cho trên cùng một hệ trục toạ độ.

b) Cho biết d_1 cắt d_2 tại A, d_1 cắt d_3 tại B, d_2 cắt d_3 tại C. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

a) Xem hình 1.



Hình 1

b) Từ câu a, ta có: $A(-2;0),B(0;2),C(4;-6)$.

d_2 có phương trình $y=-x-2$.

Cho $x=0$ thì $y=-2$ do đó d_2 cắt Oy tại $M\left(0;-2\right)$.

Gọi H là hình chiếu của điểm C lên Oy thì $H\left(0;-6\right)$. Ta có :

$$S_{ABC}=S_{ABM}+S_{MBC}=\frac{1}{2}BM.OA+\frac{1}{2}BM.CH=\frac{1}{2}4.2+\frac{1}{2}.4.4=12.$$

Nhận xét :

Với phần b) chúng ta có thể giải theo một số cách khác. Chẳng hạn:

Cách 2: Ta kiểm tra thấy $d_1\perp d_2 \Rightarrow AB\perp AC$. Lại có:

$$AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=2\sqrt{2};AC=\sqrt{AK^2+KC^2}=6\sqrt{2}.$$

(K là hình chiếu vuông góc của C lên trục hoành). Khi đó $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.\mathrm{AC}=12$.

Cách 3: Gọi E là giao của BC và trục hoành. Tìm được $E\left(1;0\right)$. Khi đó:

$$S_{ABC}=S_{ABE}+S_{AEC}=\frac{1}{2}BO.\mathrm{AE}+\frac{1}{2}CK.\mathrm{AE}=12.$$

Ví dụ 5.

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $\mathrm{A}\left(-4;1\right)$ và song song với đường thẳng $y=-2x+5$.

b) Xác định hàm số $y=ax+b$ biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $B\left(-1;-2\right)$ và cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -3.

Giải

a) Phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $y=-2x+5$ có dạng :

$y=-2x+b\ \left(b\neq 5\right)\ \left(d\right)$.

Vì $\left(d\right)$ đi qua điểm $\mathrm{A}\left(-4;1\right)$ nên $-2.\left(-4\right)+b=1\Leftrightarrow b=-7$ (thoã mãn điều kiện $b\neq 5$).

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $y=-2x-7$.

b) Vì đồ thị của hàm số $y=ax+b$ luôn đi qua điểm $B\left(-1;-2\right)$ nên ta có : $-a+b=-2$ (1).

Vì đồ thị của hàm số $y=ax+b$ cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -3 nên ta có : $b=-3$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra : $a=-1;\mathrm{b}=-3\Rightarrow \mathrm{y}=-x-3$.

Nhận xét :

Ngoài cách giải như trên, chúng ta có cũng thể viết phương trình đường thẳng bằng cách đi tìm 2 yếu tố, đó là: Một điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đường thẳng và hệ số góc k của nó. Khi đó phương trình của đường thẳng là: $y=k(x-x_0)+y_0$.

Áp dụng vào phần a, đường thẳng đi qua điểm $C(-4;1)$ và song song với đường thẳng $y=-2x+5$ nên từ đó suy ra đường thẳng cần tìm có hệ số góc $k=-2$ đồng thời đi qua $C(-4;1)$.

Như vậy ta có: Phương trình cần tìm là: $y=-2(x+4)+1 \Leftrightarrow y=-2x-7$.

Với phần c, ta cũng có thể giải bằng cách đi tìm 2 điểm trên đường thẳng. Sau đó làm tương tự phần a.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $(d): y=(k-1)x+n(k\neq 1)$ và hai điểm $A(0;2)$ và $B(-1;0)$ (với k,n là các tham số).

1. Tìm các giá trị của k và n để :

a) Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B.

b) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: y=x+2-k$

2. Cho $n=2$. Tìm k để đường thẳng d cắt trục Ox tại điểm C sao cho diện tích tam giác OAC gấp hai lần diện tích tam giác OAB.

Giải

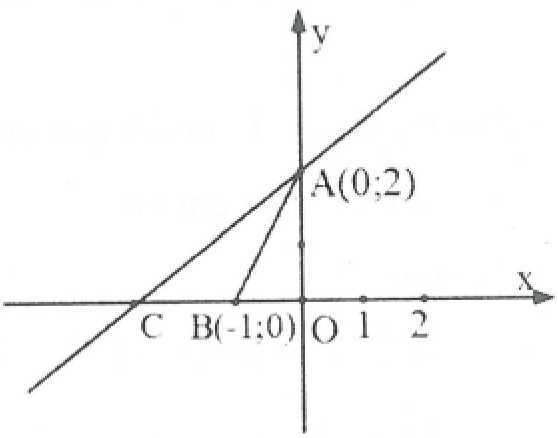
1.

a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;2) \Leftrightarrow n=2$.

Đường thẳng (d) đi qua điểm $B(-1;0)$.

$\Leftrightarrow 0=-k+1+2 \Leftrightarrow k=3$

Vậy với $k=3; n=2$ thì (d) đi qua hai điểm A và B.



Hình 2

b) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(\Delta): y=x+2-k$.

$$\begin{cases} k-1=1 \\ 2-k\neq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ n\neq 0 \end{cases}$$

Vậy với $k=2$ và $n\neq 0$ thì đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ).

2. Với $n=2$, đường thẳng $(d): y=(k-1)x+2$ cắt Ox $\Leftrightarrow$ k-1 $\neq 0 \Leftrightarrow$ k $\neq 1$ (thỏa mãn).

Giao điểm của (d) với Ox là $C\left(\dfrac{2}{1-k};0\right)$,

Các ΔOAB và ΔOAC vuông tại O nên $S_{OAC}=\dfrac{1}{2}OA.OC; S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB$.

Ta có $S_{OAC}=2S_{OAB}\Leftrightarrow OC=2OB$

$$\Leftrightarrow |x_C|=2.|x_B|\Leftrightarrow\left|\frac{2}{1-k}\right|=2.|-1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{1-k}=2\\ \dfrac{2}{1-k}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\ k=2\end{array}\right.\text{ (thoả mãn).}$$

Vậy với $k=0$ hoặc $k=2$ thì $S_{OAC}=2S_{OAB}$.

Nhận xét :

Với phần 1b, chúng ta thường hay bỏ qua bước kiểm tra hằng số tự do của hai đường thẳng khác nhau. Nhắc lại, hai đường thẳng $y=ax+b$ và $y=a'x+b'$ song song với nhau khi và chỉ khi $a=a'$ và $b=b'$.

Với phần 2, nếu quá lệ thuộc vào hình vẽ học sinh có thể thiếu mất một trường hợp.

Ví dụ 7. Cho đường thẳng d là đồ thị của hàm số bậc nhất: $y=mx-m+1$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng d bằng $\sqrt{2}$.

c) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng d lớn nhất.

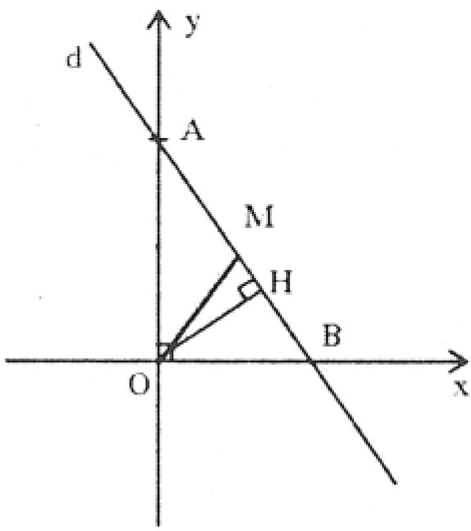
Giải

a) Đường thẳng d luôn đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ cố định khi và chỉ khi $y_0=mx_0-m+1$ với mọi m

$\Leftrightarrow m(x_0-1)+(1-y_0)=0$ đúng với mọi m

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0-1=0\\1-y_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1\\y_0=1\end{cases}$$

Vậy đường thăng d luôn đi qua điểm cố định $M(1;1)$.



Hình 3

b) Điều kiện để $y=mx-m+1$ là hàm số bậc nhất là $m\neq 0$.

Gọi A là giao điểm của d và trục Oy:

Với $x=0\Rightarrow y=-m+1\Rightarrow A(0;-m+1)\Rightarrow OA=|-m+1|=|m-1|$

Gọi B là giao điểm của d và trục Ox:

Với $y=0 \Rightarrow x=\dfrac{m-1}{m} \Rightarrow B\left(\dfrac{m-1}{m};0\right) \Rightarrow OB=\dfrac{|m-1|}{|m|}$.

Do điểm O cách đường thẳng d một đoạn bằng $\sqrt{2}$ nên đường thẳng d không đi qua O $\Leftrightarrow 0 \neq -m+1$ hay $m \neq 1$.

Kẻ $OH \perp d$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{(m-1)^2}+\frac{m^2}{(m-1)^2}=\frac{m^2+1}{m^2-2m+1} \Leftrightarrow OH^2=\frac{m^2-2m+1}{m^2+1}$$

Mà theo giả thiết có $OH=\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{m^2-2m+1}{m^2+1}=2 \Leftrightarrow m^2+2m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ (thoả mãn).

c) Vì $OH \leq OM$ (OM không đổi do O và M cố định).

Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv \mathrm{H} \Leftrightarrow d \perp OM$.

Gọi $y=ax+b$ là đường thẳng đi qua hai điểm O, M suy ra $0=b$ và $1=a+b$.

Từ đó ta có $a=1; b=0$. Như vậy ta được $y=x$ là đường thẳng đi qua hai điểm O và M, đường thẳng này có hệ số góc $k_1=1$.

Mà d $y=mx-m+1$ nên hệ số góc của đường thẳng d là $k_2=m$.

Do d vuông góc với OM suy ra $k_1.k_2=-1 \Leftrightarrow 1.m=-1 \Leftrightarrow m=-1$ (thoả mãn).

Nhận xét :

Với phần a, chúng ta có thể tóm tắt y tưởng giải như sau:

Bài toán: Tìm điểm cố định của đường thẳng có phương trình: $y=ax+b$ (trong đó a,b là các biểu thức phụ thuộc vào tham số m).

Cách giải:

Bước 1: Gọi điểm cố định cần tìm là $M(x_0;y_0) \Leftrightarrow y_0=ax_0+b$ (1) đúng với mọi m.

Bước 2: Biến đổi (1) về phương trình ẩn m:

$P.m+Q=0$ đúng với mọi m (với P, Q là biểu thức không phụ thuộc vào m).

Bước 3: Sử dụng tính chất:

Phương trình ẩn m là: $P.m+Q=0$ đúng với mọi m $\Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ Q=0 \end{cases}$

Từ đó tìm được $(x;y)$ là toạ độ của điểm cố định.

Với phần c, ngoài cách giải đã trình bày ta cũng có thể giải bằng cách sử dụng bất đẳng thức. Cụ thể như sau:

$OH^2 = \dfrac{m^2-2m+1}{m^2+1} = \dfrac{2\left(m^2+1\right)-\left(m^2+2m+1\right)}{m^2+1} = 2-\dfrac{m^2+2m+1}{m^2+1} = 2-\dfrac{\left(m+1\right)^2}{m^2+1} \le 2$ với mọi m.

Đẳng thức xảy ra khi $m+1$ hay $m=-1$

Ví dụ 8. Trong hệ trục toạ đọ Oxy, cho hàm số $y=3x+m(1)$. Cho điểm A có hoành độ bằng 1 thuộc đồ thị của hàm số (1). Xác định m để điểm A nằm trong góc vuông thứ IV.

Giải

Do điểm A thuộc đồ thị của hàm số (1) và có hoành độ bằng 1 nên với

$x=1 \Rightarrow y=3+m \Rightarrow A\left(1;m+3\right)$.

Điểm A nằm trong góc vuông thứ IV của hệ trục toạ độ Oxy

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ m+3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ m<-3 \end{cases} \Leftrightarrow m<-3$

Vậy $m<-3$ thoã mãn yêu cầu của đề bài.

Nhận xét:

Hai trục toạ độ chia mặt phẳng thành 4 phần: Góc phần tư thứ I,II,III,IV.

- Điểm $A\left(x;y\right)$ nằm trong góc phần tư thứ I khi và chỉ khi $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$
- Điểm $A\left(x;y\right)$ nằm trong góc phần tư thứ II khi và chỉ khi $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$
- Điểm $A\left(x;y\right)$ nằm trong góc phần tư thứ III khi và chỉ khi $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$
- Điểm $A\left(x;y\right)$ nằm trong góc phần tư thứ IV khi và chỉ khi $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=\left(3m^2+1\right)x+m^2-4$

Chứng minh khi m thay đổi thì đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Gọi điểm M (x;y) là một điểm của đồ thị, khi đó:

M cố định khi và chỉ khi $y=\left(3m^2+1\right)x+m^2-4$ đúng với mọi m

$\Leftrightarrow \left(3x+1\right)m^2+x-y-4=0$ đúng với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{13}{3} \end{cases}$$

Vậy $M\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{13}{3}\right)$ là điểm cố định cần tìm.

Nhận xét:

Cách giải trên dựa vào tính chất:

Phương trình $ax^2+bx+c=0$ nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi a=b=c=0.

Ví dụ 10. Cho ba điểm $A(0;2), B(-3;-1), C(2;4)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Giải

Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm A và B. Phương trình của d có dạng là $y=ax+b$ (1).

Do toạ độ của A, B thoả mãn (1) nên ta có hệ: $\begin{cases} 2=b \\ -1=-3a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

$\Rightarrow d: y=x+2$.

Lại có:Điểm $C(2;4)$ thoả mãn phương trình $d: y=x+2 \Rightarrow C \in d$ .Từ đó suy ra A, B, C thẳng hàng.

III. Bài tập vận dụng

8.1. Cho 2 đường thẳng $d: y=(m-2)x+3(m \neq 2)$ và $d': y=-m^2x+1(m \neq 0)$.

a) Tìm m để $d \parallel d'$.

b) Tìm m để d cắt Ox tại A, cắt Oy tại B sao cho $\widehat{BAO}=60°$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} m-2=-m^2 \\ 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

b) $A\left(-\dfrac{3}{m-2};0\right); B(0;3) \Rightarrow OA=\dfrac{3}{|m-2|}; OB=3.$

Do $\widehat{BAO}=60°$ nên $\tan \widehat{BAO}=\dfrac{OB}{OA}=\sqrt{3} \Leftrightarrow |m-2|=\sqrt{3} \Leftrightarrow m=2 \pm \sqrt{3}$.

8.2. Cho đường thẳng d có phương trình $y=(2m+1)x-2$ (với $m \neq -\dfrac{1}{2}$), d cắt Ox tại A, cắt Oy tại B. Tìm m sao cho:

a) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d bằng $\sqrt{2}$;

b) Diện tích tam giác AOB bằng $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hàm số $y=(2m+1)x-2$ có đồ thị là đường thẳng d, điều kiện: $m\neq -\frac{1}{2}$.

Do d cắt trục Ox tại điểm A nên với:

$$y=0\Rightarrow x=\frac{2}{2m+1}\Rightarrow A\left(\frac{2}{2m+1};0\right)\Rightarrow OA=\frac{2}{|2m+1|}.$$

Do d cắt trục Oy tại điểm B nên với $x=0\Rightarrow y=-2\Rightarrow B(0;-2)\Rightarrow OB=2.$

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O lên AB suy ra OH là khoảng cách từ gốc O tới đường thẳng d.

Suy ra $OH=\sqrt{2}$. Mặt khác, do tam giác OAB vuông tại O và OH là đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông nên ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{(2m+1)^2}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2=4m^2+4m+2\Leftrightarrow m^2+m=0\Leftrightarrow m=0$$

hoặc $m=-1$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $m=0$ hoặc $m=-1$.

b) Theo a, ta có $A\left(\frac{2}{2m+1};0\right);B(0;-2)\Rightarrow OA=\frac{2}{|2m+1|};OB=2$

$$\Rightarrow S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{2}{|2m+1|}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow |2m+1|=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m+1=4\\2m+1=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\frac{3}{2} \text{ hoặc } m=-\frac{5}{2}$$

8.3. Xác định phương trình đường thẳng d' biết rằng nó song song với đường thẳng d có phương trình $y=-x+1$ và d' đi qua điểm $M(2;1)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Do đường thẳng d' song song với đường thẳng d và đường thẳng d có hệ số góc bằng -1 nên ta có đường thẳng d' cũng có hệ số góc là -1.

Từ đó suy ra đường thẳng d' có phương trình dạng: $y=-x+c$. Do điểm $M(2;1)$ thuộc đường thẳng d' nên ta có: $1=-2+c\Leftrightarrow c=3$. Vậy đường thẳng d' có phương trình là $y=-x+3$.

8.4. Cho hai đường thẳng $d_1: y=2x+4, d_2: y=-\frac{1}{2}x+1, d_1$ cắt Ox tại A, cắt Oy tại B; d_2 cắt Ox tại C, cắt Oy tại D; d_1 và d_2 cắt nhau tại M.

a) Chứng minh tam giác MAC vuông tại M.

b) Tính diện tích tam giác MAC.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hệ số góc của hai đường lần lượt là $2;-\frac{1}{2}$.

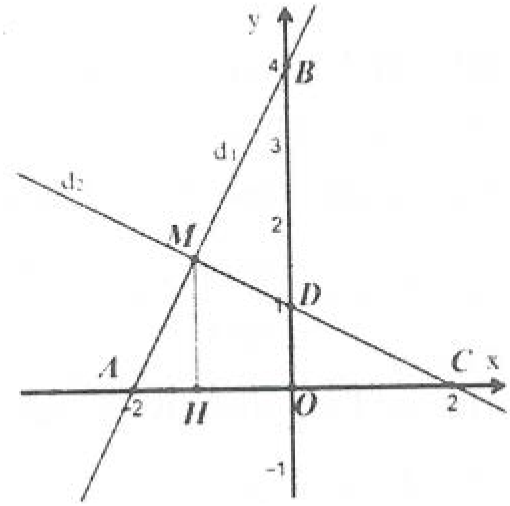
Mà tích của chúng là $2.\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ nên ta có $d_1 \perp d_2$.

Từ đó ta có tam giác MAC vuông tại M.

b) Tìm được $M\left(-\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên trục hoành.

Từ đó có $MH=\frac{8}{5}; AC=4 \Rightarrow S_{MAC}=\frac{1}{2}MH.AC=\frac{16}{5}$.



8.5. Cho ba đường thẳng:

$d_1: y=x+2; d_2: y=2x+1; d_3: y=\left(m^2+1\right)x+m$

a) Tìm giá trị của m để $d_3 \parallel d_2$;

b) Tính các giá trị của m để ba đường thẳng trên cắt nhau tại một điểm.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đường thẳng $d_3: y=\left(m^2+1\right)x+m$ và đường thẳng $d_2: y=2x+1$ song song khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2+1=2 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=1 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-1 \\ m\neq 1 \end{cases}$$

Vậy $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

b) Tìm được $A(1;3)$ là giao điểm của d_1 và d_2.

Khi đó 3 đường d_1, d_2 và d_3 đồng quy khi và chỉ khi:

$A \in d_3 \Leftrightarrow 3=m^2+m+1 \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=-2$.

8.6. Cho hàm số $y=(m+2)x+m-1$.

a) Tìm điều kiện của m để hàm số nghịch biến trên tập số thực.

b) Tìm điều kiện của m để đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

c) Tìm m để đồ thị của các hàm số $y=-x+2, y=2x-1$ và $y=(m-2)x+m-1$ đồng quy.

d) Tìm m để đồ thị hàm số tạo với trục tung và trục hoành một tam giác có diện tích bằng 2.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hàm số $y=(m+2)x+m-1$ nghịch biến $\Leftrightarrow m+2<0 \Leftrightarrow m<-2$.

b) Đồ thị của hàm số $y=(m+2)x+m-1$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3 tức là điểm $A(3;0)$ thuộc đồ thị của hàm số: $y=(m+2)x+m-1$

$\Leftrightarrow 0=3(m+2)+m-1 \Leftrightarrow 4m+5=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{4}$

c) Tìm được điểm $M(1;1)$ là giao điểm của hai đường thẳng $y=-x+2$ và $y=2x-1$. Khi đó:

Đồ thị của các hàm số $y=-x+2, y=2x-1, y=(m-2)x+m-1$ đồng quy.

$\Leftrightarrow$ Điểm $M(1;1)$ thuộc đồ thị của hàm số: $y=(m-2)x+m-1$

$\Leftrightarrow 1=m-2+m-1 \Leftrightarrow m=2$

d) Giả sử hàm số $y=(m+2)x+m-1$ có đồ thị là đường thẳng d, điều kiện: $m\neq -2$

Giả sử d cắt trục Ox tại điểm A, khi đó với:

$y=0 \Rightarrow x=\dfrac{1-m}{m+2} \Rightarrow A\left(\dfrac{1-m}{m+2};0\right) \Rightarrow OA=\dfrac{|1-m|}{|m+2|}$

Giả sử d cắt trục Oy tại điểm B

Khi đó với $x=0 \Rightarrow y=m-1 \Rightarrow B(0;m-1) \Rightarrow OB=|m-1|$

Mà tam giác OAB vuông tại O nên ta có:

$S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=2 \Leftrightarrow \dfrac{|1-m|}{|m+2|}.|m-1|=4 \Leftrightarrow (m-1)^2=4|m+2|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(m-1)^2=4(m+2)\\(m-1)^2=-4(m+2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2-6m-7=0\\m^2+2m+9=0(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=7$ (thỏa mãn)

Vậy $m=-1$ hoặc $m=7$

8.7. Cho hàm số $y=(m+5)x+2m-10$.

a) Chứng minh đồ thị hàm số luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

b) Tìm m để khoảng cách từ O tới đồ thị hàm số lớn nhất.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Gọi $M(x_0;y_0)$ là một điểm thuộc đồ thị của hàm số $y=(m+5)x+2m-10$.

Điểm M cố định $\Leftrightarrow y_0=(m+5)x_0+2m-10$ đúng với mọi m.

$\Leftrightarrow m(x_0+2)+(5x_0-y_0-10)=0$ đúng với mọi m.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+2=0 \\ 5x_0-y_0-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=-20 \end{cases}$$

Như vậy ta có điểm cố định cần tìm là $M(-2;-20)$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d:

$$y=(m+5)x+2m-10$$

Khi đó độ dài đoạn thẳng OH là khoảng cách từ O tới đường thẳng d. Ta có:

$OH \le OM$ (với OM không đổi do O và M cố định).

Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv M \Leftrightarrow d \perp OM$.

Gọi $y=ax+b$ là đường thẳng đi qua hai điểm O, M suy ra $0=b$ và $-20=-2a+b$. Từ đó ta có $a=10;b=0$. Như vậy ta được $y=10x$ là đường thẳng đi qua hai điểm O và M, đường thẳng này có hệ số góc $k_1=10$.

Mà d: $y=(m+5)x+2m-10$ nên hệ số góc của đường thẳng d là $k_2=m+5$.

Do d vuông góc với OM

Suy ra $k_1.k_2=-1 \Leftrightarrow 10(m+5)=-1 \Leftrightarrow 10m+50=-1 \Leftrightarrow m=-\dfrac{51}{10}$ (thỏa mãn)

Vậy $m=-\dfrac{51}{10}$

8.8. Cho hàm số $y=(m-2)x+m+3$.

a) Tìm điều kiện của m để hàm số luôn nghịch biến.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

c) Tìm m để các đồ thị của các hàm số $y=-x+2; y=2x-1$ và $y=(m-2)x+m+3$ đồng quy.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hàm số $y=(m-2)x+m+3$ nghịch biến khi và chỉ khi $m-2<0 \Leftrightarrow m<2$.

b) Đồ thị của hàm số $y=(m-2)x+m+3$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3 tức là điểm $A(3;0)$ thuộc đồ thị của hàm số: $y=(m-2)x+m+3$

$$\Leftrightarrow 0=3(m-2)+m+3 \Leftrightarrow 4m-3=0 \Leftrightarrow m=\frac{3}{4}$$

c) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $y=-x+2; y=2x-1$ là $C(1;1)$. Ba đường thẳng $y=-x+2; y=2x-1$ và $y=(m-2)x+m+3$ đồng qui khi và chỉ khi đường thẳng $y=(m-2)x+m+3$ đi qua điểm $C(1;1)$

$\Leftrightarrow 1=m-2+m+3 \Leftrightarrow m=0$

8.9. Cho hàm số $y=(m-1)x+m+3$.

a) Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số song song với đồ thị hàm số $y=-2x+1$.

b) Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm $(1;-4)$.

c) Tìm điểm cố định mà đồ thị của hàm số luôn đi qua với mọi m.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hàm số $y=(m-1)x+m+3$ có đồ thị song song với đồ thị của hàm số

$y=-2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=-2 \\ m+3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$

b) Hàm số $y=(m-1)x+m+3$ có đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(1;-4)$

$\Leftrightarrow -4=m-1+m+3 \Leftrightarrow m=-3$

c) Gọi $M(x_0;y_0)$ là một điểm thuộc đồ thị của hàm số $y=(m-1)x+m+3$

Điểm M cố định $\Leftrightarrow y=(m-1)x+m+3$ đúng với mọi m.

$$\Leftrightarrow m(x_0+1)+(-x_0-y_0+3)=0 \text{ đúng với mọi m.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+1=0 \\ -x_0-y_0+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=4 \end{cases}$$

Như vậy ta có điểm cố định cần tìm là $M(-1;4)$.

8.10. Cho đường thẳng d có phương trình là $y=mx-m+1$.

Chứng tỏ rằng khi m thay đổi thì đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định ấy.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi $M(x_0;y_0)$ là một điểm thuộc đồ thị của hàm số $y=mx-m+1$

Điểm M cố định $\Leftrightarrow y_0=mx_0-m+1$ đúng với mọi m.

$$\Leftrightarrow m(x_0-1)+(1-y_0)=0 \text{ đúng với mọi m.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ 1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Như vậy ta có điểm cố định cần tìm là $M(1;1)$.

Chuyên đề 9.

ỨNG DỤNG CỦA HÀM BẬC NHẤT
ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

Cho hàm số bậc nhất $f(x) = ax + b$, với $x_1 < x_2$. Ta có:

1) $f(x) \geq 0, \forall x : x_1 \leq x \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) \geq 0 \\ f(x_2) \geq 0 \end{cases}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = x_1 \\ f(x_1) = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = x_2 \\ f(x_2) = 0 \end{cases}$

2) $f(x) \leq 0, \forall x : x_1 \leq x \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) \leq 0 \\ f(x_2) \leq 0 \end{cases}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = x_1 \\ f(x_1) = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = x_2 \\ f(x_2) = 0 \end{cases}$.

Ý nghĩa hình học:

Một đoạn thẳng nằm phía trên trục hoành khi và chỉ khi hai điểm đầu mút của nó nằm phía trên trục hoành.

Một đoạn thẳng nằm phía dưới trục hoành khi và chỉ khi hai điểm đầu mút của nó nằm phía dưới trục hoành.

Nhận xét:

Nếu hệ số $a = 0$ thì $f(x) = b$ (hàm hằng). Khi đó các tính chất trên cũng đúng do đồ thị của hàm hằng cũng là một đường thẳng. Các tính chất khác của hàm hằng chúng tôi sẽ trình bày ở chương III của cuốn sách này.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho $0 \leq x, y, z \leq 2$ .Chứng minh rằng $2(x + y + z) - (xy + yz + zx) \leq 4$.

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương:

$$2(x + y + z) - (xy + yz + zx) \leq 4 \Leftrightarrow x(2 - y - z) + 2(y + z) - yz - 4 \leq 0$$

Coi x là biến số và y, z là tham số, đặt $f(x) = x(2 - y - z) + 2(y + z) - yz - 4$

Xét hàm $f(x)$ với $0 \le x \le 2$.Ta có:

$f(0) = 2(y+z) - yz - 4 = (2-y)(z-2) \le 0$

$f(2) = -yz \le 0$

Như vậy, ta có $f(x) \le 0$ với mọi x thõa mãn $0 \le x \le 2$.   .

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = 0 \\ f(0) = (2-y)(z-2) = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ f(x) = -yz = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

Nhận xét:

Để giải bài toán chứng minh bất đẳng thức sử dụng tính chất hàm bậc nhất chúng ta chia thành các bước sau:

Bước 1: Tạo ra một hàm số dạng $f(t) = at + b$

Bước 2: Xác định t_1, t_2 sao cho: $t_1 \le t \le t_2$.

Bước 3:

1) Chứng minh $f(t_1) \ge 0$ và $f(t_2) \ge 0$. Từ đó suy ra $f(t) \ge 0$, với mọi t thỏa mãn $t_1 \le t \le t_2$.

2) Chứng minh $f(t_1) \le 0$ và $f(t_2) \le 0$. Từ đó suy ra $f(t) \le 0$, với mọi t thỏa mãn $t_1 \le t \le t_2$.

Ví dụ 2: Cho 3 số thực không âm x, y , z thỏa mãn: $x + y + z = 1$

Chứng minh rằng: $xy + yz + xz - 2xyz \le \frac{7}{27}$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$yz(1-2x) + x(1-x) - \frac{7}{27} \le 0 (*)$

Đặt $t = yz$, coi t là biến và x là tham số.

Ta được $VT(*) = f(t) = t(1-2x) + x - x^2 - \frac{7}{27}$

Theo bất đẳng thức Cô – si: $t = yz \le \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4} \Rightarrow 0 \le t \le \frac{(1-x)^2}{4}$

Mà $f(0) = x - x^2 - \frac{7}{27} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{108} < 0 \;\; (\forall x \in \mathbb{R});$

$$f\left(\frac{(1-x)^2}{4}\right)=-\frac{54x^3-27x^2+1}{108}=-\frac{(3x-1)^2(6x+1)}{108}\le 0\ \ (\forall x\ge 0)$$

Suy ra $f(t)\le 0$ với mọi t thõa mãn $0\le t\le \frac{(1-x)^2}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} yz=\frac{(1-x)^2}{4} \\ f\left(\frac{(1-x)^2}{4}\right)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{6}\right)=0 \\ y=z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$$

Nhận xét:

Với cách làm tương tự ta có thể giải được bài tổng quát sau:

Cho hằng số $m\ge -\frac{9}{4}$ và x, y, z là các số thực không âm thõa mãn: $x+y+z=1$

Khi đó ta luôn có $0\le mxyz+xy+yz+zx\le \frac{m+9}{27}$

Ví dụ 3: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$

Chứng minh rằng $\left(\frac{4a}{b+c}+1\right)\left(\frac{4b}{c+a}+1\right)\left(\frac{4c}{a+b}+1\right)>25$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\frac{3a+1}{1-a}.\frac{3b+1}{1-b}.\frac{3c+1}{1-c}>25$$

$$\Leftrightarrow 27abc+9(ab+bc+ca)+4>25(ab+bc+ca)-25abc$$

$$\Leftrightarrow 52abc-16(ab+bc+ca)+4>0$$

$$\Leftrightarrow ab(52c-16)-16c(1-c)+4>0\quad (*)$$

Do tính đối xứng với các biến a, b, c nên không mất tính tổng quát, giả sử $a\le b\le c$

Do $a+b+c=1$ nên $c\ge \frac{1}{3}$

Với $t = ab, 0 < t = ab \le \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(1-c)^2}{4}$

Đặt $f(t) = t(52c-16) - 16c(1-c) + 4 = VT(*)$.

Ta lại có:

$f(0) = 16c^2 - 16c + 4 = 4(2c-1)^2 \ge 0.$

$$f\left(\frac{(1-c)^2}{4}\right) = 13c^3 - 14c^2 + 5c = c\left(13c^2 - 14c + 5\right)$$

$$= 13c\left[\left(c - \frac{7}{13}\right)^2 + \frac{16}{168}\right] > 0 \quad \left(\forall c \ge \frac{1}{3}\right)$$

Từ đó suy ra $52abc - 16(ab + bc + ca) + 4 \ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} ab = 0 \\ f(0) = 4(2c-1)^2 = 0 \end{cases}$ (Vô lý vì ab dương)

Nhận xét:

Bài toán trên là hệ số của bài toán gốc sau đây:

Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$ và hằng số m thỏa mãn $-9 \le m \le \frac{-9}{4}$

Chứng minh rằng: $0 \le xy + yz + zx + mxyz \le \frac{1}{4}$

Ví dụ 5: Cho $0 \le a, b, c \le 1$. Chứng minh rằng: $(1-a)(1-b)(1-c) + a + b + c \ge 1$

Giải

Coi a là biến và b, c là các tham số

Xét hàm số $f(a) = (1-a)(1-b)(1-c) + a + b + c - 1$ với $0 \le a \le 1$

Lại có: $\begin{aligned} &f(0) = (1-b)(1-c) + b + c - 1 = bc \ge 0 \\ &f(1) = b + c \ge 0 \end{aligned}$

Suy ra $f(a) \ge 0$, với mọi $0 \le a \le 1$

Đẳng thức sảy ra khi $(a,b) = (0,0)$ hoặc $(b,c) = (0,0)$ hoặc $(c,a) = (0,0)$.

Nhận xét:

Từ bài toán trên ta có bài toán tương tự:

Cho $0 \le a,b,c,d \le 1$

Chứng minh rằng $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d \ge 1$

Ví dụ 6: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng: $4\left(x^3+y^3+z^3\right)+15xyz \ge 1$

Giải

Xét biểu thức

$P=4\left(x^3+y^3+z^3\right)+15xyz-1$

$=4(x+y)^3-12xy(x+y)+4z^3+15xyz-1$

$=4(1-z)^3-12xy(1-z)+4z^3+15xyz-1$

$=xy(27z-12)+3\left(4z^2-4z+1\right)$

Đặt $t=xy$, coi z là biến ta được hàm số: $P=f(t)=t(27z-12)+3\left(4z^2-4z+1\right)$

Lại có $0<t=xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{(1-z)^2}{4}$

$f(0)=4(2z-1)^2 \ge 0$ với mọi z.

$f\left(\dfrac{(1-z)^2}{4}\right)=27z^3-18z^2+3z=3z\left(9z^2-6z+1\right)=3z(3z-1)^2 \ge 0$ với mọi số dương z.

Từ đó suy ra $P \ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$

Nhận xét:

$P=4\left(x^3+y^3+z^3\right)+15xyz-1$

$=4\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)+27xyz-1$

$=4(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)+27xyz-1$

$=4\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)+27xyz-1$

$=4\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right]+27xyz-1$

$=27xyz-12(xy+yz+zx)+3$

Đến đây, ta thấy bài toán trên chỉ là hệ quả của bài toán sau:

Cho hằng số $m \ge \frac{-9}{4}$ và x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn: $x+y+z=1$. Khi đó ta có

$0 \le mxyz + xy + yz + zx \le \frac{m+9}{27}$

C. Bài tập vận dụng

9.1. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+abc \ge 4$

Hướng dẫn giải – đáp số

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương $a^2+b^2+c^2+abc-4 \ge 0 \quad (*)$

Do $a+b+c=3 \Leftrightarrow a+b=3-c$ .Từ đó ta có:

$$VT(*) = a^2+b^2+c^2+abc-4$$

$$= (a+b)^2 - 2ab + c^2 + abc - 4$$

$$= (3-c)^2 - 2ab + c^2 + abc - 4$$

$$= ab(c-2) + 2c^2 - 6c + 5$$

Do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $c \le b \le a$. Mà $a+b+c=3 \Rightarrow c \le 1$

Xét hàm số bậc nhất biến t là:

$f(t) = t(c-2) + 2c^2 - 6c + 5$,với $t = ab$ và $0 < t = ab \le \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(3-c)^2}{4}$

Ta có: $f(0) = 2c^2 - 6c + 5 = 2\left(c^2 - 3c + \frac{9}{4}\right) + \frac{1}{2} = 2\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$ với mọi c.

$f\left(\frac{(3-c)^2}{4}\right) = \frac{(3-c)^2}{4}(c-2) + 2c^2 - 6c + 5 = \frac{c^3 - 3c + 2}{4} = \frac{(c-1)^2(c+2)}{4} \ge 0$ với mọi c.

Từ đó ta có: $f(t) \ge 0$ với mọi $0 \le t \le \frac{(3-c)^2}{4}$

Suy ra $f(t) \ge 0$ với mọi $0 < t \le \frac{(3-c)^2}{4}$. Tức là bất đẳng thức $(*)$ đúng

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=b \\ ab=\dfrac{(3-c)^2}{4} \\ \dfrac{(c-1)^2(c+2)}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

9.2. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$

Chứng minh rằng $xy+yz+zx-\dfrac{9}{4}xyz\le\dfrac{1}{4}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương $xy+yz+zx-\dfrac{9}{4}xyz-\dfrac{1}{4}\le 0 \quad (*)$

Ta có: Do $x+y+z=1\Leftrightarrow x+y=1-z$. Khi đó

$$VT(*)=xy+yz+zx-\frac{9}{4}xyz-\frac{1}{4}$$

$$=xy\left(1-\frac{9}{4}z\right)+z(x+y)-\frac{1}{4}$$

$$=xy\left(1-\frac{9}{4}z\right)+z(1-z)-\frac{1}{4}$$

Do vai trò x, y, z như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử

$z\le y\le z\Rightarrow z\le\dfrac{1}{3}\Rightarrow z<\dfrac{4}{9}\Rightarrow\dfrac{9}{4}z-1<0$ hay $1-\dfrac{9}{4}z>0$

Xét hàm số bậc nhất biến t là :

$f(t)=t\left(1-\dfrac{9}{4}z\right)-\left(z^2-z+\dfrac{1}{4}\right)$, với $t=xy$ và $0<t=xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{(1-z)^2}{4}$

Ta có: $f(0)=-\left(z^2-z+\dfrac{1}{4}\right)=-\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2<0$ với mọi $z\le\dfrac{1}{3}$

$$f\left(\frac{(1-z)^2}{4}\right)=\frac{(1-z)^2}{4}\left(1-\frac{9}{4}z\right)-\left(z^2-z+\frac{1}{4}\right)=-\frac{9z^3-6z^2+z}{16}=-\frac{z(3z-1)^2}{16}\le 0$$

Từ hai điều trên ta có $(*)$ đúng

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$

9.3. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$

Chứng minh rằng: $x^3+y^3+z^3+6xyz \ge \frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Do vai trò x, y, z như nhau, ta giả sử $x \le y \le z$

Mà $x+y+z=1 \Rightarrow \begin{cases} z \ge \frac{1}{3} \\ x+y=1-z \end{cases}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$3x^3+3y^3+3z^3+18xyz-1 \ge 0 \qquad (*)$

Xét biểu thức:

$$VT(*) = 3(x^3+y^3+z^3)+18xyz-1$$

$$=3(x+y)^3-9xy(x+y)+3x^3+18xyz-1$$

$$=3(1-z)^3-9xy(1-z)+3x^3+18xyz-1$$

$$=xy(27z-9)+(9z^2-9z+2)$$

Đặt $t=xy$, coi t là biến và z là tham số ta được hàm số:

$f(t)=t(27z-9)+(9z^2-9z+2)$, với $0<t=xy \le \frac{(x+y)^2}{4}=\frac{(1-z)^2}{4}$

Ta có: $f(0)=(3z+2)(3z-1) \ge 0$ với mọi $z \ge \frac{1}{3}$

$f\left(\frac{(1-z)^2}{4}\right)=(3z-1)^3 \ge 0$ với mọi số dương z

Từ hai điều trên ta có $(*)$ đúng

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Chương 3 HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Chuyên đề 10. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức dạng $ax+by=c$ (1), trong đó a, b, c là các số đã biết $(a \neq 0$ hoặc $b \neq 0)$

- Nếu x_0; y_0 thỏa mãn (1) thì cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình (1)

2. Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by=c$ luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax+by=c$, kí hiệu là (d)

3. Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì đường thẳng (d) chính là đồ thị của hàm số

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

- Nếu $a \neq 0$ và $b=0$ thì phương trình trở thành $x=\frac{c}{a}$, và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung

- Nếu $a=0$ và $b \neq 0$ thì phương trình trở thành $y=\frac{c}{b}$, và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành.

4. Cho hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $(1)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

- Nếu hai phương trình ấy có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của hệ (1)

- Nếu hai phương trình đã cho không có nghiệm chung thì ta nói hệ (1) vô nghiệm.

Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó

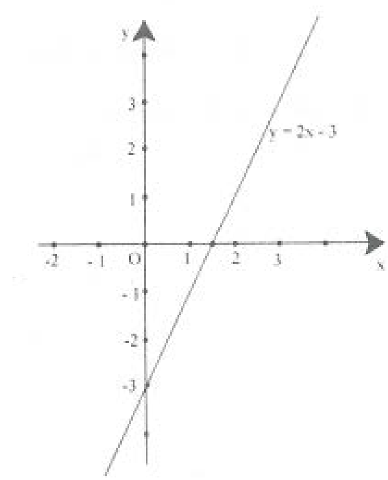
5. Tập nghiệm của hệ phương trình (1) được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng .Vậy : (d): $ax+by=c$ và (d'): $a'x+b'y=c'$ .Vậy :

- Nếu (d) cắt (d') thì (1) có một nghiệm duy nhất.
- Nếu $(d)//(d')$ thì hệ (1) vô nghiệm.
- Nếu (d) trùng với (d') thì hệ (1) vô số nghiệm.

6. Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tìm công thức nghiệm tổng quát của mỗi phương trình sau và biểu diễn hình học tập nghiệm của nó.



a) $2x-y=3$

b) $4x+0y=8$

c) $0x-3y=6$

Giải

a) $2x-y=3 \Leftrightarrow y=2x-3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$

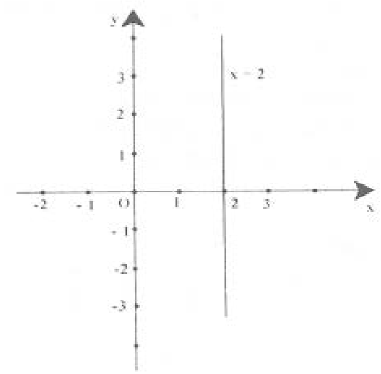
Ta có tập nghiệm của phương trình đã cho là $\begin{cases} x\in R \\ y=2x-3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2} \\ y\in R \end{cases}$

Biểu diễn hình học tập nghiệm:

b) $4x+0y=8 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=8 \\ y \in R \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Ta có tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x=2 \\ y \in R \end{cases}$

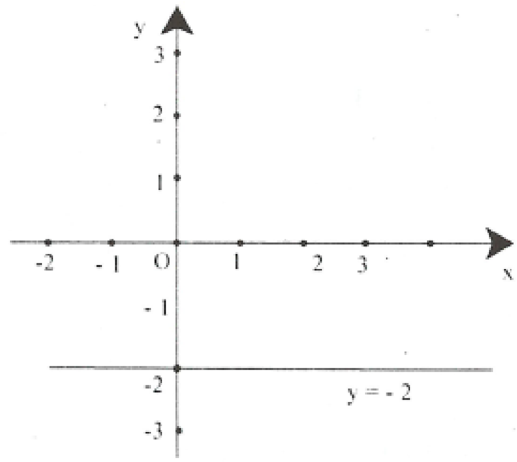
Biểu diễn hình học tập nghiệm



c) $0x-3y=6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ -3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow y=-2$

Ta có tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x \in R \\ y=-2 \end{cases}$

Biểu diễn hình học tập nghiệm



Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $5x+3y=2$

b) $38x+117y=15$

c) $21x-18y=4$

Giải

- **Tìm cách giải.** Để tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax+by=c$, ta thường biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ theo ẩn kia. Chẳng hạn ở câu a:

  - Biểu thị ẩn y theo ẩn x

  - Tách riêng giá trị nguyên ở biểu thức chứa x

  - Đặt điều kiện để phân số trong biểu thức của x bằng số nguyên t, ta được một phương trình bậc nhất hai ẩn x và t

  - Cứ tiếp tục làm như trên cho đến khi các ẩn đều biểu thị dưới dạng đa thức với hệ số nguyên

- **Trình bày lời giải**

a) $5x+3y=2 \Rightarrow y=\dfrac{2-5x}{3}=1-2x+\dfrac{x-1}{3}$ nếu x là số nguyên thì $1-2x$ là số nguyên

$y \in Z \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{3} \in Z$

Đặt $\dfrac{x-1}{3} = t\ (t \in Z) \Rightarrow x-1 = 3t \Rightarrow x = 3t+1$

Do đó $y = 1-2(3t+1) = -5t-1$

Vậy nghiệm nguyên tổng quát của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = -5t-1 \\ t \in Z \end{cases}$

b) $38x + 117y = 15$

$\Rightarrow x = \dfrac{15-117y}{38} = -3y + \dfrac{15-3y}{38}$ nếu y là số nguyên thì $-3y$ là số nguyên

$x \in Z \Leftrightarrow \dfrac{15-3y}{38} \in Z$. Đặt $\dfrac{15-3y}{38} = t\ (t \in Z)$

$\Rightarrow 15-3y = 38t \Rightarrow y = \dfrac{-38t+15}{3} = 5-13t+\dfrac{t}{3}$

Ta có: $t \in Z \Leftrightarrow 5-13t \in Z$

$y \in Z \Leftrightarrow \dfrac{t}{3} \in Z$. Đặt $\dfrac{t}{3} = m(m \in Z) \Rightarrow t = 3m$

Do đó: $y = 5-13.3m+m = 5-38m$

Suy ra: $x = -3(5-38m)+3m = 117m-15$

Vậy nghiệm nguyên tổng quát của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x = 117m-15 \\ y = 5-38m \\ m \in Z \end{cases}$

c) $21x - 18y = 4$

Với x, y là số nguyên thì vế trái chia hết cho 3, vế phải không chia hết cho 3.

Vậy không tồn tại số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình.

● **Nhận xét:** Câu c, ta chỉ cần chú ý đến tính chia hết của hệ số các ẩn.

Tổng quát. Xét phương trình $ax + by = c$, trong đó a, b, c là các số nguyên và ƯCLN$(a; b; c) = 1$. Người ta đã chứng minh được nếu ƯCLN$(a; b) = 1$ thì phương trình luôn có nghiệm, nếu ƯCLN$(a; b) = d \neq 1$ thì phương trình luôn vô nghiệm.

Ví dụ 3: Trên đường thẳng $8x - 13y + 6 = 0$, hãy tìm các điểm nguyên (là điểm có tọa độ là số nguyên) nằm giữa hai đường thẳng $x = -15$ và $x = 40$

Giải

● **Tìm cách giải.** Bản chất của bài toán là tìm nghiệm nguyên của phương trình $8x - 13y + 6 = 0$ và chỉ lấy các giá trị của x sao cho $-15 < x < 40$. Do vậy:

- Bước 1. Tìm nghiệm nguyên tổng quát của phương trình

- Bước 2. Xét miền giá trị $-15 < x < 40$ để tìm nghiệm.

● **Trình bày lời giải:**

Giả sử $M(x; y)$ với $x; y \in Z$ là điểm thuộc đường thẳng $8x - 13y + 6 = 0$ suy ra $x; y$ là nghiệm nguyên của phương trình này.

Ta có $8x - 13y + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{13y - 6}{8} = 2y - \dfrac{6 + 3y}{8}$ nếu y là số nguyên thì $2y$ là số nguyên $x \in Z \Leftrightarrow \dfrac{6 + 3y}{8} \in Z$

Đặt $\dfrac{6 + 3y}{8} = t\,(t \in Z) \Rightarrow 6 + 3y = 8t \Rightarrow y = \dfrac{8t - 6}{3} = 3t - 2 - \dfrac{t}{3}$

Ta có: $t \in Z \Leftrightarrow 3t - 2 \in Z$

$y \in Z \Leftrightarrow \dfrac{t}{3} \in Z$. Đặt $\dfrac{t}{3} = m\left(m \in Z\right) \Rightarrow t = 3m$

Do đó $y = 3.3m - 2 - m = 8m - 2$; $x = 2\left(8m - 2\right) - 3m = 13m - 4$

Nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là: $\begin{cases} x = 13m - 4 \\ y = 8m - 2 \\ m \in Z \end{cases}$

Do $-15 < x < 40 \Rightarrow -15 < 13m - 4 < 40 \Rightarrow -\dfrac{11}{13} < m < \dfrac{44}{13}$

Vì $m \in Z$ nên $m \in \left\{0;1;2;3\right\}$. Từ đó tìm được bốn điểm nguyên là $\left(-4;-2\right)$; $\left(9;6\right)$; $\left(22;14\right)$; $\left(35;22\right)$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 6$; $x = 42$; $y = 2$; $y = 17$ không có điểm nguyên nào thuộc đường thẳng $3x + 5y = 7$

Giải

● ***Tìm cách giải.*** Bản chất của bài toán là chứng tỏ phương trình $3x + 5y = 7$ không có nghiệm nguyên thỏa mãn $6 < x < 42$ và $2 < y < 17$. Do vậy:

- Bước 1. Tìm nghiệm nguyên tổng quát của phương trình.

- Bước 2. Xét miền giá trị $-15 < x < 40$ và $2 < y < 17$ để từ đó chứng tỏ không tồn tại x và y nguyên.

● **Trình bày lời giải**

Giả sử $M\left(x;y\right)$ với $x;y \in Z$ là điểm thuộc đường thẳng $3x + 5y = 7$ suy ra $x;y$ là nghiệm nguyên của phương trình này.

Ta có $3x+5y=7 \Rightarrow \frac{7-5y}{3}=2-2y+\frac{1+y}{3}$ nếu y là số nguyên thì $2y$ là số nguyên $x \in Z \Leftrightarrow \frac{1+y}{3} \in Z$

Đặt $\frac{1+y}{3}=t\left(t \in Z\right) \Rightarrow 1+y=3t \Rightarrow y=3t-1$

Do đó $x=2-2\left(3t-1\right)+t=-5t+4$

Vậy nghiệm nguyên tổng quát của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x=-5t+4 \\ y=3t-1 \\ t \in Z \end{cases}$

Nếu tồn tại điểm nguyên thuộc đường thẳng $3x+5y=7$ thỏa mãn đề bài thì $6<x<42$ và $2<y<17$, suy ra $6<-5t+4<42$ và $2<3t-1<17$

Từ đó ta có: $1<t<-\frac{2}{5}$

Điều này không xảy ra.

Vậy trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x=6$; $x=42$; $y=2$; $y=17$ không có điểm nguyên nào thuộc đường thẳng $3x+5y=7$

Ví dụ 5: Không giải hệ phương trình, chỉ dựa vào các hệ số của các phương trình trong hệ hãy cho biết số nghiệm của hệ phương trình sau và giải thích tại sao?

a) $\begin{cases} y=5-x \\ y=3x-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+1 \\ y=-\frac{2}{3}x+3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2} \end{cases}$

Giải

● **Tìm cách giải**. Hệ phương trình viết dưới dạng: $\begin{cases} y = ax + b & (1) \\ y = a'x + b' & (2) \end{cases}$ thì số nghiệm của hệ phương trình là số giao điểm của phương trình (1) và (2) do vậy:

- Nếu $a \neq a'$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

- Nếu $a = a'$, $b \neq b'$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

- Nếu $a = a'$, $b = b'$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

● **Trình bày lời giải**

a) Hệ phương trình có một nghiệm vì hai đường thẳng có phương trình đã cho trong hệ là hai đường thẳng có hệ số góc khác nhau (nên chúng cắt nhau tại một điểm duy nhất)

b) Hệ phương trình vô nghiệm vì hai đường thẳng có phương trình đã cho trong hệ là hai đường thẳng khác nhau và có cùng hệ số góc (nên chúng song song với nhau)

c) Hệ phương trình vô số nghiệm vì hai đường thẳng có phương trình đã cho trong hệ là hai đường thẳng trùng nhau và trùng với đường thẳng $y = 2x - 1$

Ví dụ 6: Không giải phương trình, chỉ dựa vào các hệ số của các phương trình trong hệ, hãy cho biết số nghiệm của hệ phương trình sau và giải thích tại sao?

a) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -4x + 4y = -5 \end{cases}$

Giải

Tìm cách giải: Cần lưu ý đến tỉ số $\frac{a}{a'}$; $\frac{b}{b'}$ và $\frac{c}{c'}$ để rút ra kết luận về số nghiệm của hệ phương trình. Cụ thể là:

- Nếu $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

- Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình vô nghiệm

- Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm

Trình bày lời giải

a) Ta có: $\frac{1}{3} \neq \frac{-2}{2}$. Hệ có nghiệm duy nhất

b) Ta có: $\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{4}{-8}$. Hệ có vô số nghiệm

c) Ta có: $\frac{1}{-4} = \frac{-1}{4} \neq \frac{1}{-5}$. Hệ vô nghiệm

Ví dụ 6: Cho đường thẳng $(m-2)x+(m-1)y=1$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng đường thẳng luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ O đến đường thẳng là lớn nhất

Giải

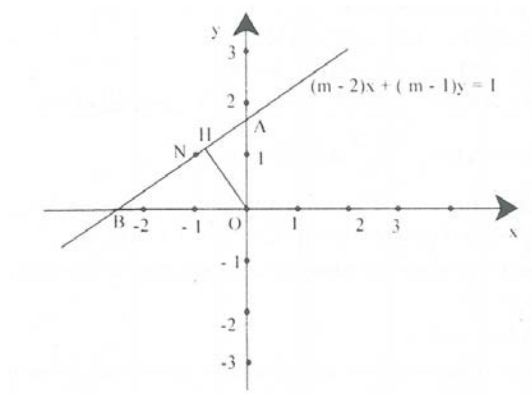
a) Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(m-2)x+(m-1)y=1$ (1) đi qua điểm cố định $N(x_0; y_0)$ là $(m-2)x_0+(m-1)y_0=1$ với mọi m

$\Leftrightarrow mx_0 - 2x_0 + my_0 - y_0 = 1$ với mọi m

$\Leftrightarrow (x_0 + y_0)m - (2x_0 + y_0 + 1) = 0$ với mọi m

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 = 0 \\ 2x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

Vậy đường thẳng luôn đi qua một điểm cố định $N(-1;1)$ với mọi giá trị của m



b) - Xét $m = 2$, phương trình đường thẳng là: $y = 1$. Khoảng cách từ O tới đường thẳng là 1.

- Xét $m = 1$, phương trình đường thẳng là: $x = -1$. Khoảng cách từ O tới đường thẳng là 1.

- Xét $m \notin \{2;1\}$. Gọi A là giao điểm của đường thẳng (1) với trục tung

Ta có: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{m-1}$, do đó $OA = \frac{1}{|m-1|}$

Gọi B là giao điểm của đường thẳng (1) với trục hoành

Ta có $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{m-2}$, do đó $OB = \frac{1}{|m-2|}$

Gọi h là khoảng các từ O đến đường thẳng (1)

Ta có: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = (m-1)^2 + (m-2)^2 = 2m^2 - 6m + 5$

$$2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

Suy ra: $h^2\leq 2\Rightarrow h\leq\sqrt{2}$

Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến đường thẳng là $\sqrt{2}$ khi $m=\frac{3}{2}\left(\text{vì }\sqrt{2}>1\right)$

C. Bài tập vận dụng

10.1. Tìm các số tự nhiên n sao cho:

a) n chia hết cho 9 và $n+1$ chia hết cho 25

b) n chia hết cho 21 và $n+1$ chia hết cho 165

c) n chia hết cho 9; $n+1$ chia hết cho 25 và $n+2$ chia hết cho 4

Hướng dẫn giải – đáp số

a) n chia hết cho 9, đặt $n = 9k\ (k\in N)$

$n+1$ chia hết cho 25 đặt $n+1=25m\,(m\in N)$

Suy ra: $9k+1=25m\ \Rightarrow k=\frac{25m-1}{9}=3m-\frac{2m+1}{9}$.

Vì $m\in N,k\in N\Leftrightarrow\frac{2m+1}{9}\in N$.

Đặt $\frac{2m+1}{9}=t\ \ (t\in N)\Rightarrow 2m+1=9t\Rightarrow m=4t+\frac{t-1}{2}$.

Vì $t\in N,m\in N\Leftrightarrow\frac{t-1}{2}\in N$.

Đặt $\frac{t-1}{2}=y\ (y\in N)\ \Rightarrow t-1=2y\Rightarrow t=2y+1$.

Suy ra: $m=4.(2y+1)+y=9y+4 \Rightarrow n+1=25(9y+4)$ $\Rightarrow n=225y+99$ $(y\in N)$ thì n chia hết cho 9 và $n+1$ chia hết cho 25.

b) n chia hết cho 21, đặt $n=21k$ $(k\in N)$

$n+1$ chia hết cho 165, đặt $n+1=165m$ $(m\in N)$

Suy ra: $21k+1=165m$

$165m-21k=1$. Vế trái chia hết cho 3, vế phải không chia hết cho 3, suy ra không tồn tại số tự nhiên m, k thỏa mãn $165m-21k=1$. Vậy không tồn tại số tự nhiên n để n chia hết cho 21 và $n+1$ chia hết cho 165.

c) Theo câu a, n chia hết cho 9; $n+1$ chia hết cho 25 thì $n=225y+99$ $(y\in N)$

Để $n+2$ chia hết cho 4 $\Rightarrow 225y+99+2 \vdots 4$.

Đặt $225y+101=4x$ $(x\in N)$ $\Rightarrow x=56y+25+\dfrac{y+1}{4}$.

Vì $y\in N, x\in N$ $\Leftrightarrow \dfrac{y+1}{4}\in N$. Đặt $\dfrac{y+1}{4}=t$ $(t\in N)$ $\Rightarrow y+1=4t \Rightarrow y=4t-1$.

Do đó $n=225(4t-1)+99=900t-126$ $(t\in N)$ thì n chia hết cho 9, $n+1$ chia hết cho 25 và $n+2$ chia hết cho 4.

10.2. Tìm số tự nhiên n để $\dfrac{5n+2}{17}$ là số tự nhiên

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $\dfrac{5n+2}{17}=t$ $(t\in N)$ $\Rightarrow 5n+2=17t$ $\Leftrightarrow n=\dfrac{17t-2}{5}=3t+\dfrac{2t-2}{5}$.

Ta có $t\in N$ $\Leftrightarrow 3t\in N, n\in N$ $\Leftrightarrow \dfrac{2t-2}{5}\in N$

Đặt $\frac{2t-2}{5}=m\ (m\in N)\ \Leftrightarrow 2t-2=5m\ \Leftrightarrow t=\frac{5m+2}{2}=2m+1+\frac{m}{2}$.

Ta có $m\in N\ \Leftrightarrow 2m+1\in N, t\in N\ \Leftrightarrow \frac{m}{2}\in N$. Đặt $\frac{m}{2}=k\ (k\in N)\ \Rightarrow m=2k$

Suy ra : $t=2.2k+1+k=5k+1$

Do đó $n=3.(5k+1)+2k=17k+3\ (k\in N)$ thì $\frac{5n+2}{17}$ là số tự nhiên

10.3. Trên đường thẳng $11x+18y=120$, hãy tìm các điểm nguyên (là điểm có tọa độ là số nguyên) nằm giữa hai đường thẳng $y=-18$ và $y=30$

Hướng dẫn giải – đáp số

Giả sử $M(x;y)$ với $x;y\in Z$ là điểm thuộc đường thẳng $11x+18y=120$

Suy ra $x;y$ là nghiệm nguyên của phương trình này.

Ta nhận thấy $18y$ và 120 chia hết cho 6 nên $11x$ chia hết cho 6 $\Rightarrow x\,\vdots\,6$

Đặt $x=6k\ (k\in Z)$ thay vào (1) và rút gọn ta được: $11k+3y=20$

$\Rightarrow y=\frac{20-11k}{3}=7-4k+\frac{k-1}{3}$ nếu k là số nguyên thì $7-4k$ là số nguyên.

$y\in Z\Leftrightarrow \frac{k-1}{3}\in Z$.Đặt $\frac{k-1}{3}=t\ \ (t\in Z)\Rightarrow k=3t+1.$

Do đó $y=7-4.(3t+1)+t=3-11t$; $x=6k=6.(3t+1)=18t+6$

Nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là: $\begin{cases}x=18t+6\\ y=3-11t\\ t\in Z\end{cases}$

Do $-18<y<30\Rightarrow 18<3-11t<30\Rightarrow -\frac{27}{11}<t<\frac{21}{11}$

Vì $t \in Z$ nên $t \in \{-2; -1; 0; 1\}$ .Từ đó tìm được bốn điểm nguyên là $(-30; 25); (-12;14); (6;3); (24;-8)$

10.4. Giải và biện luận phương trình nghiệm nguyên theo số nguyên m

a) $6x - 11y = m + 2$

b) $3x - (m-2)y = m + 1$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $6x - 11y = m + 2 \Rightarrow 6x = m + 2 + 11y$; $x = 2y + \dfrac{m+2-y}{6}$.

Đặt $\dfrac{m+2-y}{6} = t \Rightarrow y = m + 2 - 6t \quad (t \in Z)$

Do đó $x = 2(m + 2 - 6t) + t = 2m + 4 - 11t$.

Vậy nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là: $\begin{cases} x = 2m + 4 - 11t \\ y = m + 2 - 6t \\ t \in Z. \end{cases}$

b) $3x - (m-2)y = m + 1$

Trường hợp 1. Xét $m - 2 = 3k \Rightarrow m = 3k + 2 \quad (k \in Z)$

Phương trình có dạng: $3x - 3ky = 3k + 3 \Rightarrow x + ky = k + 1$

Suy ra nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là: $\begin{cases} x = k + 1 - ky \\ y \in Z. \end{cases}$

Trường hợp 2. Xét $m - 2 = 3k + 1 \Rightarrow m = 3k + 3 \quad (k \in Z)$

Phương trình có dạng: $3x - (3k+1)y = 3k + 4 \Rightarrow x = ky + k + 1 + \dfrac{y+1}{3}$.

Đặt $\frac{y+1}{3}=t\ \left(t\in Z\right)\ \Rightarrow y=3t-1.$

Do đó $x=k\left(3t-1\right)+k+1+t=\left(3k+1\right)t+1$

Suy ra nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là: $\begin{cases}x=\left(3k+1\right)t+1\\ y=3t-1\\ t\in Z\end{cases}$

Trường hợp 3. Xét $m-2=3k+2\Rightarrow m=3k+4\ \ \left(k\in Z\right)$

Phương trình có dạng: $3x-\left(3k+2\right)y=3k+5\Rightarrow x=\left(k+1\right)y+k+2-\frac{y+1}{3}.$

Đặt $\frac{y+1}{3}=t\ \left(t\in Z\right)\ \Rightarrow y=3t-1.$

Suy ra nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là: $\begin{cases}x=\left(3k+2\right)t+1\\ y=3t-1\\ t\in Z.\end{cases}$

10.5. Chứng minh rằng trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x=-5$; $x=23$; $y=6$; $y=60$ không có điểm nguyên nào thuộc đường thẳng $11x+8y=73$

Hướng dẫn giải – đáp số

Giả sử $M\left(x;y\right)$ với $x;y\in Z$ là điểm thuộc đường thẳng $11x+8y=73$

Suy ra $x;y$ là nghiệm nguyên của phương trình này.

Ta có $11x+8y=73\Rightarrow y=\frac{73-11x}{8}=8-x+\frac{3\left(3-x\right)}{8}$

Đặt $\frac{3-x}{8}=t\ \left(t\in Z\right)\Rightarrow x=3-8t.$

Do đó $y=8-\left(3-8t\right)+3t=5+11t$

Vậy nghiệm nguyên tổng quát của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x = 3 - 8t \\ y = 5 + 11t \\ t \in Z. \end{cases}$

Nếu tồn tại điểm nguyên thuộc đường thẳng $3x + 5y = 7$ thỏa mãn đề bài thì $-5 < x < 23$ và $6 < y < 60$, suy ra $-5 < 3 - 8t < 23$ và $6 < 5 + 11t < 60.$

Từ đó ta có: $-\frac{5}{2} < t < 1$ và $\frac{1}{11} < t < 5$. Điều này không xảy ra.

Vậy trong hình chữ nhật giới hạn bởi đường thẳng $x = -5;\ x = 23;\ y = 6;\ y = 60$ không có điểm nguyên nào thuộc đường thẳng $11x + 8y = 73$.

10.6. Xác định nghiệm của hệ phương trình sau bằng phương pháp hình học.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Rút y từ mỗi phương trình đã cho để có hàm số bậc nhất của biến số x, sau đó biểu diễn bằng phương pháp hình học rồi xác định nghiệm của hệ.

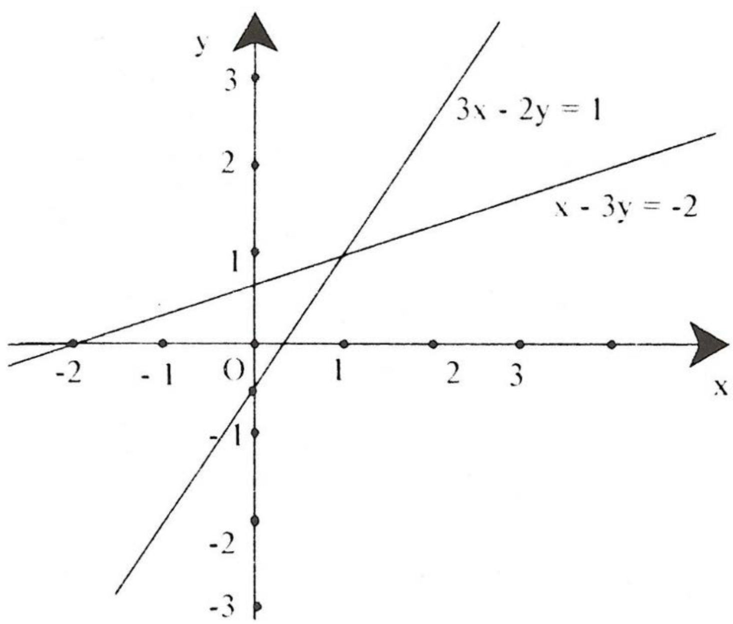
a) $3x - 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = 3x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$

$x - 3y = -2 \Leftrightarrow 3y = x + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$

x	0	1
y	$-\frac{1}{2}$	1

x	0	1
y	$\frac{2}{3}$	1

Nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(1;1)$



$3x-2y=-1 \Leftrightarrow 2y=3x+1 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}.$

$2x+y=4 \Leftrightarrow y=-2x+4.$

x	0	1
y	$\frac{1}{2}$	2

x	0	1
y	4	2

Nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(1;2)$

10.7. Cho hai phương trình $mx-2y=3$ và $3x-5y=n+8$. Biết rằng hai phương trình có vô số nghiệm chung. Hãy tính $m-n$

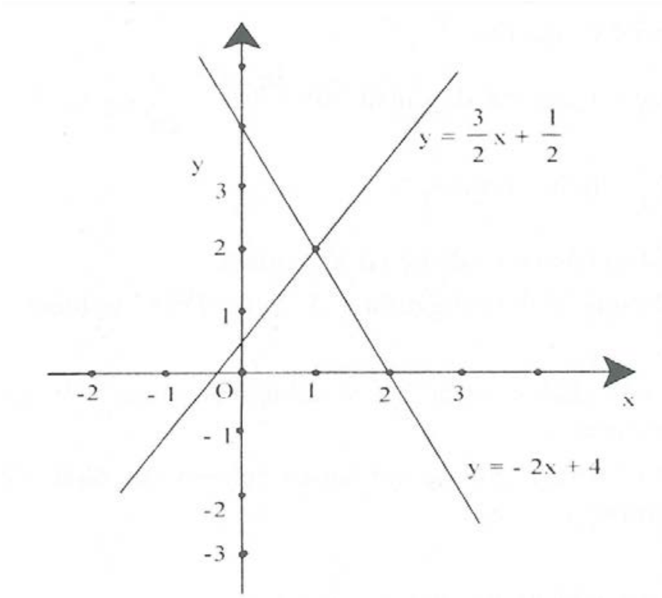
Hướng dẫn giải – đáp số

Từ các phương trình đã cho, suy ra: $y=\frac{m}{2}x-\frac{3}{2}$ (d) và $y=\frac{3}{5}x-\frac{n+8}{2}$ (d')

Hai phương trình trên có vô số nghiệm chung khi (d) và (d') trùng nhau, tức là

$\frac{m}{2}=\frac{3}{5}$ và $\frac{n+8}{5}=\frac{3}{2}$ suy ra $m=\frac{6}{5}$ và $n=-\frac{1}{2}$.

Vậy $m-n=\frac{6}{5}-\frac{-1}{2}=\frac{17}{10}$.



10.8. Tìm các giá trị của a để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $a = 0$, hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} x + 0.y = 1 \\ 0.x - 3.0.y = 2.0 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y \in \varnothing \end{cases}$

Hệ phương trình vô nghiệm.

Xét $a \neq 0$, hệ phương trình vô nghiệm khi: $\frac{a}{1} = \frac{-3a}{a} \neq \frac{2a+3}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ 2a + 3 \neq a \end{cases}$ không tồn tại.

Vậy với $a = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

10.9. Với giá trị nào của a thì mỗi hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất? vô nghiệm?

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ ax + 3y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax - y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hệ có nghiệm duy nhất khi $\frac{a}{1} \neq \frac{3}{-1} \Leftrightarrow a \neq -3.$

Hệ vô nghiệm khi $a = -3.$

b) Hệ có nghiệm duy nhất khi $\frac{a}{2} \neq \frac{-1}{3} \Leftrightarrow a \neq -\frac{2}{3}.$

10.10. Với giá trị nào của a thì hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2ay = 1 \\ (3a-1)x - ay = 1 \end{cases}$

a) Có nghiệm duy nhất

b) Vô nghiệm

c) Vô số nghiệm

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Xét $a = 0$ hệ có dạng $\begin{cases} x + 2.0.y = 1 \\ (3.0-1)x - 0.y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -x = 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Xét $a \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất khi $\frac{3a-1}{1} \neq \frac{-a}{2a} \Leftrightarrow 3a - 1 \neq \frac{-1}{2} \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{6}.$

Vậy $a \notin \left\{0; \frac{1}{6}\right\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

b) Với $a = 0$ thì hệ vô nghiệm.

Xét $a \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất khi $\frac{3a-1}{1} = \frac{-a}{2a} \neq \frac{1}{1} \Leftrightarrow 3a - 1 = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}.$

Vậy $a \notin \left\{0; \frac{1}{6}\right\}$ thì hệ vô nghiệm.

c) Không có giá trị nào của a để hệ vô số nghiệm.

10.11. Không giải phương trình, chỉ dựa vào các hệ số của các phương trình trong hệ, hãy cho biết vì sao các hệ phương trình sau tương đương.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x-2y=2 \\ -2y+4y=1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Hai hệ phương trình tương đương vì chúng đều vô nghiệm

10.12. Không giải phương trình, chỉ dựa vào các hệ số của các phương trình trong hệ, hãy cho biết vì sao các hệ phương trình sau không tương đương.

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-1 \end{cases}$ *và* $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ y=2x-1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hệ thứ nhất vô nghiệm, hệ thứ hai có nghiệm duy nhất. Vậy hai hệ phương trình không tương đương.

b) Hệ thứ nhất vô số nghiệm, hệ thứ hai có nghiệm duy nhất. Vậy hai hệ phương trình không tương đương.

10.13. Tìm các giá trị của m và n để hai hệ phương trình sau tương đương

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} mx+y=4 \\ x+(n-1)y=6 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Hệ thứ nhất có nghiệm duy nhất $x=3;\ y=1$

Muốn cho hai hệ tương đương thì hệ thứ hai cũng phải có nghiệm $x=3;\ y=1$

Suy ra: $\begin{cases} m.3+1=4 \\ 3+(n-1).1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=4 \end{cases}$

10.14. Trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng (d) và (D) lần lượt có phương trình $y=2x-5$ và $y=(m-2)x-m-1$

a) Chứng minh rằng đường thẳng (D) luôn đi qua một điểm cố định thuộc đường thẳng (d) với mọi giá trị của m

b) Tìm giá trị của m để góc tọa độ cách đường thẳng (D) một khoảng cách lớn nhất

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Kontum, năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $y=(m-2)x-m-1$ đi qua điểm cố định $N(x_0;y_0)$ là $y_0=(m-2)x_0-m-1$ với mọi $m \Leftrightarrow y_0=mx_0-2x_0-m-1$ với mọi m $\Leftrightarrow (x_0-1)m-(2x_0+y_0+1)=0$ với mọi m

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1=0 \\ 2x_0+y_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-3. \end{cases}$

Vậy đường thẳng luôn đi qua một điểm cố định $N(1;-3)$ với mọi giá trị của m.

Với $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-3. \end{cases}$ thay vào phương trình đường thẳng (d), ta thấy thỏa mãn $-3=2.1-5$ nên N thuộc đường thẳng (d)

b) – Xét $m=2$ phương trình đường thẳng là: $y=-3$

Khoảng cách từ O tới đường thẳng là 3.

- Xét $m \neq 2$ Gọi A là giao điểm của đường thẳng (D) với trục tung.

Ta có $x = 0 \Rightarrow y = -m - 1$ do đó $OA = |m + 1|$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng (D) với trục hoành.

Ta có $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{m+1}{m-2}$ do đó $OB = \dfrac{|m+1|}{|m-2|}$.

Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng (D).

Ta có $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{1}{(m+1)^2} + \dfrac{(m-2)^2}{(m+1)^2}$

$$= \frac{m^2 - 4m + 5}{(m+1)^2} = \frac{1}{10} + \frac{(3m-7)^2}{(m+1)^2} \geq \frac{1}{10}$$

Suy ra: $h^2 \leq 10 \Rightarrow h \leq \sqrt{10}$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến đường thẳng là $\sqrt{10}$ khi $m = \dfrac{7}{3}$ (vì $\sqrt{10} >$ m)

Chương 3. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Chuyên đề 11 PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành một hệ phương trình tương đương. Quy tắc thế gồm hai bước sau:

● Bước 1: Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn)

● Bước 2: Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ (phương trình thứ nhất cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia có được ở bước 1)

2. Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

● Dùng quy tắc để biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.

● Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

3. Quy tắc cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc cộng đại số gồm 2 bước sau:

● Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.

● Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia).

4. Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

● Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

● Áp dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn)

● Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho

5. Phương pháp đổi biến

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y-2} = 2 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2-y} = 11 \end{cases}$

(Thi HSG Toán lớp 9, tỉnh Vĩnh Long, năm học 2012 -2013)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán nếu quy đồng mẫu rồi khử mẫu của mỗi phương trình thì sẽ tạo ra phương trình bậc hai có hai ẩn nên khó giải. Quan sát kỹ đề bài, chúng ta thấy, hai phương trình có phần mẫu giống nhau. Do đó nên dùng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình đơn giản hơn.

Trình bày lời giải

Điều kiện $x \neq 0; y \neq 2$

Đặt $\frac{1}{x}=a;\frac{1}{y-2}=b$

Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} a-3b=2 \\ 2a+b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=2 \\ 6a+3b=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \frac{1}{x}=5 \\ \frac{1}{y-2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{5} \\ y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{5} \\ y=3 \end{cases}$ (TMĐK)

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x+y-2}+\frac{2+2y+4}{x+2y}=3 \\ \frac{x+y}{x+y-2}-\frac{8}{x+2y}=1 \end{cases}$

(Tuyển sinh lớp 10, Đại học sư phạm TP Hồ Chí Minh, 2012 - 2013)

Giải

Tìm cách giải. Quan sát đề bài, chúng ta thấy cần dùng phương pháp đổi biến. Tuy nhiên các tử thức vẫn còn chứa ẩn, do đó chúng ta cần biến đổi tách phần nguyên trước khi đổi biến.

Trình bày lời giải

Điều kiện: $x+y\neq 2$ và $x+2y\neq 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y-2}+\frac{x+2y+4}{x+2y}=3 \\ \frac{x+y}{x+y-2}-\frac{8}{x+2y}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y-2}+1+\dfrac{4}{x+2y}=3 \\ 1+\dfrac{2}{x+y-2}-\dfrac{8}{x+2y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y-2}+\dfrac{4}{x+2y}=2 \\ \dfrac{2}{x+y-2}-\dfrac{8}{x+2y}=0 \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{1}{x+y-2}=u\,;\dfrac{1}{x+2y}=v$

Hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} u+4v=2 \\ 2u-8v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+4v=2 \\ u-4v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-2}=1 \\ \dfrac{1}{x+2y}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (TMĐK)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(2;1)$

Ví dụ 3: Xác định hàm số $f(x)$ biết $f(x)+2.f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$ với $x\neq 0$

Giải

Tìm cách giải. Bài toán này gọi là giải phương trình hàm. Ta cần chuyển về dạng giải hệ phương trình. Từ đề bài chúng ta coi $f(x)$ và $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ là ẩn thì ta đã có một phương trình. Để xuất hiện phương trình thứ hai, chúng ta nên đổi vai trò của biến bằng cách thay x bằng $\dfrac{1}{x}$. Từ đó ta có lời giải sau.

Trình bày lời giải

Thay x bằng $\dfrac{1}{x}$ ta được $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{1}{x}$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2.f(x)=\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2.f\left(\frac{1}{x}\right)=x \\ 4.f(x)+2.f.\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow 3f(x)=\frac{2}{x}-x$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2-x^2}{3x}$$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(-1;3)$; $B(3;-1)$; $C(-3;5)$. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Giải

Tìm cách giải. Trong mặt phẳng tọa độ, để chứng minh ba điểm thẳng hàng ta thực hiện:

- Bước 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.

- Bước 2. Chứng tỏ tọa độ điểm thứ ba thỏa mãn phương trình vừa tìm được.

Trình bày lời giải

Đặt phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm phân biệt $A(-1;3)$ và B$(3;-1)$ là $y=ax+b$. Ta có: $\begin{cases} -a+b=3 \\ 3a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a=4 \\ 3a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$

Suy ra phương trình đường thẳng (d) là: $y=-x+2$

Xét $x=-3 \Rightarrow y=(-3)+2=5 \Rightarrow C(-3;5)$ thuộc đường thẳng $(d) \Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng

C. Bài tập vận dụng

11.1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x-3}{y+5}}+\sqrt{\dfrac{y+5}{2x-3}}=2\\ 3x+2y=19\end{cases}$ (Với $x>\dfrac{2}{3}; y>-5$)

(Thi học sinh giỏi toán 9, tỉnh Kiên Giang, năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho vế trái của phương trình thứ nhất:

$\sqrt{\dfrac{2x-3}{y+5}}+\sqrt{\dfrac{y+5}{2x-3}}\ge 2$ dấu bằng chỉ xảy ra khi:

$\sqrt{\dfrac{2x-3}{y+5}}=\sqrt{\dfrac{y+5}{2x-3}}\Leftrightarrow 2x-3=y+5$

Hệ có dạng: $\begin{cases}2x-3=y+5\\ 3x+2y=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=8\\ 3x+2y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=2.\end{cases}$

11.2. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y-1}+\dfrac{5}{y-2x-3}=\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{3}{x+y-1}-\dfrac{1}{y-2x-3}=\dfrac{7}{5}\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{5x}{x+1}+\dfrac{y}{y-3}=27\\ \dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{3y}{y-3}=4\end{cases}$

c) $\begin{cases}\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{y}{y+1}=-1\\ \dfrac{x}{x+2}+\dfrac{2}{y+1}=-\dfrac{5}{3}\end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Điều kiện: $x+y\ne 1; y-2x\ne 3.$

Đặt $\frac{1}{x+y-1}=u;\frac{1}{y-2x-3}=v.$

Hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}4u+5v=\frac{5}{2}\\3u-v=\frac{7}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4u+5v=\frac{5}{2}\\15u-5v=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}19u=\frac{19}{2}\\4u+5v=\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{2}\\v=\frac{1}{10}\end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases}\frac{1}{x+y-1}=\frac{1}{2}\\\frac{1}{y-2x-3}=\frac{1}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-1=2\\y-2x-3=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\-2x+y=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{10}{3}\\y=\frac{19}{3}\end{cases}$ (TMĐK)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases}x=-\frac{10}{3}\\y=\frac{19}{3}\end{cases}\begin{cases}x=-2\\y=9\end{cases}$

b) Điều Kiện: $x\neq-1;y\neq3.$ Đặt $\frac{x}{x+1}=u;\frac{y}{y-3}=v.$

Hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}5u+v=27\\2u-3v=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15u+3v=81\\2u-3v=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}17u=85\\5u+v=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=5\\v=2\end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases}\frac{x}{x+1}=5\\\frac{y}{y-3}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5x+5\\y=2y-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-5}{4}\\y=6\end{cases}$ (TMĐK)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases}x=\frac{-5}{4}\\y=6\end{cases}$

c) Điều kiện: $x\neq-2;y\neq-1.$

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{y}{y+1}=-1\\ \dfrac{x}{x+2}+\dfrac{2}{y+1}=-\dfrac{5}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{x+2}-\left(1-\dfrac{1}{y+1}\right)=-1\\ 1-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{2}{y+1}=-\dfrac{5}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{1}{y+1}=0\\ -\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{2}{y+1}=-\dfrac{8}{3}\end{cases}$$

Đặt $\dfrac{1}{x+2}=u;\dfrac{1}{y+1}=v.$

Hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}3u+v=0\\ -2u+2v=-\dfrac{8}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3u+v=0\\ u-v=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{1}{3}\\ v=-1\end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{y+1}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=3\\ y+1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$ (TMĐK)

11.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y+2}=-3\\ \dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{4y}{y+2}=2\end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Đồng Nai, năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải – đáp số

Điều kiện: $x\neq -1; y\neq -2.$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y+2}=-3\\ \dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{4y}{y+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y+2}=-3\\ 3-\dfrac{3}{x+1}+4-\dfrac{8}{y+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y+2}=-3\\ \dfrac{3}{x+1}+\dfrac{8}{y+2}=5\end{cases}$$

Đặt $\dfrac{1}{x+1}=u;\dfrac{2}{y+2}=v.$

Hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} u-2v=-3 \\ 3u+8v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u-8v=-12 \\ 3u+8v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=1 \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}=-1 \\ \dfrac{1}{y+2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-1 \\ y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ (TMĐK) là nghiệm của phương trình.

11.4. Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng:

$(d_1): 2x-y+3=0$

$(d_2): 15x+3y+5=0$

$(d_3): 3mx-3y+4m+15=0$

a) Tìm m để 3 đường thẳng chỉ có một điểm chung

b) Với giá trị m vừa tìm được hãy tính diện tích và chu vi tam giác tạo bởi (d_3) với các trục $Ox;Oy$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Tọa độ giao điểm (d_1); (d_2) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ 15x+3y+5=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=-3 \\ 15x+3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-3y=-9 \\ 15x+3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$.

Suy ra giao điểm của (d_1); (d_2) là $M\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

Ba đường thẳng (d_1); (d_2); (d_3) có một điểm chung

$\Leftrightarrow M \in (d_3)$ hay $3m.\left(-\frac{2}{3}\right)-3.\frac{5}{3}+4m+15=0 \Leftrightarrow m=-5$

b) Do đó đường thẳng (d_3) có phương trình là:

$3.(-5)x-3y+4.(-5)+15=0 \Leftrightarrow 15x+3y+5=0.$

(d_3) cắt trục tung tại điểm $x=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{3} \Rightarrow A\left(0;-\frac{5}{3}\right).$

(d_3) cắt trục hoành tại điểm $y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{1}{3};0\right).$

Độ dài AB là: $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\frac{\sqrt{26}}{3}.$

Suy ra diện tích ΔAOB là: $S=\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{5}{3}.\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$ (đvdt)

Chu vi ΔAOB là: $C=OA+OB+AB=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{26}}{3}=\frac{6+\sqrt{26}}{3}$ (đvđd).

11.5. Xác định hàm số $f(x)$ biết: $f(x)+x.f(-x)=x+1$

Hướng dẫn giải – đáp số

Thay x bằng $-x$ ta được : $f(-x)-x.f(x)=-x+1$

Từ đó ta có hệ phương trình : $\begin{cases} f(x)+x.f(-x)=x+1 \\ f(-x)-x.f(x)=-x+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x)+x.f(-x)=x+1 \\ x^2.f(x)+x.f(-x)=x^2-x \end{cases} \Rightarrow (x^2+1).f(x)=x^2+1$

$\Rightarrow f(x)=1$

11.6. Cho hệ phương trình $\begin{cases}(a-1)x-by=2a-b-2\\(c+4)x+cy=12b-4a+44\end{cases}$

Tìm các số a, b, c để hệ phương trình có vô số nghiệm, trong đó có nghiệm $x=1$ và $y=3$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Hải Dương, năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải – đáp số

$x=1; y=3$ là nghiệm của hệ phương trình nên ta có :

$$\begin{cases}(a-1).1-3b=2a-b-2\\(c+4).1+3c=12b-4a+44\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1-2b\\c=3b-a+10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1-2b\\c=5b+9\end{cases}$$

Thay vào hệ phương trình ban đầu ta được :

$$\begin{cases}(1-2b-1)x-by=2(1-2b)-b-2\\(5b+9+4)x+(5b+9)y=12b-4(1-2b)+44\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2bx+by=5b\\(5b+13)x+(5b+9)y=20b+40\end{cases}\qquad(1)$$

- Trường hợp 1. Xét $b=0$ thì $a=1; c=9$

  Hệ phương trình có dạng : $\begin{cases}0.x-0.y=0\\13x+9y=40\end{cases}$

  Hệ phương trình có vô số nghiệm.

  Tập nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases}x\in R\\y=\dfrac{40-13x}{9}\end{cases}$

- Trường hợp 2. Xét $b \neq 0$ hệ phương trình (1) tương đương với :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ (5b+13)x + (5b+9)y = 20b + 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ (5b+13)x + (5b+9)(5-2x) = 20b + 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ (5b+5)x = 5b + 5 \end{cases}$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi $b = -1$

Suy ra $a = 3; c = 4$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm, trong đó có nghiệm $x = 1; y = 3$ khi $(a;b;c) \in \{(1;0;9);(3;-1;4)\}$

11.7 Cho $f(x) = x^4 - ax^2 + b$. Tìm a và b để $f(x)$ chia hết cho $x^2 - 3x + 2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt thương của $f(x)$ và $x^2 - 3x + 2$ là $g(x)$suy ra :

$f(x) = (x^2 - 3x + 2)g(x) \Leftrightarrow x^4 - ax^2 + b = (x-1)(x-2)g(x)$ với mọi x.

- Chọn $x = 1$ ta được : $1 - a + b = 0 \Rightarrow a - b = 1$
- Chọn $x = 2$ ta được : $16 - 4a + b = 0 \Rightarrow 4a - b = 16$

  Từ đó ta có hệ phương trình : $\begin{cases} a - b = 1 \\ 4a - b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 15 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$

11.8. Viết phương trình đường thẳng(d)biết(d)đi qua hai điểm:

a) $A(2;3)$ *và* $B(1;4)$

b) $A(3;-6)$ *và* $B(-2;4)$

c) $A(4;-2)$ *và* $B(-1;3)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt phương trình đường thẳng (d) là : $y = ax + b$

Đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(2;3)$ và $B(1;4)$ nên ta có :

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) là : $y = -x + 5$

b) Đặt phương trình đường thẳng (d) là : $y = ax + b$

Đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(3;-6)$ và $B(-2;4)$ nên ta có :

$$\begin{cases} 3a + b = -6 \\ -2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = -10 \\ -2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) là : $y = -2x$

c) Đặt phương trình đường thẳng (d) là : $y = ax + b$

Đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(4;-2)$ và $B(-1;3)$ nên ta có :

$$\begin{cases} 4a + b = -2 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = -5 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) là : $y = -x + 2$

11.9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng trong trường hợp sau:

b) $A(1;1); B(0;-1); C(2;3)$

c) $A(2;0); B(4;-1); C(-2;2)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm phân biệt $A(1;1)$ và $B(0;-1)$ là :

$y = ax + b$ Ta có $\begin{cases} a + b = 1 \\ 0.a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$

Suy ra phương trình đường thẳng (d) là : $y = 2x - 1.$

Xét $x = 2 \Rightarrow y = 2.2 - 1 = 3 \Rightarrow C(2;3)$ thuộc đường thẳng (d)

$\Rightarrow$ A,B,C thẳng hàng.

b) Đặt phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm phân biệt $A(2;0)$ và $B(4;-1)$ là :

$y = ax + b$ Ta có $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 4a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}.$

Suy ra phương trình đường thẳng (d) là : $y = -\dfrac{1}{2}x + 1.$

Xét $x = -2 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2 \Rightarrow C(-2;2)$ thuộc đường thẳng (d)

$\Rightarrow$ A,B,C thẳng hàng.

Chương 3. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Chuyên đề 12 GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. Kiến thức cần nhớ

Các bước giải toán bằng cách lập hệ phương trình:

Bước 1: Lập hệ phương trình:

- Chọn các ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số.

- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn số và các đại lượng đã biết.

- Từ đó lập hệ phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng

Bước 2. Giải hệ phương trình

Bước 3. Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không thỏa mãn, rồi trả lời.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Một ca nô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108 km và ngược dòng 63 km. Một lần khác, ca nô đó cũng chạy trong 7 giờ, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước. (biết vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước không đổi)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán này là bài toán chuyển động trong dòng chảy. Bạn cần nhớ rằng:

● Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước

● Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng – vận tốc dòng nước

Sau đó viết thời gian xuôi dòng, thời gian ngược dòng theo quãng đường xuôi và ngược từ đó thiết lập được hệ phương trình.

Trình bày lời giải

Gọi vận tốc riêng của ca nô là $x\left(km/h,\ x>0\right)$

Vận tốc của dòng nước là $y\left(km/h,\ 0<y<x\right)$

Suy ra vận tốc xuôi dòng của ca nô là $x+y\left(km/h\right)$

Vận tốc ngược dòng của ca nô là $x-y\left(km/h\right)$

Theo đề bài, ca nô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108 km và ngược dòng 63 km, ta có phương trình: $\dfrac{108}{x+y}+\dfrac{63}{x-y}=7$ (1)

Theo đề bài, ca nô chạy trên sông cũng trong 7 giờ, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 64km, ta có hệ phương trình: $\dfrac{81}{x+y}+\dfrac{84}{x-y}=7$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases}\dfrac{108}{x+y}+\dfrac{63}{x-y}=7\\ \dfrac{81}{x+y}+\dfrac{84}{x-y}=7\end{cases}$

Đặt $\dfrac{1}{x+y}=a$; $\dfrac{1}{x-y}=b$. Hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}108a+63b=7\\ 81a+84b=7\end{cases}$

Giải ra ta được $\begin{cases}a=\dfrac{1}{27}\\ b=\dfrac{1}{21}\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}x+y=27\\ x-y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=24\\ y=3\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy vận tốc riêng của ca nô là $24\,km/h$

Và vận tốc của dòng nước là $3\,km/h$

Ví dụ 2: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi $34m$, nếu tăng chiều dài thêm $3m$, tăng chiều rộng thêm $2m$ thì diện thích tăng thêm $45m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Giải

Gọi chiều dài mảnh vườn hình chữ nhật là $x(m,x>0)$ và chiều rộng mảnh vườn hình chữ nhật là $y(m,y>0)$

Theo đề bài, chu vi mảnh vườn hình chữ nhật là $34m$, ta có phương trình:

$$2(x+y)=34 \qquad (1)$$

Theo đề bài, nếu tăng chiều dài thêm $3m$, tăng chiều rộng thêm $2m$ thì diện tích tăng thêm $45m^2$, ta có phương trình: $(x+3)(y+2)=xy+45 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(x+y)=34 \\ (x+3)(y+2)=xy+45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=17 \\ 2x+3y=39 \end{cases}$$

Giải ra ta được: $\begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy chiều dài mảnh vườn hình chữ nhật là 12m, chiều rộng mảnh vườn hình chữ nhật là 5m

Ví dụ 3: Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong. Nhưng khi làm chung được 8 ngày thì người thứ nhất đi làm việc khác, người thứ hai làm tiếp công việc đó trong 10 ngày nữa thì xong. Hỏi nếu mỗi người làm một mình xong công việc đó hết bao nhiêu thời gian?

Giải

Tìm cách giải. Bài toán này là bài toán về công việc đồng thời. Để giải loại toán này, chúng ta coi toàn bộ công việc là 1 đơn vị.

Suy ra: $\text{năng suất} = \dfrac{1}{\text{thời gian}}$ .Lập phương trình theo mẫu:

Tổng các năng suất riêng = năng suất chung

Trình bày lời giải:

Gọi người thứ nhất làm một mình xong công việc thời gian là $x\left(ngày, x > 12\right)$

Gọi người thứ hai làm một mình xong công việc thời gian là $y\left(ngày, y > 12\right)$

1 ngày người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc

1 ngày người thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ công việc

Theo đề bài, hai người làm chung 12 ngày thì xong, ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \quad (1)$$

Theo đề bài, họ làm chung được 8 ngày, người thứ nhất nghỉ, người thứ hai làm công việc đó trong 10 ngày nữa thì xong, ta có phương trình: $8\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{10}{y} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x} + \dfrac{18}{y} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{8}{x} + \dfrac{18}{y} = 1 \end{cases}$

Giải ra ta được: $\begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$(thỏa mãn)

Vậy thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc hết 20 ngày; thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc hết 30 ngày

Ví dụ 4: Trong một lớp học chỉ có hai loại học sinh khá và giỏi. Nếu có 1 học sinh giỏi chuyển đi thì $\frac{1}{6}$ số học sinh còn lại là học sinh giỏi. Nếu có 1 học sinh khá chuyển đi thì $\frac{1}{5}$ số học sinh còn lại là học sinh giỏi. Tính số học sinh của lớp.

Giải

Gọi số học sinh giỏi là x và số học sinh khá là y $\left(x; y \in N; x.y \text{ học sinh}\right)$

Chuyển 1 học sinh giỏi đi thì số học sinh giỏi là $x-1$ học sinh

Theo đầu bài, nếu có 1 học sinh giỏi chuyển đi thì $\frac{1}{6}$ số học sinh còn lại là học sinh giỏi, ta có phương trình: $\frac{x-1}{x+y-1}=\frac{1}{6}$ (1)

Chuyển 1 học sinh khá đi thì số học sinh khá là $y-1$ học sinh

Theo đầu bài, nếu có 1 học sinh khá chuyển đi thì $\frac{1}{5}$ số học sinh còn lại là học sinh giỏi, ta có phương trình: $\frac{x}{x+y-1}=\frac{1}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{x-1}{x+y-1}=\frac{1}{6}\\ \frac{x}{x+y-1}=\frac{1}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x-y=5\\ 4x-y=-1\end{cases}$

Giải ra ta được: $\begin{cases}x=6\\ y=25\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy số học sinh của lớp là $6+25=31$ học sinh

Ví dụ 5: Hai thị xã A và B cách nhau 90km. Một chiếc ô tô khởi hành từ A và một chiếc mô tô khởi hành từ B cùng một lúc và ngược chiều nhau. Sau khi gặp nhau xe ô tô chạy thêm 30 phút nữa thì đến B, còn xe mô tô chạy thêm 2 giờ nữa thì đến A. Tìm vận tốc của mỗi xe (Giả sử rằng hai xe chuyển động đều)

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Vĩnh Long năm 2012 - 2013)

Giải

Gọi địa điểm gặp nhau là C

Gọi vận tốc ô tô là $x\left(km/h, x>0\right)$

vận tốc mô tô là $y\left(km/h, y>0\right)$

Quãng đường ô tô đi từ C đến B là: $\frac{1}{2}x\left(km\right)$

Quãng đường mô tô đi từ C đến A là: $2y\left(km\right)$

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{1}{2}x+2y=90 \quad \left(1\right)$

Theo đề bài, thời gian ô tô đi từ A đến C bằng thời gian mô tô đi từ B đến C nên ta có phương trình: $\frac{2y}{x}=\frac{\frac{1}{2}x}{y} \Leftrightarrow 4y^2=x^2 \quad \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{2}x+2y=90\\ x^2=4y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+4y=180\\ x=2y\end{cases}$ $\left(\text{vì } x>0,\ y>0\right)$

Giải ra ta được: $\begin{cases}x=60\\ y=30\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy vận tốc ô tô là $60\,km/h$, vận tốc mô tô là $30\,km/h$

Ví dụ 6: Có mười sáu người đi dự trại nghỉ mát ở một khu rừng ngoại ô thành phố. Họ chia nhau mang theo 19kg vật dụng và lương thực… Mỗi người đàn ông mang theo 3kg, mỗi nhóm hai người đàn bà mang theo 1kg, mỗi nhóm ba đứa trẻ mang theo 1kg. Tính số đàn ông, đàn bà và trẻ em đi dự trại.

Giải

Tìm cách giải. Bài toán yêu cầu tìm số đàn ông, đàn bà và trẻ em nên ta có thể chọn ba ẩn. Từ đề bài ta thiết lập được hai phương trình: Phương trình thứ nhất là phương trình cân bằng số người, phương trình thứ hai cân bằng khối lượng. Vì điều kiện ẩn số là số tự nhiên, nên ta có thể giới hạn miền giá trị của mỗi ẩn để tìm nghiệm (thực chất là giải hệ phương trình nghiệm tự nhiên).

Trình bày lời giải

Gọi số đàn ông, đàn bà và trẻ em lần lượt là $x, y, z\left(\text{người},\ x, y, z \in \mathbb{N};\ x, y, z < 16\right)$

Theo đề bài, có tất cả 16 người đi dự trại hè, ta có phương trình: $x + y + z = 16$

Theo đề bài, mỗi người đàn ông mang theo 3kg, mỗi nhóm hai người đàn bà mang theo 1kg, mỗi nhóm ba đứa trẻ mang theo 1kg, ta có phương trình: $3x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 19$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ 3x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 16 \\ 18x + 3y + 2z = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 16 \\ 16x + y = 82 \end{cases}$$

Ta có $16x + y = 82$ mà $y > 0$ nên $16x < 82 \Rightarrow x < 5{,}125$

Mặt khác $y < 16$ nên $16x > 66 \Rightarrow x > 4{,}125$ do đó $x = 5$

Từ đó ta tính được $y = 2$, $z = 9$ (thỏa mãn)

Vậy số đàn ông, đàn bà và trẻ em lần lượt là 5 người, 2 người, và 9 người.

C. Bài tập vận dụng

12.1. Một ô tô đi trên quãng đường AB với vận tốc $50\ km/h$, rồi đi tiếp trên quãng đường BC với vận tốc $45km/h$. Biết quãng đường tổng cộng là 165 km và thời gian đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút.Tính thời gian ô tô đi trên quãng đường AB và BC

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi thời gian ô tô đi trên quãng đường AB và BC lần lượt là $x, y\left(h, x>0, y>0\right)$

Suy ra quãng đường AB là $50x$ km và quãng đường BC là $45y$ km, nên ta có phương trình: $50x+45y=165\ \ (1)$

Theo đề bài, thời gian đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút $\left(=\frac{1}{2}h\right)$ ta có phương trình: $y-x=\frac{1}{2}\ (2)$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}50x+45y=165\\ y-x=\frac{1}{2}\end{cases}$

Giải ra ta được : $\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=2\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy thời gian ô tô đi trên quãng đường AB và BC lần lượt là $\frac{3}{2}$ giờ và 2 giờ.

12.2. Một thửa ruộng hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài thêm 2m, chiều rộng thêm 3m thì diện tích tăng thêm $100m^2$. Nếu giảm cả chiều dài và chiều rộng đi 2m thì diện tích giảm đi $68m^2$. Tính diện tích thửa ruộng đó

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi chiều dài thửa ruộng là $x\left(m, x>0\right)$ và chiều rộng của thửa ruộng là $y\left(m, y>0\right)$

Theo đề bài, nếu tăng chiều dài thêm 2m, chiều rộng thêm 3m thì diện tích tăng thêm $100m^2$ ta có phương trình : $\left(x+2\right).\left(y+3\right)=xy+100\ \ (1)$

Theo đề bài, nếu giảm cả chiều dài và chiều rộng đi 2m thì diện tích giảm đi $68m^2$, ta có phương trình: $\left(x-2\right)\left(y-2\right)=xy-68\ \ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}\left(x+2\right).\left(y+3\right)=xy+100\\ \left(x-2\right)\left(y-2\right)=xy-68\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y=94\\ x+y=36\end{cases}$$

Giải ra ta được : $\begin{cases}x=22\\ y=14\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy chiều rộng của thửa rộng là 14m, chiều dài của thửa ruộng là 22m, do đó diện tích của thửa ruộng là $14.22=308m^2$.

12.3. Nếu hai vòi cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 90 phút đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 15 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ hai chảy tiếp trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu đầy bể ?

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (phút, $x>0$)

thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là y (phút, $y>0$)

suy ra 1 phút, vòi thứ nhất chảy được là $\frac{1}{x}$ bể

1 phút vòi thứ hai chảy được là $\frac{1}{y}$ bể

Theo đề bài, hai vòi cùng chảy vào bể thì 90 phút đầy bể, ta có phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{90}$

(1)

Theo đề bài, nếu mở vòi thứ nhất chảy 15 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ hai chảy tiếp trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể, ta có phương trình : $\frac{15}{x}+\frac{20}{y}=\frac{1}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{90}\\ \frac{15}{x}+\frac{20}{y}=\frac{1}{5}\end{cases}$

Giải ra, ta được: $\begin{cases}x=225\\ y=150\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là 255 phút.

Thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là 150 phút.

12.4. Hai tổ chức dự định làm 700 sản phẩm. Thực tế, tổ một vượt mức 20% và tổ hai vượt mức 15% nên trong thời gian quy định cả hai tổ đã vượt mức 120 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ dự kiến làm.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số sản phẩm tổ một dự kiến làm là x (sản phẩm, $x \in N$)

Số sản phẩm tổ hai dự kiến làm là y (sản phẩm, $y \in N$)

Theo đầu bài, hai tổ dự định làm 700 sản phẩm, ta có phương trình :

$x+y=700 \quad (1)$

Theo đề bài, thực tế, tổ một vượt mức 20% và tổ hai vượt mức 15% nên trong thời gian quy định cả hai tổ đã vượt mức 120 sản phẩm, ta có phương trình :

$$\frac{20x}{100}+\frac{15y}{100}=120 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x+y=700 \\ \frac{20x}{100}+\frac{15y}{100}=120 \end{cases}$

Giải ra ta được : $\begin{cases} x=300 \\ y=400 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy số sản phẩm tổ một dự kiến làm là 300 sản phẩm, sản phẩm tổ hai dự kiến làm là 400 sản phẩm.

12.5. Để làm xong một công việc. Nếu công nhân A và B cùng làm thì mất 6 giờ. Nếu công nhân B và C cùng làm thì mất 4 giờ 30 phút. Nếu công nhân C và A cùng làm thì mất 3 giờ 36 phút. Hỏi nếu cả ba công nhân cùng làm thì bao lâu xong công việc ?

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi thời gian công nhân A làm một mình xong công việc hết x (giờ, $x>0$)

thời gian công nhân B làm một mình xong công việc hết y (giờ, $y>0$)

thời gian công nhân C làm một mình xong công việc hết z (giờ, $z>0$)

Theo đầu bài, nếu công nhân A và B cùng làm thì mất 6 giờ, ta có phương trình :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \quad (1)$$

Theo đầu bài, nếu công nhân B và C cùng làm thì mất 4 giờ 30 phút $\left(=\frac{9}{2}h\right)$,ta có phương trình : $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{2}{9}$ (2)

Theo đầu bài, nếu công nhân C và A cùng làm thì mất 3 giờ 36 phút $\left(=\frac{18}{5}h\right)$, ta có phương trình : $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{5}{18}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình : $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{2}{9}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{5}{18}\end{cases}$

Cộng vế với vế ta được : $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$ (4)

Từ (1) và (4), ta có : $\frac{1}{6}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow z=6$

Từ (2) và (4), ta có : $\frac{2}{9}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=9$

Từ (3) và (4), ta có : $\frac{5}{18}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow y=18$

Suy ra : $\begin{cases}x=9\\ x=18\\ z=6\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian công nhân A làm một mình xong công việc hết 9 giờ, thời gian công nhân B làm một mình xong công việc hết 18 giờ, thời gian công nhân C làm một mình xong công việc hết 6 giờ

12.6. Có 480 học sinh dự trại hè tại 3 điểm, 10% số học sinh của địa điểm (I), $8,5\%$ học sinh của địa điểm (II) và 15% số học sinh của địa điểm (III) đi thăm một viện bảo tàng. Viện bảo tàng cách địa điểm (I) 60 km, các địa điểm (II) 40 km và cách địa điểm (III) 30 km. Để trả vừa đủ tiền xe (giá 100 đồng cho mỗi người đi 1 km) số người đi thăm viện bảo tàng đã góp đồng đều mỗi người 4000 đồng. Hỏi có bao nhiêu người ở mỗi địa điểm đã đi thăm viện bảo tàng.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh năm 1993 - 1994, vòng 1)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi x, y, z (người) lần lượt là số người của các địa điểm (I), (II), (III) đi thăm viện bảo tàng $(x, y, z \in N)$

Tổng số tiền xe là : $100.(60x + 40y + 30z) = 4000(x + y + z)$ nên suy ra $z = 2x$

Tổng số học sinh dự trại là : $10x + \frac{200}{17}y + \frac{20}{3}z = 480 \Rightarrow 10x < 480$

$\Rightarrow x < 48$ và $y = 40 - 2x + \frac{48 + x}{60}$. Vì y là số tự nhiên

Do đó $48 + x \vdots 60$ mà $48 + x < 96$ (vì x<48) $\Rightarrow 48 + x = 60 \Leftrightarrow x = 12$

$z = 2x = 24$ và $y = 40 - 2.12 + \frac{48 + 12}{60} = 17$ (thỏa mãn)

Số người của các địa điểm (I), (II), (III) đi thăm viện bảo tàng là 12 học sinh, 17 học sinh, 24 học sinh.

12.7. Trong một cuộc đua xe mô tô, ba tay đua đã khởi hành cùng một lúc. Mỗi giờ người thứ hai chạy chậm hơn người thứ nhất 15 km và nhanh hơn người thứ ba 3km nên người thứ hai đến đích chậm hơn người thứ nhất là 12 phút và sớm hơn người thứ 3 là 3 phút. Tìm vận tốc của ba tay đua mô tô trên

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi vận tốc người thứ hai là $x(km / h, x > 3)$

và chiều dài quãng đường đi là $y(km, y > 0)$

Suy ra vận tốc tay đua mô tô thứ nhất là $x+15\ (km/h)$

Vận tốc tay đua xe mô tô thứ ba là : $x-3\ (km/h)$

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{x+15}=\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{x}{x-3}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75y=x^2+15x \\ 60y=x^2-3x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 15y=18x \\ 60y=x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{6}{5}x \\ 60.\dfrac{6}{5}x=x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{6}{5}x \\ 72x=x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=75 \\ y=90 \end{cases}$ vì $x>3$

Vậy vận tốc mô tô thứ nhất là $75\,km/h$, vận tốc mô tô thứ hai là $75+15=90\,km/h$, vận tốc mô tô thứ ba là $75-3=72\,km/h$

12.8. Ba chiếc bình có thể tích tổng cộng là 120 lít. Nếu đổ đầy nước vào bình thứ nhất rồi rót vào hai bình kia thì hoặc bình thứ ba đầy nước, còn bình thứ hai chỉ được $\dfrac{1}{2}$ thể tích của nó, hoặc bình thứ hai đầy nước còn bình thứ ba chỉ được $\dfrac{1}{3}$ thể tích của nó. Hãy xác định thể tích của mỗi bình.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi thể tích bình thứ nhất là $x\,(lít,\ x>0)$, thể tích bình thứ hai là $y\,(lít, y>0)$, thể tích bình thứ ba là $z\,(lít, z>0)$

Theo đề bài, ba chiếc bình có thể tích tổng cộng là 120 lít, ta có phương trình: $x+y+z=120 \quad (1)$

Theo đề bài, nếu đổ đầy nước vào bình thứ nhất rồi rót vào hai bình kia thì hoặc bình thứ ba đầy nước, còn bình thứ hai chỉ được $\frac{1}{2}$ thể tích của nó, hoặc bình thứ hai đầy nước còn bình thứ ba chỉ được $\frac{1}{3}$ thể tích của nó, ta có phương trình:

$$x=\frac{1}{2}y+z\ \ (2)\ ;\ x=y+\frac{1}{3}z\ \ (3)$$

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y+z=120\\ x=\frac{1}{2}y+z\\ x=y+\frac{1}{3}z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}y+z+y+z=120\\ \frac{1}{2}y+z=y+\frac{1}{3}z\\ x=\frac{1}{2}y+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y+4z=240\\ 3y-4z=0\\ x=\frac{1}{2}y+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=50\\ y=40\\ z=30\end{cases}$$ (thỏa mãn)

Vậy thể tích bình thứ nhất là 50 lít, thể tích bình thứ hai là 40 lít, thể tích bình thứ ba là 30 lít

12.9. Hai địa điểm A và B cách nhau 360 km. Cùng lúc đó một xe tải khởi hành từ A chạy về B và một xe con chạy từ B về A. sau khi gặp nhau xe tải chạy tiếp 5 giờ nữa thì tới B và xe con chạy tiếp 3 giờ 12 phút nữa thì tới A. Tính vận tốc mỗi xe.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi địa điểm gặp nhau là C

Gọi vận tốc xe tải là $x\left(km/h, x>0\right)$

vận tốc xe con là $y\left(km/h, y>0\right)$

Quãng đường xe tải đi từ C đến B là: $5x\left(km\right)$

Quãng đường xe con đi từ C đến A là: $\frac{16}{5}y\left(km\right)$

Theo đề bài, ta có phương trình: $5x+\frac{16}{5}y=360\ \left(1\right)$

Theo đề bài, thời gian xe tải đi từ A đến C bằng thời gian xe con đi từ B đến C nên ta có phương trình: $\frac{\frac{16}{5}y}{x}=\frac{5x}{y}\Leftrightarrow\frac{16}{5}y^2=5x^2\qquad\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases}5x+\frac{16}{5}y=360\\25x^2=16y^2\end{cases}$

Kết hợp với $x>0$, $y>0$

Giải ra ta được $\begin{cases}x=40\\y=50\end{cases}$

Vậy vận tốc xe tải là $40\ km/h$, vận tốc xe con là $50\ km/h$

12.10. Có ba đội xây dựng cùng làm chung một công việc. Làm chung được 4 ngày thì đội III được điều động làm việc khác, hai đội còn lại cùng làm thêm 12 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Biết rằng năng suất của đội I cao hơn năng suất của đội II; năng suất của đội III là trung bình cộng năng suất của đội I và năng suất của đội II. Nếu mỗi đội làm một phần ba công việc thì phải mất tất cả 37 ngày mới xong. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong công việc trên?

(Tuyển sinh lớp 10, THPT Năng Khiếu ĐHQG TP.Hồ Chí Minh, năm học 2003 – 2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi thời gian đội I làm một mình xong công việc là $x\left(ngày, x>0\right)$

thời gian đội II làm một mình xong công việc là $y\left(ngày, y>0\right)$

thời gian đội III làm một mình xong công việc là $z\left(ngày, z>0\right)$

Theo đề bài, làm chung được 4 ngày thì đội III được điều động làm việc khác, hai đội còn lại cùng làm thêm 12 ngày nữa thì hoàn thành công việc, ta có phương trình: $4.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \quad (1)$

Theo đề bài, năng suất của đội III là trung bình cộng năng suất của đội I và năng suất của đội II, ta có phương trình: $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \quad (2)$

Theo đề bài, nếu mỗi đội làm một phần ba công việc thì phải mất tất cả 37 ngày mới xong, ta có phương trình: $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=37 \quad (3)$

Theo đề bài, năng suất của đội I cao hơn năng suất của đội II tức là: $\frac{1}{x}>\frac{1}{y} \Leftrightarrow x<y \quad (4)$

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 4.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 & (1) \\ \frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) & (2) \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=37 & (3) \end{cases}$

Từ (2) ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$ thế vào (1) ta được: $4\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{z}\right)+12.\frac{2}{z}=1 \Leftrightarrow z=36$

Thay vào phương trình (2) và (3), ta được: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18} \\ x+y=75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=18\left(x+y\right) \\ x+y=75 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=1350 & (5) \\ x+y=75 & (6) \end{cases}$

Từ (6), ta có: $y = 75 - x$ thay vào (5) ta được:

$x(75 - x) = 1350 \Leftrightarrow x^2 - 75x + 1350 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 45).(x - 30) = 0 \Leftrightarrow x = 45,\ x = 30$

Với $x = 45$ thì $y = 75 - 45 = 30$ không thỏa mãn (4)

Với $x = 30$ thì $y = 75 - 30 = 45$, thỏa mãn (4)

Vậy thời gian đội I làm một mình xong công việc đội I hết 30 ngày, đội II hết 45 ngày, đội III hết 36 ngày

12.11. Trong cái bình có đựng nước. Nếu ta rót $\frac{1}{3}$ lượng nước từ bình thứ nhất sang bình thứ hai; rồi rót $\frac{1}{4}$ lượng nước hiện tại có ở bình thứ hai sang bình thứ ba và cuối cùng rót $\frac{1}{10}$ lượng nước ở bình thứ ba sang bình thứ nhất thì trong mỗi bình có 9 lít nước. Hỏi lúc đầu trong mỗi bình có bao nhiêu lít nước?

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt lượng nước lúc đầu trong bình thứ nhất, bình thứ hai, bình thứ ba lần lượt là x, y, z

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{10}\left[z + \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{3}x\right)\right] = 9 \\ \left(y + \frac{1}{3}x\right) - \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{3}x\right) = 9 \\ \left[z + \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{3}x\right)\right] - \frac{1}{10}\left[z + \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{3}x\right)\right] = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{27}{40}x + \frac{1}{40}y + \frac{1}{10}z = 9 \\ \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}x = 9 \\ \frac{1}{120}x + \frac{1}{40}y + \frac{1}{10}z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \\ z = 7 \end{cases}$$

Vậy lượng nước lúc đầu trong bình thứ nhất, bình thứ hai, bình thứ ba lần lượt là 12 lít, 8 lít, 7 lít.

12.12. A nói với B : Tuổi của tôi hiện nay gấp ba lần tuổi của anh vào lúc tuổi tôi bằng tuổi anh hiện nay. Lúc tuổi anh bằng tuổi tôi hiện nay thì tổng số tuổi của hai chúng ta là 98. Tìm tuổi của A và B hiện nay.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi tuổi của A và B hiện nay lần lượt là $x, y\left(tuổi,\ x, y \in N, x > y\right)$

Lúc A có số tuổi là y thì B có số tuổi là: $y-\left(x-y\right)$ hay $2y-x$

Lúc B có số tuổi là x thì A có số tuổi là: $x+\left(x-y\right)$ hay $2x-y$

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x = 3\left(2y-x\right) \\ 2x-y+x=98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 42 \\ y = 28 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy tuổi của A là 42, tuổi của B là 28

12.13. Đoạn đường AB dài 160km, một ô tô đi từ A đến B và một xe máy đi từ B đến A khởi hành vào cùng một thời điểm, sau một thời gian hai xe gặp nhau tại điểm C, đoạn đường AC dài 120km. Khi đi tới B ô tô liền quay lại ngay và đuổi kịp xe máy tại điểm D. Tính vận tốc mỗi xe, biết kể từ khi khởi hành tới lúc hai xe gặp nhau tại điểm D là 4 giờ và vận tốc hai xe không đổi.

(TS lớp 10, chuyên toán tỉnh Ninh Bình, năm học 2010 - 2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi vận tốc ô tô và xe máy lần lượt là $x, y\left(km/h, x, y > 0\right)$

Vì cùng thời gian đi từ A đến C và thời gian đi từ B đến C nên ta có phương trình: $\dfrac{120}{x} = \dfrac{40}{y} \Leftrightarrow x = 3y \qquad (1)$

Vì khi tới B ô tô liền quay lại ngay và đuổi kịp xe máy tại điểm D và kể từ khi khởi hành tới lúc hai xe gặp nhau tại điểm D là 4 giờ, ta có phương trình: $4x-4y=160 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x=3y \\ 4x-4y=160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=60 \\ y=20 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện

Vậy vận tốc ô tô và xe máy lần lượt là $60\,km/h$, $20\,km/h$

Chuyên đề 13. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Điều kiện $a_1; a_2; a_3; b_1; b_2; b_3; c_1; c_2; c_3$ không đồng thời bằng 0.

Để giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn, chúng ta thường dùng phương pháp thế, phương pháp cộng để giảm bớt ẩn. Đưa về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Tương tự như vậy, hệ phương trình bậc nhất n ẩn là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + c_1x_n = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + c_2x_n = d_2 \\ \ldots\ldots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots + c_nx_n = d_n \end{cases}$$

Điều kiện $a_1; a_2; \ldots; a_n; b_1; b_2; \ldots; b_n; \ldots; c_1; c_2; \ldots; c_n$ không đồng thời bằng 0.

Tương tự như trên, ta cũng làm giảm bớt số ẩn bằng cách dùng phương pháp thế, phương pháp cộng.

Tuy nhiên phụ thuộc vào mỗi bài, ta có những cách giải thích hợp và ngắn gọn.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + y + z = 11 & (1) \\ 2x - y + z = 5 & (2) \\ 3x + 2y + z = 14 & (3) \end{cases}$

Giải

Tìm cách giải. Phương trình bậc nhất ba ẩn. Ta có thể khử bớt một ẩn để đưa về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng hoặc phương pháp thế:

- *Cách 1.* Dùng phương pháp cộng để khử ẩn z, đưa về hệ phương trình hai ẩn x, y.
- *Cách 2.* Từ phương trình (1) biểu diễn z theo x và y thế vào phương trình (2) và (3) ta cũng được hệ phương trình hai ẩn x, y.

Trình bày lời giải

Cách 1. Từ phương trình (1) và (2) ta có: $x - 2y = -6$

Từ phương trình (2) và (3) ta có: $x+3y=9$

Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=-6 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y=15 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$

Thay vào phương trình (1) ta tính được $z=8$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y;z)=(0;3;8)$.

Cách 2. Từ phương trình (1) ta được : $z=11-x-y$. Thay vào phương trình (2) và (3) ta được :

$$\begin{cases} 2x-y+11-x-y=5 \\ 3x+2y+11-x-y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-6 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-6 \\ 4x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$$

Thay vào phương trình (1) ta tính được $z=8$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y;z)=(0;3;8)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3x+y+z=22 & (1) \\ x+3y+z=20 & (2) \\ x+y+3z=18 & (3) \end{cases}$

Giải

Tìm cách giải. Ngoài cách giải như ví dụ 1. Quan sát đặc điểm các hệ số của mỗi phương trình, ta nhận xét rằng nếu cộng từng vế của ba phương trình, ta được phương trình mới có hệ số của ẩn giống nhau. Do vậy ta có lời giải hay và gọn hơn.

Trình bày lời giải

Từ các phương trình trên của hệ, ta cộng vế với vế ta được

$5(x+y+z)=60 \Rightarrow x+y+z=12 \quad (4)$

Từ phương trình (4) thay vào các phương trình (1); (2); (3) ta được:

$$\begin{cases} 2x+12=22 \\ 2y+12=20 \\ 2z+12=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y;z)=(5;4;3)$.

Ví dụ 3: Giả sử hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{12}=1 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{10}+\dfrac{z}{5}=1 \end{cases}$

Có nghiệm $(x;y;z)$. Chứng tỏ $x+y+z$ không đổi

(Thi HSG Toán lớp 9, TP. Đà Nẵng, Năm học 2009 – 2010)

Giải

Cách 1: $\begin{cases} \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{12}=1 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{10}+\dfrac{z}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y-z=12 & (1) \\ 10x+3y+6z=30 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) và (1), lấy vế trừ vế ta được:

$7(x+y+z)=18 \Rightarrow x+y+z=\dfrac{18}{7}$ không đổi.

Cách 2: Từ phương trình (1) ta có: $z=3x-4y-12$ (3). Thế vào phương trình (2) ta được:

$10x+3y+6.(3x-4y-12)=30$

$\Leftrightarrow 10x+3y+18x-24y-72=30$

$\Leftrightarrow 28x-21y=102 \Rightarrow x=\dfrac{102+21y}{28}$

Thay vào (3) ta có: $z=\dfrac{3.(102+21y)}{28}-4y-12 \Rightarrow z=\dfrac{-49y-30}{28}$

Xét $x+y+z=\dfrac{102+21y}{28}+y+\dfrac{-49y-30}{28}=\dfrac{18}{7}$ không đổi.

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x-2y+3z$ biết x, y, z không âm và thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+4y+3z=8 \\ 3x+y-3z=2 \end{cases}$

(Thi HSG Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, Năm học 2011 – 2012)

Giải

- ***Tìm cách giải:*** Từ giả thiết ta thấy hệ phương trình bậc nhất ba ẩn mà chỉ có hai phương trình, do đó hệ phương trình có vô số nghiệm. Suy luận, ta có thể coi một ẩn nào đó là tham số, biểu diễn hai ẩn còn lại theo tham số đó. Chẳng hạn biểu diễn x, y theo z. Cũng từ đó biểu thức A viết dưới dạng đa thức chứa z. Từ điều kiện x, y, z không âm, ta xác định được miền giá trị của z. Từ đó ta có lời giải sau:

- ***Trình bày lời giải***

Ta có: $\begin{cases} 2x+4y=8-3z & (1) \\ 3x+y=2+3z & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có: $y = 3z + 2 - 3x$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$2x + 4(3z + 2 - 3x) = 8 - 3z \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}z$$

Do đó $y = 3z + 2 - \frac{9}{2}z = 2 - \frac{3}{2}z.$

Kết hợp với $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}z \geq 0 \\ 2 - \frac{3}{2}z \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq z \leq \frac{4}{3}$ (3)

Suy ra: $A = x - 2y + 3z = \frac{3}{2}z - 2\left(2 - \frac{3}{2}z\right) + 3z = \frac{15}{2}z - 4.$

Kết hợp với (3) ta có: $A = \frac{15}{2}z - 4 \geq \frac{15}{2}.0 - 4 = -4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -4 khi $z = 0, x = 0, y = 2;$

C. Bài tập vận dụng

13.1. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 & (1) \\ 3x - 2y + 2z = 3 & (2) \\ 5x + 4y = 9 & (3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0 & (1) \\ 2x - 5y + 4z - 3 = 0 & (2) \\ 3x - 4y + 2z - 7 = 0 & (3) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + 2z = 4 & (1) \\ 2x - 3y + 3z = 6 & (2) \\ x - 3y + 4z = 6 & (3) \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Từ phương trình (1) và (2) ta có $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 8 \\ 9x - 6y + 6z = 9 \end{cases} \Rightarrow 5x - 4y = 1$

Kết hợp với phương trình (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x - 4y = 1 \\ 5x - +4y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 10 \\ 5x + 4y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Thay vào phương trình (1) ta tính được $z = 1.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $(x; y; z) = (1;1;1).$

b) Từ phương trình (1) ta có: $x = 2y - 3z + 5$ thay vào phương trình (2), (3) ta được:

$$\begin{cases} 2.(2y - 3z + 5) - 5y + 4z - 3 = 0 \\ 3.(2y - 3z + 5) - 4y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z = 7 \\ 2y - 7z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Từ phương trình (1) ta có: $x = 2.3 - 3.2 + 5 = 5.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $(x;y;z)=(5;3;2)$.

c) Từ phương trình (1) ta có: $x=4-y-2z$ thay vào phương trình (2), (3) ta được:

$$\begin{cases}2.(4-y-2z)-3y+3z=6\\4-y-2z-3y+4z=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y+z=2\\4y-2z=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\z=-3\end{cases}.$$

Từ phương trình (1) ta có: $x=4-1-2.(-3)=9$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $(x;y;z)=(9;1;-3)$.

13.2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}2x+y+z+t=11 & (1)\\x+2y+z+t=12 & (2)\\x+y+2z+t=13 & (3)\\x+y+z+2t=14 & (4)\end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ các phương trình trên của hệ, ta cộng vế với vế ta được:

$$5(x+y+z+t)=50\Rightarrow x+y+z+t=10 \quad (5)$$

Từ phương trình (5) thay vào các phương trình (1), (2), (3), (4) ta được:

$$\begin{cases}x+10=11\\y+10=12\\z+10=13\\t+10=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\\t=4\end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y;z;t)=(1;2;3;4)$.

13.3. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}x+y+z+t=4 & (1)\\x+y-z-t=8 & (2)\\x-y+z-t=12 & (3)\\x-y-z+t=16 & (4)\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y+z-t=8 & (1)\\y+z+t-x=6 & (2)\\z+t+x-y=4 & (3)\\t+x+y-z=2 & (4)\end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Từ phương trình (1) và (2) cộng vế với vế: $2.(x+y)=12\Rightarrow x+y=6$.

Từ phương trình (3) và (4) cộng vế với vế: $2.(x-y)=28\Rightarrow x-y=14$.

Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=6\\x-y=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10\\y=-4\end{cases}$

Thay vào phương trình (1) và (3) ta được:

$\begin{cases} 6+z+t=4 \\ 14+z-t=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+t=-2 \\ z-t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2 \\ t=0 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y;z;t)=(10;-4;-2;0)$.

b) Từ hệ phương trình, cộng vế với vế ta được:

$2(x+y+z+t)=20 \Rightarrow x+y+z+t=10$ (*)

Từ phương trình (*) kết hợp với hệ phương trình ta có:

$$\begin{cases} 10-2t=8 \\ 10-2x=6 \\ 10-2y=4 \\ 10-2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y;z;t)=(2;3;4;1)$.

13.4. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y+z=6 & (1) \\ y+z+t=9 & (2) \\ z+t+u=12 & (3) \\ t+u+x=10 & (4) \\ u+x+y=8 & (5) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y-z=4 & (1) \\ y+z-t=5 & (2) \\ z+t-u=6 & (3) \\ t+u-x=12 & (4) \\ u+x-y=8 & (5) \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Từ hệ phương trình đã cho, cộng vế với vế ta được:

$3(x+y+z+t+u)=45 \Rightarrow x+y+z+t+u=15 \quad (6)$

Từ (6) và (1) suy ra: $6+t+u=15 \Rightarrow t+u=9$

Thay vào (4) ta có: $x=1$

Thay vào (3) ta có: $z=3$

Thay vào (1) ta được: $y=2$

Thay $x=1; z=3$ vào (3) ta được: $t=4$

Thay $z=3; t=4$ vào (4) ta được: $u=5$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y;z;t;u)=(1;2;3;4;5)$.

b) Từ hệ phương trình cộng vế với vế ta được:

$x+y+z+t+u=35 \quad (6)$

Từ phương trình (1) ta có: $x+y=4+z$

Từ phương trình (4) ta có: $t+u=12+x$

Thay vào phương trình (6) ta có: $4+z+z+12+x=35 \Rightarrow x=19-2z$

Thay vào phương trình (1) ta có: $19-2z+y-z=4 \Rightarrow y=3z-15$

Thay vào phương trình (2) ta có: $3z-15+z-t=5 \Rightarrow t=4z-20$

Thay vào phương trình (3) ta có: $z+4z-20-u=6 \Rightarrow u=5z-26$

Thay vào phương trình (4) ta có: $4z-20+5z-26-19+2z=12 \Rightarrow z=7$

Từ đó ta tính được: $x=19-2z=5$

$y=3z-15=6$

$t=4.7-20=8$

$u=5.7-26=9$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y;z;t;u)=(5;6;7;8;9)$.

13.5. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+3y+5z+3t=34 & (1) \\ x+y+2z+t=13 & (2) \\ x+2y+5z+4t=36 & (3) \\ x+3y+8z+5t=51 & (4) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z+t=10 & (1) \\ x+2y-z+t=6 & (2) \\ x+3y+z-t=6 & (3) \\ x-y+2z+2t=13 & (4) \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Từ phương trình (1) và (2) ta có: $2y+3z+2t=21$ (5)

Từ phương trình (1) và (3) ta có: $y-t=-2$ (6)

Từ phương trình (1) và (4) ta có: $3z+2t=17$ (7)

Từ phương trình (6) $\Rightarrow y=t-2$ thay vào phương trình (5) ta được:

$2(t-2)+3z+2t=21 \Rightarrow 3z+4t=25$ (8)

Từ phương trình (7) và (8) ta có hệ phương trình :

$\begin{cases} 3z+2t=17 \\ 3z+4t=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ t=4 \end{cases}$.

- Từ đó ta tính được: $y=t-2=4-2=2$.
- Thay vào phương trình (1) ta có: $x+3.2+5.3+3.4=34 \Rightarrow x=1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y;z;t)=(1;2;3;4)$.

b) Từ phương trình (1) và (2) ta có: $y-2z=-4$ (5)

Từ phương trình (1) và (3) ta có: $2y-2t=-4 \Rightarrow y-t=-2$ (6)

Từ phương trình (1) và (4) ta có: $2y-z-t=-3$ (7)

Từ phương trình (5) $\Rightarrow y=2z-4$ thay vào phương trình (6):

$2z-4-t=-2 \Rightarrow t=2z-2$ thay vào phương trình (7) ta có:

$2(2z-4)-z-(2z-2)=-3 \Rightarrow z=3$

Từ đó ta tính được: $y=2.3-4=2;\ \ t=2.3-2=4.$

Thay vào phương trình (1) ta có: $x+2+3+4=10 \Rightarrow x=1.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y;z;t)=(1;2;3;4).$

13.6. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z}{3} \\ 2x-y+4z=30 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{7} \\ 4x-y-z=3 \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z}{3}=k$ suy ra $x=5k;\ y=7k;\ z=3k$

Mà $2x-y+4z=30$ nên $10k-7k+12=30 \Leftrightarrow 15k=30 \Leftrightarrow k=2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x=5.2=10 \\ y=7.2=14. \\ z=3.2=6 \end{cases}$

b) Đặt $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{7}=k$ suy ra $x=3k+2;\ y=4k-1;\ z=7k.$

Mà $4x-y-z=3$ nên $4(3k+2)-(4k-1)-7k=3 \Leftrightarrow k=-6.$

Suy ra $\begin{cases} x=3.(-6)+2=-16 \\ y=4.(-6)-1=-25\ . \\ z=7.(-6)=-42 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y;z)=(-16;-25;-42).$

Chuyên đề 14. HỆ PHƯƠNG TRÌNH
QUY VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. Một số ví dụ

Một số hệ phương trình không phải là hệ phương trình bậc nhất, sau một số bước biến đổi thích hợp, chúng ta có thể giải được bằng cách đưa về hệ phương trình bậc nhất hoặc tìm được nghiệm một cách giản đơn. Sau đây là một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+xy+y=9 \\ y+yz+z=4 \\ z+zx+x=1 \end{cases}$

(Thi HSG Toán lớp 9, TP. Đà Nẵng, Năm 2011 – 2012)

Giải

$$\begin{cases} x+xy+y=9 \\ y+yz+z=4 \\ z+zx+x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+xy+y+1=10 \\ y+yz+z+1=5 \\ z+zx+x+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)=10 & (1) \\ (y+1)(z+1)=5 & (2) \\ (z+1)(x+1)=2 & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), (2), (3) nhân vế với vế, ta được:

$$(x+1)^2(y+1)^2(y+1)^2=100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (x+1)(y+1)(y+1)=10 & (4) \\ (x+1)(y+1)(y+1)=-10 & (5) \end{array}\right.$$

- *Trường hợp 1.* Xét phương trình (4): $(x+1)(y+1)(y+1)=10$

Kết hợp với phương trình (1), (2), (3) ta có: $\begin{cases} z+1=1 \\ x+1=2 \\ y+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=1 \\ y=4 \end{cases}$.

- *Trường hợp 2.* Xét phương trình (5): $(x+1)(y+1)(y+1)=-10$

Kết hợp với phương trình (1), (2), (3) ta có: $\begin{cases} z+1=-1 \\ x+1=-2 \\ y+1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2 \\ x=-3 \\ y=-6 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $(x;y;z) \in \{(1;4;0),(-3;-6;-2)\}$.

Nhận xét. Thông thường bài toán có thể giải bằng phương pháp thế : Từ phương trình (1) và (2) biểu diễn x theo y và z theo y thế vào phương trình (3). Ta thu được phương trình một ẩn (ẩn y). Cách giải đó đúng, nhưng dài, có thể dẫn đến sai lầm. Quan sát kỹ, chúng ta thấy hệ số của ẩn có vai trò như nhau trong mỗi phương trình. Vì vậy ta có thể thêm bớt để phân tích thành nhân tử và có cách giải như trên.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=4 & (1) \\ |x+1|=3y-3 & (2) \end{cases}$

Giải

Tìm cách giải. Đặc điểm của hệ phương trình là chứa dấu giá trị tuyệt đối. Do vậy ta cần nhớ tới một số công thức sau:

- $A \geq 0$ với mọi A, dấu bằng xảy ra khi $A \geq 0$
- $|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$

Trình bày lời giải. Nhận xét: $|x+1| \geq 0$ nên suy ra $3y-3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$.

Do vậy $|y-1| = y-1$.

Kết hợp với phương trình (1) ta có: $3y-3+y-1=4 \Leftrightarrow y=2$.

Suy ra: $|x+1| = 3.2-3=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(x;y) \in \{(2;2),(-4;2)\}$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6(x+y)=5xy \\ 12(y+z)=7yz \\ 4(z+x)=3zx \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Thanh Hóa, năm học 2007 – 2008).

Giải

- Nhận xét: $x=y=z=0$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.
- Xét $xyz \neq 0$, hệ phương trình viết dưới dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{z+x}{zx}=\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} (1) \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{12} (2) \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{4} (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), (2), (3) cộng vế với vế ta được:

$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{13}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{12}(4)$

Từ phương trình (1) và (4) ta có: $\frac{5}{6}+\frac{1}{z}=\frac{13}{12}\Rightarrow z=4$

Từ phương trình (2) và (4) ta có: $\frac{1}{x}+\frac{7}{12}=\frac{13}{12}\Rightarrow x=2$

Từ phương trình (3) và (4) ta có: $\frac{1}{y}+\frac{3}{4}=\frac{13}{12}\Rightarrow y=3$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y;z)=\{(0;0;0);(2;3;4)\}$.

Nhận xét: Ttrước khi chia hai vế cho ẩn số, chúng ta cần xét trường hợp $x=y=z=0$ trước. Tránh mất nghiệm của hệ phương trình.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}(x+y)(x+z)=8 & (1)\\(y+x)(y+z)=16 & (2)\\(z+x)(z+y)=32 & (3)\end{cases}$

Giải

Từ hệ phương trình, nhân vế với vế ta được:

$(x+y).(x+z).(y+z)=4096$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x+y).(x+z).(y+z)=64\\(x+y).(x+z).(y+z)=-64\end{array}\right.$

Trường hợp 1: Xét $(x+y).(x+z).(y+z)=64$ (4)

Kết hợp các phương trình (1), (2), (3) ta có: $\begin{cases}8.(y+z)=64\\16.(x+z)=64\\32.(x+y)=64\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=8 & (5)\\x+z=4 & (6)\\x+y=2 & (7)\end{cases}$

Từ các phương trình (5), (6), (7) cộng vế với vế ta được:

$2.(x+y+z)=14\Leftrightarrow x+y+z=7$

Kết hợp các phương trình (5), (6), (7) ta được một nghiệm là: $\begin{cases}x=-1\\y=3\\z=5\end{cases}$.

Trường hợp 2. Xét $(x+y).(x+z).(y+z)=-64$ (8)

Kết hợp các phương trình (1), (2), (3) ta có:

$$\begin{cases} 8.(y+z) = -64 \\ 16.(x+z) = -64 \\ 32.(x+y) = -64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=-8 & (5) \\ x+z=-4 & (6) \\ x+y=-2 & (7) \end{cases}$$

Từ các phương trình (5), (6), (7) cộng vế với vế ta được:

$$2.(x+y+z) = -14 \Leftrightarrow x+y+z=-7$$

Kết hợp các phương trình (5), (6), (7) ta được một nghiệm là: $\begin{cases} x=1 \\ y=-3. \\ z=-5 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y;z) \in \{(-1;3;5),(1;-3;-5)\}$.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+6xy+8y^2=0 \end{cases}$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kĩ, chúng ta nhìn thấy phương trình (2) có thể phân tích thành nhân tử. Từ đó ta có thể sử dụng:

$$\begin{cases} A=0 \\ B.C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases}$$

Trình bày lời giải

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+6xy+8y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ (x+2y)(x+4y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x+y=3 \\ x+4y=0 \end{cases}.$$

- Giải hệ $\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-3 \end{cases}$
- Giải hệ $\begin{cases} x+y=3 \\ x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=-3 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y) \in \{(6;-3);(4;-1)\}$

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=72 & (1) \\ (y+z)(x+y+z)=120 & (2) \\ (x+z)(x+y+z)=96 & (3) \end{cases}$

Giải

Từ phương trình (1), (2), (3) cộng vế với vế ta được:

$$2(x+y+z)^2 = 288 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 = 144 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ x+y+z=-12 \end{array}\right.$$

- *Trường hợp 1:* Xét $x+y+z=12$ (4). Kết hợp với hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} (x+y)12=72 \\ (y+z)12=120 \\ (z+x)12=96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 & (5) \\ y+z=10 & (6) \\ z+x=8 & (7) \end{cases}$$

Từ (4) và (5) ta có: $z+6=12 \Leftrightarrow z=6$

Từ (4) và (6) ta có: $x+10=12 \Leftrightarrow x=2$

Từ (4) và (7) ta có: $y+8=12 \Leftrightarrow y=4.$

Vậy $(x;y;z)=(2;4;6)$ là nghiệm của hệ phương trình.

- *Trường hợp 2.* Xét $x+y+z=-12$ (8). Kết hợp hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} (x+y)(-12)=72 \\ (y+z)(-12)=120 \\ (z+x)(-12)=96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-6 & (9) \\ y+z=-10 & (10) \\ z+x=-8 & (11) \end{cases}$$

Từ phương trình (8) và (9) ta được: $z-6=-12 \Leftrightarrow z=-6$

Từ phương trình (8) và (10) ta được: $x-10=-12 \Leftrightarrow x=-2$

Từ phương trình (8) và (11) ta được: $y-8=-12 \Leftrightarrow y=-4.$

Suy ra $(x;y;z)=(-2;-4;-6).$ là nghiệm của hệ phương trình. Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là:

$(x;y;z) \in \{(2;4;6),(-2;-4;-6)\}$

B. Bài tập vận dụng

14.1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3xy = 2.(x+y) \\ 5yz = 6(y+z) \\ 4zx = 3.(z+x) \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, Quảng Ngãi, năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải – đáp số

- Nhận xét: $x=y=z=0$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.
- Xét $xyz \neq 0,$ hệ phương trình viết dưới dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{z+x}{zx}=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} & (1) \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{6} & (2) \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{3} & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), (2), (3) cộng vế với vế ta được:

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{11}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{6} \quad (4)$$

Từ phương trình (1) và (4) ta có: $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{6} \Rightarrow z=3$

Từ phương trình (2) và (4) ta có: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{11}{6} \Rightarrow x=1$

Từ phương trình (3) và (4) ta có: $\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{11}{6} \Rightarrow y=2$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y;z)$ là $(0;0;0);(1;2;3)$

14.2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{12}{5} \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{18}{5} \\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{36}{13} \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, TP Hồ Chí Minh, năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $x,y,z\neq 0$ nên hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{5}{18} \\ \dfrac{z+x}{zx}=\dfrac{13}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{12} & (1) \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{18} & (2) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{13}{36} & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), (2), (3) cộng vế với vế ta được:

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{19}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{36} \quad (4)$$

Từ phương trình (1) và (4) ta có: $\frac{5}{12}+\frac{1}{z}=\frac{19}{36}\Rightarrow z=9;$

Từ phương trình (2) và (4) ta có: $\frac{1}{x}+\frac{5}{18}=\frac{19}{36}\Rightarrow x=4;$

Từ phương trình (3) và (4) ta có: $\frac{1}{y}+\frac{13}{36}=\frac{19}{36}\Rightarrow y=6.$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y;z)=(4;6;9)$

14.3. Tìm $x;y;z$ thỏa mãn hệ sau: $\begin{cases}x^3-3x-2=2-y\\y^3-3y-2=4-2z\\z^3-3z-2=6-3x\end{cases}$

(Thi học sinh Toán lớp 9, Ninh Bình, năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $\begin{cases}x^3-3x-2=2-y\\y^3-3y-2=4-2z\\z^3-3z-2=6-3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x+1)^2=2-y\\(y-2)(y+1)^2=2.(2-z)\\(z-2)(z+2)^2=3.(2-x)\end{cases}$

Nhân từng vế của ba phương trình ta được:

$(x-2).(y-2).(z-2).(x+1)^2.(y+1)^2.(z+1)^2=-6.(x-2).(y-2).(z-2)$

$\Leftrightarrow(x-2).(y-2).(z-2).\left[(x+1)^2.(y+1)^2.(z+1)^2+6\right]=0$

$\Leftrightarrow(x-2).(y-2).(z-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\y=2\\z=2\end{array}\right.$

Với $x=2$ thế vào phương trình, ta được $y=2,z=2.$

Tương tự với $y=2$ hoặc $z=2,$ thay vào phương trình ta đều có $x=y=z=2.$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y;z)=(2;2;2).$

14.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)(x+z)=12\\(y+x)(y+z)=15\\(z+y)(z+x)=20\end{cases}$ (Với *x, y, z* là các số thực dương)

(Thi HSG Toán lớp 9, tỉnh Bắc Ninh, năm 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ hệ phương trình, nhân vế với vế ta được:

$$(x+y)^2.(x+z)^2.(y+z)^2=3600 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x+y).(x+z).(y+z)=60 \\ (x+y).(x+z).(y+z)=-60\end{array}\right.$$

Trường hợp 1. Xét $(x+y).(x+z).(y+z)=60\ \ (4)$

Kết hợp các phương trình (1), (2), (3) ta có:

$$\begin{cases}12.(y+z)=60 \\ 15.(x+z)=60 \\ 20.(x+y)=60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+z=5 & (5) \\ x+z=4 & (6) \\ x+y=3 & (7)\end{cases}$$

Từ các phương trình (5), (6), (7) cộng vế với vế ta được:

$$2.(x+y+z)=12 \Leftrightarrow x+y+z=6$$

Kết hợp các phương trình (5), (6), (7) ta được một nghiệm là: $\begin{cases}x=1 \\ y=2 \\ z=3\end{cases}$

Trường hợp 2. Xét $(x+y).(x+z).(y+z)=-60,$ không xảy ra vì $x>0, y>0, z>0.$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y;z)=(1;2;3)$.

14.5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+y-2=4.\sqrt{z-2} \\ y+z-2=4.\sqrt{x-2} \\ z+x-2=4\sqrt{y-2}\end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Cộng vế với vế ta được:

$$2x+2y+2z-6=4\sqrt{z-2}+4\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-2}$$

$$\Leftrightarrow x+y+z-3=2\sqrt{z-2}+2\sqrt{x-2}+2\sqrt{y-2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{z-2}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2}-1=0 \\ \sqrt{y-2}-1=0 \\ \sqrt{z-2}-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3 \\ y=3 \\ z=3\end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $(x;y;z)=(3;3;3)$.

14.6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y-4x=5 \\ 2|y-2x|+|x+y-1|=7\end{cases}$

Thi HSG Toán lớp 9, tỉnh Trà Vinh, năm 2009 – 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ phương trình (1) ta có: $y=4x+5$ thế vào phương trình (2) ta được:

$$2|4x+5-2x|+|x+4x+5-1|=7 \Leftrightarrow 2.|2x+5|+|5x+4|=7 \quad (*)$$

- ***Trường hợp 1.*** Xét $\mathrm{x}<-\dfrac{5}{2}$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow -2(2x+5)-(5x+4)=7$

$\Leftrightarrow -4x-10-5x-4=7 \Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{3}$ (thỏa mãn)

Từ (1), suy ra: $y=4\left(-\dfrac{7}{3}\right)+5=-\dfrac{13}{3}$

- ***Trường hợp 2.*** Xét $-\dfrac{5}{2}\le x\le -\dfrac{4}{5}$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow 2(2x+5)-(5x+4)=7 \Leftrightarrow 4x+10-5x-4=7 \Leftrightarrow x=-1$

Từ (1), suy ra: $y=4.(-1)+5=1.$

- ***Trường hợp 3.*** Xét $x>-\dfrac{4}{5}$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow 2(2x+5)+5x+4=7$

$\Leftrightarrow 4x+10+5x+4=7 \Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{9}$ (thỏa mãn)

Từ (1) suy ra $y=4\left(-\dfrac{7}{9}+5\right)=\dfrac{17}{9}.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là:

$$\left(\frac{-7}{3};-\frac{13}{3}\right);(-1;1);\left(-\frac{7}{9};\frac{17}{9}\right).$$

14.7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2-4xy=1 \\ x-y=1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$

- Giải hệ $\begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$
- Giải hệ $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y) \in \{(1;0);(3;2)\}$.

14.8. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} |x-y|+y=8 & (1) \\ x-4y=6 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-3y+4=0 & (1) \\ |3x-2y|+2y=4 & (2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5 & (1) \\ |x+1|=4y-4 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Từ phương trình (2) ta có: $x=4y+6$ thay vào phương trình (1) ta được

$$|4y+6-y|+y=8 \Leftrightarrow |3y+6|+y=8$$

- Trường hợp 1: Xét $y<-2,$ ta được phương trình

$-3y-6+y=8 \Leftrightarrow -2y=14 \Leftrightarrow y=-7$ suy ra $x=4.(-7)+6=-22$

- Trường hợp 2: Xét $y \geq -2,$ ta được phương trình

$3y+6+y=8 \Leftrightarrow 4y=2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$ suy ra $x=4.\frac{1}{2}+6=8.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) \in \left\{(-22;-7);\left(8;\frac{1}{2}\right)\right\}.$

b) Từ phương trình (1) ta có: $x=3y-4$ thay vào phương trình (2) ta được

$|3.(3y-4)-2y|+2y=4 \Leftrightarrow |7y-12|+2y=4$

- Trường hợp 1: Xét $y<\frac{12}{7},$ ta được phương trình

$12-7y+2y=4 \Leftrightarrow -5y=-8 \Leftrightarrow y=\frac{8}{5}$ suy ra $x=3.\frac{8}{5}-4=\frac{4}{5}$

- Trường hợp 2: Xét $y \geq \frac{12}{7},$ ta được phương trình

$7y-12+2y=4 \Leftrightarrow 9y=16 \Leftrightarrow y=\frac{16}{9}$ suy ra $x=3.\frac{16}{9}-4=\frac{4}{3}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y) \in \left\{\left(\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right),\left(\frac{4}{3};\frac{16}{9}\right)\right\}.$

c) Từ phương trình (2) thay vào phương trình (1) ta được:

$4y-4+\left|y-1\right|=5$

- Trường hợp 1: Xét $y<1,$ ta được phương trình

$4y-4+1-y=5\Leftrightarrow 3y=8\Leftrightarrow y=\dfrac{8}{3}$ (không thỏa mãn)

- Trường hợp 2: Xét $y\ge 1,$ ta được phương trình

$4y-4+y-1=5\Leftrightarrow 5y=5\Leftrightarrow y=2$ (thỏa mãn)

Suy ra $\left|x-1\right|=4.2-4=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=4 \\ x-1=-4 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;y\right)\in\left\{\left(5;2\right),\left(-3;2\right)\right\}$.

14.9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x+y\right)\left(y+z\right)=187 & (1) \\ \left(y+z\right)\left(z+x\right)=154 & (2) \\ \left(z+x\right)\left(x+y\right)=138 & (3) \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ phương trình (1), (2), (3) nhân vế với vế ta được:

$\left(x+y\right)^2\left(y+z\right)^2\left(z+x\right)^2=6853924\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)=2618 \\ \left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)=-2618 \end{array}\right.$

* ***Trường hợp 1.*** Xét $\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)=2618 \quad (4)$ kết hợp với hệ phương trình ta được:

$\begin{cases} z+x=14 & (5) \\ x+y=17 & (6) \\ y+z=11 & (7) \end{cases}$

Từ phương trình (5), (6), (7) cộng vế với vế ta được:

$2\left(x+y+z\right)=42\Leftrightarrow x+y+z=21 \quad (8)$

Từ phương trình (8) và (5) ta có: $y+14=21\Leftrightarrow y=7$

Từ phương trình (8) và (6) ta có: $z+17=21\Leftrightarrow z=4$

Từ phương trình (8) và (7) ta có: $x+11=21\Leftrightarrow x=10$

Nên $\left(x;y;z\right)=\left(10;7;4\right)$ là nghiệm một của phương trình.

* ***Trường hợp 2.*** Xét $\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)=-2618$ kết hợp với hệ phương trình ta được:

$\begin{cases} z+x=-14 & (9) \\ x+y=-17 & (10) \\ y+z=-11 & (11) \end{cases}$

Từ phương trình (9), (10), (11) cộng vế với vế ta được:

$$2(x+y+z)=-42 \Leftrightarrow x+y+z=-21 \quad (12)$$

Từ phương trình (12) và (9) ta có: $y-14=-21 \Leftrightarrow y=-7$

Từ phương trình (12) và (10) ta có: $z-17=-21 \Leftrightarrow z=-4$

Từ phương trình (12) và (11) ta có: $x-11=-21 \Leftrightarrow x=-10$

Nên $(x;y;z)=(-10;-7;-4)$ là một nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y;z)\in\{(10;7;4);(-10;-7;-4)\}$.

14.10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-x-y=5 \\ yz-y-z=11 \\ zx-z-x=7 \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{cases} xy-x-y+1=6 \\ yz-y-z+1=12 \\ zx-z-x+1=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1)=6 \quad (1) \\ (y-1)(z-1)=12 \quad (2) \\ (z-1)(x-1)=8 \quad (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1); (2); (3) nhân vế với vế ta được:

$$(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2=576 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(y-1)(z-1)=24 \\ (x-1)(y-1)(z-1)=-24 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1. Xét $(x-1)(y-1)(z-1)=24 \quad (4)$

Từ phương trình (1) và (4) ta có: $6(z-1)=24 \Leftrightarrow z=5$

Từ phương trình (2) và (4) ta có: $12(x-1)=24 \Leftrightarrow x=3$

Từ phương trình (3) và (4) ta có: $8(y-1)=24 \Leftrightarrow y=4$

Suy ra $(x;y;z)=(3;4;5)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Trường hợp 2. Xét $(x-1)(y-1)(z-1)=-24 \quad (5)$

Từ phương trình (1) và (4) ta có: $6(z-1)=-24 \Leftrightarrow z=-3$

Từ phương trình (2) và (4) ta có: $12(x-1)=-24 \Leftrightarrow x=-1$

Từ phương trình (3) và (4) ta có: $8(y-1)=-24 \Leftrightarrow y=-2$

Suy ra $(x;y;z)=(-1;-2;-3)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình: $(x;y;z)\in\{(3;4;5);(-1;-2;-3)\}$.

14.11. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{xyz}{x+y}=2\\ \dfrac{xyz}{y+z}=1\dfrac{1}{5}\\ \dfrac{xyz}{x+z}=1\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{cases}\dfrac{xyz}{x+y}=2\\ \dfrac{xyz}{y+z}=1\dfrac{1}{5}\\ \dfrac{xyz}{x+z}=1\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{xyz}{x+y}=2\\ \dfrac{xyz}{y+z}=\dfrac{5}{5}\\ \dfrac{xyz}{x+z}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

- $xyz=0$ không phải là nghiệm của phương trình
- Xét $xyz\neq 0$ hệ phương trình viết dưới dạng:

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xyz}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{y+z}{xyz}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{x+z}{xyz}=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=\dfrac{1}{2} & (1)\\ \dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{5}{6} & (2)\\ \dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{2}{3} & (3)\end{cases}$$

Từ phương trình (1), (2), (3) cộng vế với vế ta được:

$$2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)=2\Leftrightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=1\quad(4)$$

Kết hợp phương trình (4) với các phương trình (1), (2), (3) ta được:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{2}=1\\ \dfrac{1}{yz}+\dfrac{5}{6}=1\\ \dfrac{1}{xz}+\dfrac{2}{3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{yz}=\dfrac{1}{6}\\ \dfrac{1}{xz}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=2 & (5)\\ yz=6 & (6)\\ xz=3 & (7)\end{cases}$$

Từ phương trình (5); (6); (7) nhân vế với vế ta được: $x^2y^2z^2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}xyz=6\\ xyz=-6\end{array}\right.$

Trường hợp 1. Xét $xyz=6\quad(8)$

Kết hợp phương trình (8) với các phương trình (5), (6), (7) ta được:

$$\begin{cases} 2.z = 6 \\ 6.x = 6 \\ 3.y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Trường hợp 2. Xét $xyz = -6$ (9)

Kết hợp phương trình (9) với các phương trình (5), (6), (7) ta được:

$$\begin{cases} 2.z = -6 \\ 6.x = -6 \\ 3.y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3 \\ x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình: $(x; y; z) \in \{(1; 2; 3); (-1; -2; -3)\}$.

14.12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(x+y) = 0 \\ y^2 + z^2 - 2(y+z) = 0 \\ z^2 + x^2 - 2(z+x) = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(x+y) = 0 \\ y^2 + z^2 - 2(y+z) = 0 \\ z^2 + x^2 - 2(z+x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \ \ (1) \\ (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2 \ \ (2) \\ (z-1)^2 + (x-1)^2 = 2 \ \ (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), (2), (3) cộng vế với vế ta được:

$$2\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2\right] = 6 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3 \ \ (4)$$

Từ phương trình (4) kết hợp với các phương trình (1), (2), (3) ta được:

$$\begin{cases} (z-1)^2 + 2 = 3 \\ (x-1)^2 + 2 = 3 \\ (y-1)^2 + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z-1)^2 = 1 \\ (x-1)^2 = 1 \\ (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm $(x; y; z)$ của hệ phương trình là:

$$s = \{(0;0;0);(0;0;2);(0;2;0);(2;0;0);(0;2;2);(2;0;2);(2;2;0);(2;2;2)\}$$

14.13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x = y^2 + y \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, Đại học Vinh, năm học 2015 – 2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $\begin{cases} x^2 - y^2 + x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

- ***Trường hợp 1.*** Xét $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}.$

- ***Trường hợp 2.*** Xét $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 5 \quad (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $y = -1 - x,$ thế vào phương trình (2), ta được:

$x^2 + (-x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = -1 - 1 = -2.$

Với $x = -2 \Rightarrow y = -1 - (-2) = 1.$

Vậy tập nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình là:

$$S = \left\{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right), (1; -2), (-2; 1)\right\}.$$

14.14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 20(x+y) = 9xy \\ 20(y+z) = 11yz \\ 12(z+x) = 5zx \end{cases}$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, Đại học Vinh, năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

- Nhận xét $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.
- Xét $xyz \neq 0$ hệ phương trình viết dưới dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{9}{20} \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{11}{30} \\ \dfrac{z+x}{zx} = \dfrac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{20} & (1) \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{11}{30} & (2) \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{12} & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), (2), (3) cộng vế với vế ta được:

$2\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{37}{30} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{37}{60} \quad (4)$

Từ phương trình (1) và (4) ta có: $\frac{9}{20}+\frac{1}{z}=\frac{37}{60} \Rightarrow z=6$.

Từ phương trình (2) và (4) ta có: $\frac{11}{30}+\frac{1}{x}=\frac{37}{60} \Rightarrow x=4$.

Từ phương trình (3) và (4) ta có: $\frac{5}{12}+\frac{1}{y}=\frac{37}{60} \Rightarrow y=5$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y;z)$ là $\{(0;0;0);(4;5;6)\}$.

Chuyên đề 15. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

Trong quá trình giải hệ phương trình chứa tham số, để thỏa mãn điều kiện nào đó về nghiệm số của hệ phương trình, chúng ta cần nhớ một số kiến thức sau:

1. Phương trình $ax+b=0$ (1)

- Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a\neq 0$.
- Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow a=0,\ b\neq 0$.
- Phương trình (1) vô số nghiệm $\Leftrightarrow a=,\ b=0$.

2. Đối với hệ phương trình: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Với điều kiện a',b',c' khác 0. Cần lưu ý đến tỉ số $\frac{a}{a'},\frac{b}{b'}$ và $\frac{c}{c'}$ để rút ra kết luận về số nghiệm của hệ phương trình. Cụ thể là:

- Nếu $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- Nếu $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình có vô nghiệm.
- Nếu $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải và biện luận hệ phương trình hai ẩn x và y sau đây theo tham số m.

$$\begin{cases} mx+2y=m+1 & (1) \\ 2x+my=3 & (2) \end{cases}$$

(Thi học sinh giỏi toán 9, TP Hồ Chí Minh năm học 1991 – 1992. Vòng 1)

Giải

Tìm cách giải. Giải và biện luận hệ phương trình là xét tất cả các trường hợp theo giá trị của tham số m và kết quả bài toán ứng với giá trị đó. Bài toán thường có nhiều cách giải. Trong bài này nên dùng phương pháp thế đưa về phương trình một ẩn. Chẳng hạn từ phương trình (1) biểu thị y theo x, thế vào phương trình (2) ta được phương trình một ẩn (ẩn x), số nghiệm của hệ phương trình phụ thuộc vào phương trình này.

Trình bày lời giải.

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-mx + m + 1}{2} \\ 2x + my = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \dfrac{-m^2x + m^2 + m}{2} = 3 \\ y = \dfrac{-mx + m + 1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - m^2x + m^2 + m = 6 \\ y = \dfrac{-mx + m + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(4 - m^2\right)x = -m^2 - m + 6 \\ y = \dfrac{-mx + m + 1}{2} \end{cases} \quad (*)$$

- Nếu $m = 2$

Ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0.x = 0 \\ y = \dfrac{-2x + 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{-2x + 3}{2} \end{cases}$

- Nếu $m = -2$

Ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0.x = 4 \\ y = \dfrac{2x - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \varnothing \\ y = \dfrac{2x - 1}{2} \end{cases}$

- Nếu $m \ne \pm 2$

Ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-m^2 - m + 6}{4 - m^2} \\ y = \dfrac{-mx + m + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{(m + 3)(2 - m)}{(2 + m)(2 - m)} \\ y = \dfrac{-mx + m + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m + 3}{m + 2} \\ y = \dfrac{1}{m + 2} \end{cases}$.

Kết luận:

- $m = 2$ hệ phương trình có vô số nghiệm. Công thức nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{-2x + 3}{2} \end{cases}$
- $m = -2$ hệ phương trình vô số nghiệm
- $m \ne \pm 2$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{m + 3}{m + 2} \\ y = \dfrac{1}{m + 2} \end{cases}$.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m - 1)x - my = 3m - 1 & (1) \\ 2x - y = m + 5 & (2) \end{cases}$

a) Giải phương trình với $m = 2$

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất sao cho $x^2 - y^2 < 4$.

Giải

a) Với $m = 2$ thế vào hệ phương trình.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình.

b) ***Tìm cách giải.*** Bước đầu chúng ta tìm điều kiện của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất bằng phương pháp thế hoặc tỉ số các hệ số (trong câu này dùng phương pháp thế). Sau đó thay nghiệm vào $x^2 - y^2 < 4$ ta được bất phương trình chứa m. Giải bất phương trình ẩn m xong, ta kết hợp với điều kiện đề bài rồi kết luận.

Trình bày lời giải. Từ phương trình $(2) \Rightarrow y = 2x - m - 5$

Thế vào phương trình (1):

$(m-1)x - m(2x-m-5) = 3m-1 \Leftrightarrow (m+1)x = (m+1)^2$

Điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất $m \neq -1 \Rightarrow x = m+1 \Rightarrow y = m-3$

$x^2 - y^2 = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 6m - 9 = 8m - 8 < 4$

$\Rightarrow 8m < 12 \Rightarrow m < 1,5.$

Vậy $m < 1,5$ và $m \neq -1$ thì $x^2 - y^2 < 4$

Ví dụ 3: Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x + 2my = 1 \\ (3m-1)x - my = 1 \end{cases}$$

Giải

Tìm cách giải. Với điều kiện a', b', c' khác 0. Cần lưu ý đến tỉ số $\frac{a}{a'}; \frac{b}{b'}$ và $\frac{c}{c'}$ để rút ra kết luận về hệ phương trình vô nghiệm. Cụ thể là: Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình vô nghiệm. Tuy nhiên trước khi xét tỉ số, chúng ta cần xác định các trường hợp riêng $a' = 0,\ b' = 0,\ c' = 0.$

Trình bày lời giải

- Xét $m = 0$ hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} x = -1 \\ -x = 1 \end{cases}$ hệ phương trình vô nghiệm.
- Xét $m = \frac{1}{3}$, hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} x + \frac{2}{3}y = 1 \\ -\frac{1}{3}y = 1 \end{cases}$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

- Xét $m \notin \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$. Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{3m-1} = \frac{2m}{-m} \neq 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3m-1} = -2 \Leftrightarrow 1 = -6m + 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}$.

Vậy với $m \in \left\{0; \frac{1}{6}\right\}$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất thỏa mãn $2x + y \leq 3$.

Giải

a) Với $m = 2$, hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases}x + y = 2 \\ 2x + y = 3\end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

b) $\begin{cases}(m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{2-y}{m-1} \\ mx + y = m+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = m-1 \\ y = -m^2 + 2m + 1\end{cases}$ là nghiệm.

Xét $2x + y = 2m - 2 - m^2 + 2m + 1 = 3 - (m-2)^2 \leq 3$. Điều phải chứng minh.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nguyên của n để hệ phương trình sau có nghiệm nguyên duy nhất

$\begin{cases}nx + 2y = n + 1 \quad (1) \\ 2x + ny = 2n - 1 \ (2)\end{cases}$

(Thi HSG Toán lớp 9, tỉnh Đồng Tháp, năm 2009 – 2010)

Giải

Tìm cách giải. Giải hệ phương trình để hệ có nghiệm nguyên là tìm nghiệm $(x; y)$ mà x, y đều là số nguyên. Trong bài này, đầu tiên chúng ta tìm nghiệm $(x; y)$ theo n. Sau đó tìm số nguyên n sao cho x, y nhận giá trị nguyên.

Trình bày lời giải.

Từ (1) suy ra: $y = \frac{n+1-nx}{2}$ thay vào (2) ta được:

$2x + \frac{n(n+1-nx)}{2} = 2n - 1$

$\Leftrightarrow 4x+n^2+n-n^2x=4n-2$

$\Leftrightarrow \left(4-n^2\right)x=-n^2+3n-2$

$\Leftrightarrow (2-n)(2+n).x=(n-1)(2-n)$ (*)

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow (2-n)(2+n)\neq 0 \Leftrightarrow n\neq \pm 2.$

Với $n\neq \pm 2,$ từ phương trình (*) ta có: $x=\dfrac{(n-1)(2-n)}{(2-n)(2+n)}=\dfrac{n-1}{n+2}.$

Khi đó $y=\dfrac{1}{2}\left(n+1-n.\dfrac{n-1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{n^2+2n+n+2-n^2+n}{n+2}$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{2n+1}{n+2}$

Nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x=\dfrac{n-1}{n+2}=1-\dfrac{3}{n+2} \\ y=\dfrac{2n+1}{n+2}=2-\dfrac{3}{n+2} \end{cases}.$

x, y nguyên $\Leftrightarrow n+2\in$ Ư(3)

Mà Ư(3) $=\{1;3;-1;-3\}$ nên $n+2\in\{1;3;-1;-3\}$

$\Leftrightarrow n\in\{-1;1;-3;-5\}.$

C. Bài tập vận dụng

15.1. Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x-(m-1)y=m-37\\ x+2y=3m+1\end{cases}$ (m là tham số)

a) Với m nào thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Tìm m nguyên để hệ phương trình có nghiệm nguyên *x; y* nguyên và $x+y$ bé nhất.

(Thi HSG Toán lớp 9, tỉnh An Giang, năm học 2011 – 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Từ phương trình (2) ta có: $x=3m+1-2y,$ thế vào phương trình (1) ta có:

$(m-1)(3m+1-2y)-(m-1)y=m-37 \Leftrightarrow (m-1)y=m^2-m+12$ (*)

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1.$

b) Với $m \neq 1,$ từ phương trình (*) ta có: $y = \dfrac{m^2 - m + 12}{m-1} = m + \dfrac{12}{m-1}$

Suy ra: $x = 3m + 1 - 2\left(m + \dfrac{12}{m-1}\right) = m + 1 - \dfrac{24}{m-1}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = m + 1 - \dfrac{24}{m-1} \\ y = m + \dfrac{12}{m-1} \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình.

$x, y \in Z$ mà $m \in Z \Rightarrow m - 1 \in$ Ư(12) . Suy ra:

m-1	-1	-2	-3	-4	-6	-12	1	2	3	4	6	12
m	0	-1	-2	-3	-5	-11	2	3	4	5	7	13

Mà $x + y = 2m + 1 - \dfrac{12}{m-1}.$

Thử trực tiếp ta được: $m = -11$ thì $x + y = -20$ đạt giá trị nhỏ nhất.

15.2. Tìm tất cả các số thực m để hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2 \quad (1) \\ 3x + my = 5 \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn

$x > 0$ và $y > 0.$

(Thi HSG Toán lớp 9, tỉnh ĐakLac, năm học 2011 – 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ phương trình (1) của hệ suy ra: $y = mx - 2,$ thay vào phương trình (2) ta được:

$3x + m(mx - 2) = 5 \Leftrightarrow 3x + m^2x - 2m = 5 \Leftrightarrow x(3 + m^2) = 5 + 2m$

$\Rightarrow x = \dfrac{5 + 2m}{3 + m^2}; y = \dfrac{5 + 2m^2}{3 + m^2} - 2 = \dfrac{5m - 6}{3 + m^2}$

$x > 0 \Rightarrow 5 + 2m > 0 \Rightarrow m > \dfrac{-5}{2}.$

$y > 0 \Rightarrow 5m > 6 \Rightarrow m > \dfrac{6}{5}.$

Vậy $m > \dfrac{6}{5}$ thì hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn $x > 0; y > 0.$

15.3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + my = 1 \end{cases}$ (m là tham số)

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm. Tìm nghiệm đó.

b) Xác định giá trị nhỏ nhất của $P=(x+2y+1)^2+(3x+my-1)^2$.

(Thi HSG Toán lớp 9, tỉnh An Giang, năm 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6y=-3 \\ 3x+my=1 \end{cases} \Rightarrow my-6y=4$

$\Rightarrow y(m-6)=4 \Rightarrow m\neq 6$ thì hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x=\dfrac{m+2}{6-m} \\ y=\dfrac{4}{m-6} \end{cases}$.

b) Nếu $m=6$ thì $P=(x+2y+1)^2+(3x+6y-1)^2=\dfrac{1}{10}(10x+20y-2)^2+\dfrac{8}{5}\geq\dfrac{8}{5}$

Nếu $m\neq 6$ thì $P=(x+2y+1)^2+(3x+my-1)^2\geq 0$.

Giá trị nhỏ nhất của P là 0 khi $x=\dfrac{m+2}{6-m}; y=\dfrac{4}{m-6}$.

15.4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x-my=2\ (1) \\ mx-y=2\ (2) \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

b) Tìm các số nguyên m để cho hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với x; y là các số nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Từ phương trình (1) ta có: $x=2+my$, thay vào phương trình (2) ta được:

$m(2+my)-y=2 \Leftrightarrow 2m+m^2y-y=2$

$\Leftrightarrow y(m^2-1)=2-2m \Leftrightarrow y(m-1)(m+1)=2(1-m)$

Xét $m=1 \Rightarrow 0y=0 \Rightarrow$ phương trình vô số nghiệm $\Rightarrow$ hệ phương trình vô số nghiệm, nghiệm tổng quát của hệ phương trình là: $\begin{cases} x=y+2 \\ y\in R \end{cases}$

$m=-1 \Rightarrow 0y=4 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm

$m\neq\pm 1 \Rightarrow y(m+1)=-2 \Rightarrow y=\dfrac{-2}{m+1}; x=\dfrac{2}{m+1}$.

Kết luận:

- Với $m=1$ thì hệ phương trình vô số nghiệm, nghiệm tổng quát của hệ phương trình là: $\begin{cases} x=y+2 \\ y\in R \end{cases}$
- $m=-1$ thì hệ phương trình vô nghiệm.
- $m\neq \pm 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x=\dfrac{2}{m+1} \\ y=\dfrac{-2}{m+1} \end{cases}$.

b) Ta có $x,y\in Z \Rightarrow m+1\in$ Ư(2) và $m\neq \pm 1$

$\Rightarrow m\in \{0;-2;-3\}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x;y\in Z$.

15.5. Cho phương trình $\begin{cases} (a-1)x+2y=1 \\ 3x+ay=1 \end{cases}$ (I)

a) Giải hệ (1) với $a=\sqrt{3}+1$.

b) Tìm các giá trị của a để hệ (I) vô nghiệm.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $a=\sqrt{3}+1$ thì hệ (I) trở thành $\begin{cases} \sqrt{3}.x+2y=1 \\ 3x+\left(\sqrt{3}+1\right)y=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3.x+2\sqrt{3}.y=\sqrt{3} \\ 3x+\left(\sqrt{3}+1\right)y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}-1\right)y=\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}.x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

b) Ta có $x=\dfrac{1-ay}{3}$ thế vào phương trình (1)

Ta có: $\dfrac{(a-1)(1-ay)}{3}+2y=1 \Leftrightarrow a-1-a(a-1)y+6y=3$

$\Leftrightarrow a(a-1)y-6y=a-4 \Leftrightarrow (a+2)(a-3)y=a-4$ (3)

Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (3) vô nghiệm

$\Leftrightarrow (a+2)(a-3)=0$ và $a-4\neq 0$.

$\Leftrightarrow a=-2; a=3$.

15.6. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau vô nghiệm: $\begin{cases} x+2my=1 \\ (3m-1)x-my=1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ phương trình trên $\Rightarrow x = 1 - 2my$

Thế vào phương trình dưới, ta được: $\left(m - 6m^2\right)y = 2 - 3m$ (*)

Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 6m^2 = 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left\{0; \dfrac{1}{6}\right\}$

Vậy với $m \in \left\{0; \dfrac{1}{6}\right\}$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

15.7. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

b) Xác định các giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x > 0; y > 0$.

c) Với giá trị nguyên nào của m thì hệ có nghiệm $(x; y)$ với x; y là số nguyên dương.

d) Tìm giá trị m để hệ có nghiệm duy nhất sao cho $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

e) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thì điểm $M(x; y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Từ phương trình dưới $\Rightarrow x = 4 - my$

Thế vào phương trình trên: $m(4 - my) + 4y = 10 - m$

$\Leftrightarrow (m - 2)(m + 2)y = 5(m - 2)$ (*)

- Xét $m = 2,$ hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ y \in R \end{cases}$
- Xét $m = -2,$ phương trình (*) có dạng: $0y = -20$ vô nghiệm

$\Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.

- Xét $m \notin \{2; -2\}$ từ (*) suy ra: $y = \dfrac{5}{m + 2} \Rightarrow x = \dfrac{8 - m}{m + 2}.$

Kết luận:

- Với $m = 2,$ hệ phương trình có vô số nghiệm, nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} x = 4 - 2y \\ y \in R \end{cases}$
- Với $m = -2,$ hệ phương trình vô nghiệm.

- Với $m \notin \{2;-2\}$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{8-m}{m+2} \\ y = \dfrac{5}{m+2} \end{cases}$.

b) Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $m \notin \{2;-2\}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8-m}{m+2} > 0 \\ \dfrac{5}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ 8-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 8$$

Vậy $-2 < m < 8$ thì hệ phương trình có hai nghiệm dương.

c) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $m \notin \{2;-2\}$ và nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8-m}{m+2} = \dfrac{10}{m+2} - 1 \\ y = \dfrac{5}{m+2} \end{cases}$$

Để hệ phương trình có nghiệm nguyên dương $m+2 \in$ Ư(5) và $m+2 > 0$, , suy ra:

m+2	1	5
m	-1	3

d) Với $m \notin \{2;-2\}$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{8-m}{m+2} \\ y = \dfrac{5}{m+2} \end{cases}$.

Xét $S = x^2 + y^2 = \dfrac{(8-m)^2}{(m+2)^2} + \dfrac{25}{(m+2)^2} = \dfrac{m^2 - 16m + 89}{(m+2)^2} = \dfrac{(2m-21)^2}{5(m+2)^2} + \dfrac{1}{5} \geq \dfrac{1}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\dfrac{1}{5}$ khi $m = \dfrac{21}{2}$.

e) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $m \notin \{2;-2\}$ và nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8-m}{m+2} = \dfrac{10}{m+2} - 1 \\ y = \dfrac{5}{m+2} \end{cases}$$ suy ra: $x - 2y = -1$.

Vậy điểm $M(x;y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định là $x - 2y = -1$.

15.8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(m+1)x-y=3\\ mx+y=m\end{cases}$ (với m là tham số)

Xác định tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện: $x+y>0.$

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, tỉnh Đồng Tháp, năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải – dáp số

Ta có: $\begin{cases}(m+1)x-y=3\\ mx+y=m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=m(1-x)\\ (m+1)x-m(1-x)=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=m(1-x) & (1)\\ (2m+1)x=m+3 & (2)\end{cases}$

- Khi $m=-\frac{1}{2},$ phương trình (2) trở thành $0.x=\frac{5}{2}$ (vô lý). Hệ phương trình vô nghiệm.
- Khi $m\neq-\frac{1}{2},$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\begin{cases}x=\dfrac{m+3}{2m+1}\\ y=\dfrac{m(m-2)}{2m+1}\end{cases}$

Suy ra: $x+y=\frac{m^2-m+3}{2m+1}.$

Do $m^2-m+3=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$ nên $x+y>0 \Leftrightarrow 2m+1>0 \Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}.$

Vậy với $m>-\frac{1}{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện: $x+y>0.$

Chương 4. **HÀM SỐ $Y = AX^2 \left(A \neq 0\right)$**

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Chuyên đề 16. **PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**

VÀ CÔNG THỨC NGHIỆM

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa.

Phương trình bậc hai có một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x: ẩn số.

$a, b, c\left(a \neq 0\right)$: là hệ số

2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0\left(a \neq 0\right)$ và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$

• Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

• Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm

Chú ý: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0\left(a \neq 0\right)$ có a và c trái dấu tức là $ac < 0$ thì $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt.

3. Công thức nghiệm thu gọn

Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0\left(a \neq 0\right)$ và $b = 2b', \Delta' = b'^2 - ac$

• Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

• Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$

• Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hai số thực $a; b$ không âm thỏa mãn $18a + 4b. \geq 2013$. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm: $18ax^2 + 4bx + 671 - 9a = 0$

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hà Nam, Năm học 2012 – 2013)

Giải

Tìm cách giải. Để chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm, nếu chưa có điều kiện gì của a. Ta cần xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Xét $a = 0$, chứng tỏ phương trình $bx + c = 0$ có nghiệm

Trường hợp 2. Xét $a \neq 0$, chứng tỏ $\Delta \geq 0$ (hoặc $\Delta' \geq 0$)

Trình bày lời giải

• Xét $a = 0$, từ giả thuyết suy ra $4b \geq 2013 \Rightarrow b \neq 0$ nên phương trình $4bx + 671 - 9a = 0$ luôn có nghiệm

• Xét $a \neq 0$

Ta có: $\Delta' = 4b^2 - 18a(671 - 9a) = 4b^2 - 12078a + 162a^2$

$= 4b^2 - 6a.2013 + 162a^2 \geq 4b^2 - 6a(18a + 4b) + 162a^2$

$\Rightarrow \Delta' = 4b^2 - 24ab + 54a^2 = (2b - 6a)^2 + 18a^2 \geq 0$

Suy ra phương trình luôn có nghiệm

Ví dụ 2: Cho hai phương trình bậc hai $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + cx + d = 0$. Trong đó $ac > 2(b + d)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Giải

Tìm cách giải. Những bài toàn chứng minh ít nhất một trong hai phương trình bậc hai có nghiệm ta chứng minh ít nhất một trong hai Δ không âm. Tức là chứng minh $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$

Trình bày cách giải

Xét $\Delta_1 = a^2 - 4b; \Delta_2 = c^2 - 4d$

Suy ra $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 - 4b + c^2 - 4d > a^2 + c^2 - 2ac = (a - c)^2 \geq 0$

$\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$. Vậy ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Ví dụ 3: Tìm các giá trị của tham số m để hai phương trình sau đây có ít nhất một nghiệm chung:

$x^2 + mx + 4 = 0$ (1) và $x^2 + 4x + m = 0$ (2)

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Vĩnh Long, năm học 2009 – 2010)

Giải

Tìm cách giải. Để giải dạng toán này, ta gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, thì x_0 thỏa mãn cả hai phương trình. Từ đó ta được hệ phương trình, sau đó:

• Khử x_0^2

• Tìm x_0 hoặc tìm m (có bài biểu thị x_0 theo m)

• Thử lại với m tìm được, rồi kết luận

Trình bày cách giải

Gọi m là nghiệm chung của hai phương trình, ta có: $\begin{cases} x_0^2 + mx_0 + 4 = 0 \\ x_0^2 + 4x_0 + m = 0 \end{cases}$

Suy ra $(m-4)x_0 + 4 - m = 0 \Leftrightarrow (m-4)(x_0 - 1) = 0$

• Với $m = 4$. Hai phương trình có dạng $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy hai phương trình có nghiệm chung là $x = -2$

• Với $x_0 = 1$ thay vào phương trình (1) hoặc (2) ta được $m = -5$. Với $m = -5$ thì phương trình (1) là $x^2 - 5x + 4 = 0$ có nghiệm $x = 1; x = 4$, thì phương trình (2) là $x^2 + 4x - 5 = 0$ có nghiệm $x = 1; x = -5$. Do đó hai phương trình có nghiệm chung là $x = 1$. Vậy với $m \in \{4; -5\}$ thì hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung

Ví dụ 4: Giải phương trình $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$, biết rằng $a; b$ là các số hữu tỉ và $1 + \sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hà Tĩnh, năm học 2010 – 2011)

Giải

Tìm cách giải. Những dạng toán trên ta cần xác định a và b trước. Khi thay $x = 1 + \sqrt{2}$ vào phương trình, ta lưu ý rằng a, b là các số hữu tỉ nên vận dụng tính chất: Nếu x, y, p là các số hữu tỉ mà $x\sqrt{p} + y = 0$, trong đó p không phải là bình phương của số hữu tỉ thì $x = y = 0$

Trình bày cách giải

Ta có: $x = 1 + \sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình nên:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^3 + a\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + b\left(1+\sqrt{2}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a + b + 5)\sqrt{2} + (3a + b + 8) = 0$$

Vì $a; b$ là số hữu tỉ nên $\begin{cases} 2a + b + 5 = 0 \\ 3a + b + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$

Thay vào phương trình, tra được:

$$x^3-3x^2+x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-2x-1=0 \end{array}\right.$$

Giải ra, ta được tập nghiệm của phương trình là: $S=\{1;1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\}$

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=1-xy$ trong đó $x;y$ là các số thực thỏa mãn $x^{2013}+y^{2013}=2..x^{1006}.y^{1006}$ (1)

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Phú Yên năm học 2012 – 2013)

Giải

Trường hợp 1: Nếu $x=0$ thì $y=0$ (hoặc ngược lại) suy ra $P=1$

Trường hợp 2: Xét $x\neq 0; y\neq 0$

Chia hai vế của (1) cho $x^{1006}.y^{1006}$ ta được: $x\left(\frac{x}{y}\right)^{1006}+y\left(\frac{y}{x}\right)^{1006}=2$

Đặt $\left(\frac{x}{y}\right)^{1006}=t \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^{1006}=\frac{1}{t} \Rightarrow x.t^2-2t+y=0$

Đây là phương trình bậc hai đối với t. Xét $\Delta'=1-xy$

Để tồn tại $x;y$ tức là tồn tại t thì $\Delta'\geq 0 \Rightarrow 1-xy\geq 0; P\geq 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 0 khi t là nghiệm kép của phương trình

$$1-xy=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{y} \Rightarrow t=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{1006}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^{2012}=\frac{1}{x}$$

$\Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow y=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 0. Khi $x=y=1$

C. Bài tập vận dụng

16.1. Cho phương trình $4x^2-2(a+b)x+ab=0$ (1) ($a;b$ là tham số)

a) Giải phương trình (1) với $a=1; b=\sqrt{2}$

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $a;b$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $a=1; b=\sqrt{2}$ phương trình có dạng: $4x^2-2x(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$

Xét $\Delta'=(1+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^2>0$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{2}-\left(1-\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{1+\sqrt{2}+\left(1-\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{1}{2}$$

b) Xét $\Delta' = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \ge 0$ với mọi $a;b$

Vậy phương trình luôn có nghiệm

16.2. Cho a,b,c,d là các số thực $a^2+b^2<1$. Chứng minh rằng phương trình:

$\left(a^2+b^2-1\right)x^2 - 2\left(ac+bd-1\right)x + c^2+d^2-1=0$ luôn có hai nghiệm.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $\Delta' = \left(ac+bd-1\right)^2 - \left(a^2+b^2-1\right)\left(c^2+d^2-1\right)$ (*)

+ Do $a^2+b^2<1 \Rightarrow a^2+b^2-1<0$

Nếu $c^2+d^2 \ge 1 \Rightarrow c^2+d^2-1 \ge 0 \Rightarrow \Delta \ge 0$

Nếu $c^2+d^2<1$. Đặt $u = 1-a^2-b^2; v = 1-c^2-d^2$

(Điều kiện $0<u\le 1; 0<v\le 1$)

Xét $4\Delta' = \left(2-2ac-2bd\right)^2 - 4uv$

$= \left(a^2+b^2+u+p^2+d^2+v-2ac-2bd\right)^2 - 4uv$

$= \left[(a-c)^2+(b-d)^2+u+v\right]^2 - 4uv \ge (u+v)^2 - 4uv = (u-v)^2 \ge 0$

$\Rightarrow \Delta' \ge 0$. Vậy phương trình luôn luôn có nghiệm

16.3. Cho phương trình $ax^2+bx+1=0$ với $a;b$ là các số hữu tỉ. Tìm $a;b$ biết $x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ là nghiệm của phương trình

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{5-3} = 4-\sqrt{15}$ là nghiệm của phương trình nên:

$a\left(4-\sqrt{15}\right)^2 + b\left(4-\sqrt{15}\right) + c = 0 \Leftrightarrow (31a+4b+1) - (8a+b)\sqrt{15} = 0$

Do a và b là các số hữu tỷ nên: $\begin{cases} 31a+4b+1=0 \\ 8a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \end{cases}$

16.4. Với giá trị nào của b thì hai phương trình $2011x^2 + bx + 1102 = 0$ (1) và $1102x^2 + bx + 2011 = 0$ (2) có nghiệm chung.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Tiền Giang, năm học 2009 – 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình đã cho, ta có:

$$\begin{cases} 2011x_0^2 + bx_0 + 1102 = 0 \\ 1102x_0^2 + bx_0 + 2011 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1102x_0^2 + bx_0 + 2011 = 0 \\ 909x_0^2 = 909 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1102x_0^2 + bx_0 + 2011 = 0 & (1) \\ x_0 = \pm 1 & (2) \end{cases}$$

Với $x_0 = 1$ thay vào phương trình (1) ta được $b = -3113$

Với $x_0 = -1$ thay vào phương trình (1) ta được $b = 3113$

Thử lại:

• Với $b = -3113$, thì phương trình (1) là $2011x^2 - 3113x + 1102 = 0$ có nghiệm $x = 1; x = \dfrac{1102}{2011}$ và phương trình (2) là $1102x^2 - 3113x + 2011 = 0$ có nghiệm là $x = 1; x = \dfrac{2011}{1102}$, nghiệm chung là $x = 1$

• Với $b = 3113$, thì phương trình (1) là $2011x^2 + 3113x + 1102 = 0$ có nghiệm $x = -1; x = -\dfrac{1102}{2011}$ và phương trình (2) là $1102x^2 + 3113x + 2011 = 0$ có nghiệm là $x = -1; x = \dfrac{-2011}{1102}$, nghiệm chung là $x = -1$

Vậy với $b = \pm 3113$ thì hai phương trình đã cho có nghiệm chung

16.5. Tìm số nguyên a để hai phương trình sau đây có ít nhất một nghiệm chung

$x^2 + ax + 8 = 0$ (1) và $x^2 + x + a = 0$ (2)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt x_0 là nghiệm chung của ai phương trình, ta có: $\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 8 = 0(1) \\ x_0^2 + x_0 + a = 0(2) \end{cases}$, ta có:

Từ phương trình (1) và (2) trừ từng vế ta được:

$(a-1).x_0 + 8 - a = 0 \Leftrightarrow (a-1).x_0 = a - 8$ (*)

Với $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ thì từ (*) không tồn tại x_0 nên điều kiện $a \neq 1$

Từ phương trình (*) ta có: $x_0 = \dfrac{a-8}{a-1}$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$\frac{(a-8)^2}{(a-1)^2} + \frac{a-8}{a-1} + a = 0 \Leftrightarrow a^3 - 24a + 72 = 0$$

$\Leftrightarrow (a+6)(a^2 - 6a + 12) = 0$ (**)

Ta có: $a^2 - a + 12 = (a-3)^2 + 3 > 0$ nên (**) $\Leftrightarrow a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -6$

Với $a = -6$ thì phương trình (1) là $x^2 - 6x + 8 = 0$ có nghiệm $x_1 = 2; x_2 = 4$

Phương trình (2) là $x^2 + x - 6 = 0$ có nghiệm $x_1 = 2; x_2 = -3$ nên hai phương trình có nghiệm chung $x = 2$

Vậy với $a = -6$ thì hai phương trình có nghiệm chung là $x = 2$

16.6. Cho hai phương trình $x^2 + mx + n = 0$ và $x^2 - 2x - n = 0$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m và n, ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Hưng Yên, năm học 2009 – 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

• Phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có $\Delta_1 = m^2 - 4n$

• Phương trình $x^2 - 2x - n = 0$ có $\Delta_2 = 4n + 4$

Suy ra: $\Delta_1 + \Delta_2 = m^2 + 4 > 0$ với mọi m, n. Do đó trong hai số Δ_1, Δ_2 luôn có ít nhất một Δ không âm. Hay nói cách khác trong hai phương trình đã cho luôn có ít nhất một phương trình có nghiệm

16.7. Chứng minh rằng với điều kiện $\begin{cases} c > 0 \\ (a+c)^2 < ab + bc - 2ac \end{cases}$

thì phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm

(Thi học sinh giỏi tỉnh Bình Định, năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét các trường hợp sau:

• Nếu $a = 0; b \neq 0$ thì phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{c}{b}$

• Nếu $a = 0; b = 0$ thì $c^2 < 0$ vô lí

• Nếu $a \neq 0$ từ $(a+c)^2 < ab + bc - 2ac \Rightarrow -2ac > (a+c)^2 - b(a+c)$

Xét $\Delta = b^2 - 4ac > b^2 + 2(a+c)^2 - 2b(a+c) = (a+c-b)^2 + (a+c)^2 \ge 0$

Vậy $\Delta > 0$, phương trình luôn có hai nghiệm

Tóm lại, phương trình luôn có nghiệm

16.8. Cho phương trình ẩn x tham số m: $x^2 - 2(m+1)x - (m^2 + 2m - 3) = 0$. Xác định m để phương trình có hai ngiệm $x_1; x_2$ sao cho:

$$2008 < x_2 < x_1 < 2013$$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh An Giang, năm học 2009 – 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2m - 3) = 4$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = m+3; x_2 = m-1$

Phương trình có hai nghiệm:

$$2008 < x_2 < x_1 < 2013 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m+3 < 2013 \\ x_2 = m-1 > 2008 \end{cases} \Leftrightarrow 2009 < m < 2010$$

16.9. Chứng minh rằng phương trình:

$(x^2 + ax + b - 1)(x^2 + bx + a - 1) = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của a và b

(Thi học sinh giỏi Toán, tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$(x^2 + ax + b - 1)(x^2 + bx + a - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + ax + b - 1 = 0 (1) \\ x^2 + bx + a - 1 = 0 (2) \end{array}\right.$$

Ta có $\Delta_1 = a^2 - 4b + 4; \Delta_2 = b^2 - 4a + 4$

Suy ra $\Delta_1 + \Delta_2 = (a-2)^2 + (b-2)^2 \ge 0$ với mọi $a; b$ do đó có ít nhất một trong hai giá trị $\Delta_1; \Delta_2$ không âm. Vậy phương trình ban đầu luôn có nghiệm với mọi giá trị của a và b

Chuyên đề 17. **HỆ THỨC VI-ÉT**

A. Kiến thức cần nhớ

1. Hệ thức Vi-ét

• Nếu $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \left(a \neq 0\right)$ thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

• Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \left(a \neq 0\right)$ có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = \dfrac{c}{a}$

• Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \left(a \neq 0\right)$ có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\dfrac{c}{a}$

2. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

• Nếu hai số đó có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$

Điều kiện để có hai số đó là: $S^2 - 4P \geq 0 \left(\Delta \geq 0\right)$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho phương trình $mx^2 + 2\left(m - 2\right)x + m - 3 = 0$ (x là ẩn số).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hồ Chí Minh năm học 2011 – 2012)

Giải

Tìm cách giải. Những bài toán liên quan đến dấu của nghiệm phương trình bậc hai bao giờ cũng liên quan đến công thức nghiệm và hệ thức Vi-ét. Cụ thể là:

• Phương trình có hai nghiệm trái dấu gồm: Phương trình có nghiệm $\left(\Delta \geq 0\right)$ và $x_1x_2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} < 0$ thì điều kiện nghiệm chung là: $ac < 0$

• Phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương gồm: Phương trình có hai nghiệm trái dấu ($ac < 0$) và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương ($x_1 + x_2 < 0$)

Trình bày lời giải

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m(m-3) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có gái trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 3 \\ \dfrac{-2(m-2)}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 3.$$

Vậy với $2 < m < 3$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $2x^2 + (m-1)x - m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm là số đo 2 cạnh của một tam giác vuong có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông là $\frac{4}{5}$ (đơn vị độ dài).

Giải

Tìm cách giải. Bản chất của bài toán gồm 2 bước:

• *Bước 1.* Phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

• *Bước 2.* Hai nghiệm $x_1; x_2$ là số đo 2 cạnh của một tam giác vuông có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông là $\frac{4}{5}$ (đơn vị độ dài) thì thỏa mãn:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{h^2}$$

Trình bày lời giải

Xét $\Delta = (m-1)^2 + 4.2.(m+1) = m^2 - 2m + 1 + 8m + 8 = (m+3)^2 \geq 0$

Phương trình luôn có hai nghiệm

Để hai nghiệm là số đo hai cạnh của tam giác $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{(m-1)}{2} > 0 \\ \dfrac{-m-1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Hai nghiệm là số đo 2 cạnh của một tam giác vuông có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông là $\frac{4}{5}$ (đơn vị độ dài)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2x_2^2} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{(m-1)^2 + 4m + 4}{(m+1)^2} = \frac{25}{16}$$

$\Leftrightarrow 9m^2 + 18m - 55 = 0$. Giải ra, ta được: $m_1 = -\frac{11}{3}; m_2 = \frac{5}{3}$.

Kết hợp điều kiện, ta được $m_1 = -\frac{11}{3}$ thỏa mãn

Ví dụ 3: Cho phương trình $x^2 - 3mx - m = 0$ (m là tham số khác 0) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = \frac{m^2}{x_2^2 + 3mx_1 + 3m} + \frac{x_1^2 + 3mx_2 + 3m}{m^2}$$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Hưng Yên, năm học 2011 -2012)

Giải

Phương trình có hai nghiệm phâm biệt khi $9m^2 + 4m > 0$ hay $m(9m+4) > 0$

$\Leftrightarrow m > 0$ hoặc $m < -\frac{4}{9}$ (*)

Theo Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$

Ta có:

$$\frac{m^2}{x_2^2 + 3mx_1 + 3m} = \frac{m^2}{x_2^2 + (x_1+x_2)x_1 - 3x_1x_2} = \frac{m^2}{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} = \frac{m^2}{(x_1-x_2)^2} > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương: $A = \dfrac{m^2}{(x_1-x_2)^2} + \dfrac{(x_1-x_2)^2}{m^2} \geq 2$

Vậy $A_{\min} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{(x_1-x_2)^2} \dfrac{(x_1-x_2)^2}{m^2} \Leftrightarrow m^4 = (x_1-x_2)^4$

$\Leftrightarrow m^2 = (x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow x_1^2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow x_1^2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$\Leftrightarrow x_1x_2(x_1x_2 + 4) = 9m^2 \Leftrightarrow -m(-m+4) = 9m^2$

$\Leftrightarrow 8m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow 4m(2m+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0(\text{L}) \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy với $m = -\dfrac{1}{2}$ thì $A = 2$

Ví dụ 4: Cho phương trình $x^2 - 6x - m = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn: $x_1^2 - x_2^2 = 12$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Phú Thọ năm học 2012 – 2013)

Giải

$\Delta = 36 + 4m > 0 \Leftrightarrow 4m > -36 \Leftrightarrow m > -9$

* Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$

* Ta có: $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 12 \Rightarrow x_1 - x_2 = 2$

Suy ra: $x_1 = 4; x_2 = 2$

Từ đó suy ra: $m = -4.2 = -8$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với $m = -8$ thì phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 - x_2^2 = 12$

Ví dụ 5: Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình $x^4 - 4x^3 + 8x + m = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Thanh Hóa năm học 2012 – 2013)

Giải

Cách 1. Ta có $x^4 - 4x^3 + 8x + m = 0$ (1)

$\Leftrightarrow (x-1)^4 - 6(x-1)^2 + m + 5 = 0$

Đặt $y = (x-1)^2, y \geq 0$ phương trình có dạng: $y^2 - 6y + m + 5 = 0$ (2)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-(m+5) > 0 \\ 6 > 0 \\ m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m > 0 \\ m > -5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m < 4$

Cách 2. Ta có $x^4-4x^3+8x+m=0$ (1)

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)^2-4\left(x^2-2x\right)+m=0$

Đặt $y=x^2-2x$ phương trình có dạng: $y^2-4y+m=0$ (3)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ \left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)>0\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-m>0\\ x_1x_2+x_1+x_2+1>0\\ x_1+x_2>-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}m<4\\ 4+m+1>0\\ 4>-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<4\\ m>-5\end{cases}\Leftrightarrow -5<m<4$$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng nếu a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2+px+1=0$ (1), còn c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2+qx+1=0$ (2) thì ta có hệ thức:

$\left(a-c\right)\left(b-c\right)\left(a+d\right)\left(b+d\right)=q^2-p^2$.

Giải

Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases}a+b=-p\\ ab=1\end{cases};\begin{cases}c+d=-q\\ cd=1\end{cases}$

Xét $\left(a-c\right)\left(b-c\right)\left(a+d\right)\left(b+d\right)=\left(ab-ac-bc+c^2\right)\left(ab+ad+bd+d^2\right)$

$$=\left(1+pc+c^2\right)\left(1-pd+d^2\right)$$

$$=1-pd+d^2+pc-p^2cd+pcd^2+c^2-pc^2d+c^2d^2$$

$$=1-pd+d^2+pc-p^2+pd+c^2-pc+1$$

$$=c^2+2+d^2-p^2=\left(c+d\right)^2-p^2=q^2-p^2.$$

Suy ra $\left(a-c\right)\left(b-c\right)\left(a+d\right)\left(b+d\right)=q^2-p^2$ Điều phải chứng minh.

Nhận xét. Nếu chọn p và q là hai số nguyên sao cho q^2-p^2 là số chính phương thì ta có kết quả: $\left(a-c\right)\left(b-c\right)\left(a+d\right)\left(b+d\right)$ là số chính phương. Chẳng hạn: cho số nguyên m, chứng minh rằng nếu a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2+15mx+1=0$ (1), còn c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2+17mx+1=0$ thì ta có $\left(a-c\right)\left(b-c\right)\left(a+d\right)\left(b+d\right)$ là số chính phương.

Ví dụ 7: Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$ (1). Hãy tìm các giá trị nguyên của p và q sao cho phương trình (1) có nghiệm nguyên phân biệt và nghiệm này gấp 4 lần nghiệm kia

(Thi học sinh giỏi Toàn 9, tỉnh Yên Bái, năm học 2003 – 2004)

Giải

Giả sử phương trình có hai nghiệm phân biệt và $x_2 = 4x_1$

Ta có: $\begin{cases} p^2 - 4q > 0 \\ x_1 + x_2 = 5x_1 = -p \\ x_1x_2 = 4x_1^2 = q \\ p; q \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{p}{5} \\ \dfrac{4p^2}{25} = q \end{cases}$

Suy ra $p^2 \vdots 25 \Rightarrow p^2 = 25k^2 \left(k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow p = \pm 5k$

Do đó $q = \dfrac{4.25k^2}{25} = 4k^2$

Vậy $\left(p;q\right) \in \left\{\left(5k;4k^2\right);\left(-5k;4k^2\right)\right\}$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm nguyên ohana biệt và một nghiệm gấp 4 lần nghiệm kia

Ví dụ 8: Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ với n nguyên dương

a) Chứng mỉnh rằng: $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$

b) Không khai triển, không dùng máy tính, hãy tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)^5} + \frac{1}{\left(1-\sqrt{3}\right)^5}.$$

Giải

a) x_1 là nghiệm của phương trình nên $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$; x_2 là nghiệm của phương trình nên $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$;

Suy ra: $ax_1^{n+2} + bx_1^{n+1} + cx_1^n = 0$ (1), $ax_2^{n+2} + bx_2^{n+1} + cx_2^n = 0$ (2).

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, ta được:

$a\left(x_1^{n+2} + x_2^{n+2}\right) + b\left(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}\right) + c\left(x_1^n + x_2^n\right) = 0$

Từ đó suy ra: $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$.

b) Đặt: $x_1 = 1+\sqrt{3}; x_2 = 1-\sqrt{3}; S_n = x_1^n + x_2^n$.

Suy ra $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases}$

Vậy $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 2 = 0$. Áp dụng câu a, ta có:

$S_{n+2} - 2S_{n+1} - 2S_n = 0 \Leftrightarrow S_{n+2} = 2S_{n+1} + 2S_n$ (*)

Ta có: $S_1 = 2, S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 + 4 = 8$.

Áp dụng công thức (*), ta có:

$S_3 = 2S_2 + 2S_1 = 2.8 + 2.2 = 20; S_4 = 2S_3 + 2S_2 = 2.20 + 2.8 = 56$

$S_5 = 2S_4 + 2S_3 = 2.56 + 2.20 = 152$

Ta có: $A = \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)^5} + \dfrac{1}{\left(1-\sqrt{3}\right)^5} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^5 + \left(1-\sqrt{3}\right)^5}{\left(1+\sqrt{3}\right)^5\left(1-\sqrt{3}\right)^5} = \dfrac{152}{-32} = \dfrac{-19}{4}$.

C. Bài tập vận dụng

17.1. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 26m$

b) Tìm m nguyên để phương trình có hai nghiệm nguyên.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Quảng Bình năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Xét $\Delta' = m^2 - m + 4 = \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 3\dfrac{3}{4} > 0$, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 4 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 2m + 8$

Ta có: $x_1^3 + x_2^3 = 26m \Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right) = 26m$

$\Leftrightarrow 2m\left(4m^2 - 3m + 12\right) = 26m$

$\Leftrightarrow 2m\left(4m^2 - 3m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0; m_2 = 1; m_3 = \dfrac{-1}{4}$

b) Vì $x_{1.2} = m \pm \sqrt{\Delta'}$ nên điều kiện để phương trình có hai nghiệm nguyên:

$\Delta' = m^2 - m + 4$

Đặt $\Delta' = m^2 - m + 4 = k^2\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 16 = 4k^2$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2 + 15 = (2k)^2 \Leftrightarrow (2k - 2m + 1)(2k + 2m - 1) = 15$

Từ đó ta có bảng sau:

$2k - 2m + 1$	1	3	5	15	-1	-3	-5	-15
$2k + 2m - 1$	15	5	3	1	-15	-5	-3	-1

Suy ra:

k	4	2	2	4	-4	-4	-2	-4
m	4	1	0	-3	-3	0	1	4

Vậy với $m \in \{4; 1; 0; -3\}$ thì phương trình có nghiệm nguyên

17.2. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x - m - 2 = 0$. Tìm m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 8$

b) Có đúng một nghiệm dương.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Vĩnh Long năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta' = 1 + m + 2 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -3$

Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -m - 2 \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 + 2m + 4 = 8 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn $m \ge -3$)

Vậy $m = 0$ thì phương trình có 2 nghiệm $x_1^2 + x_2^2 = 8$

b) Với $m \ge -3$ thì phương trình luôn có nghiệm

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 2$ nên nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -3$ thì phương trình có nghiệm kép là số dương

Nếu phương trình có hai nghiệm trái dấu thì phương trình cũng có một nghiệm dương

$\Leftrightarrow -m - 2 < 0 \Leftrightarrow m > -2$

Vậy với $m = -3$ hoặc $m > -2$ thì phương trình có đúng một nghiệm dương

17.3. Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 3$

Hướng dẫn giải – đáp số

$mx^2-2(m-1)x+m-3=0$

$\Delta=4(m-1)^2-4m(m-3)=4m^2-8m+4-4m^2+12m=4m+4>0$

$\Leftrightarrow m>-1$ và $m\neq 0$

Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình: $mx^2-2(m-1)x+m-3=0$

* Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m}\\ x_1x_2=\dfrac{m-3}{m}\end{cases}$

Ta có: $(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=3+\dfrac{2(m-3)}{m}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4(m-1)^2}{m^2}=3+\dfrac{2(m-3)}{m}\Leftrightarrow \dfrac{4m^2-8m+4}{m^2}=3+\dfrac{2m-6}{m}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4m^2-8m+4}{m^2}=\dfrac{5m-6}{m}$

$\Leftrightarrow 4m^2-8m+4=5m^2-6m\Leftrightarrow m^2+2m-4=0\Leftrightarrow (m+1)^2=5\Leftrightarrow m_1=\sqrt{5}-1$ (thỏa mãn), $m_2=-\sqrt{5}-1$ (không thỏa mãn)

Vậy với $m=\sqrt{5}-1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn: $x_1^2+x_2^2=3$

17.4. Cho phương trình bậc hai $x^2-2(m+1)x+2m+10=0$ với m là tham số thực

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$

b) Tìm m để biểu thức $P=6x_1x_2+x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Vĩnh Long, năm học 2011 – 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $\Delta=4(m+1)^2-8m-40=4m^2+8m+4-8m-40=4m^2-36\geq 0$

$\Leftrightarrow m^2\geq 9\Leftrightarrow |m|\geq 3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\geq 3\\ m\leq -3\end{array}\right.$

b) Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2-2(m+1)x+2m+10=0$

Áp dụng hệ thức Vi-ét: $\begin{cases}x_1+x_2=2m+2\\ x_1x_2=2m+10\end{cases}$

Ta có: $P=6x_1x_2+x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2+4x_1x_2=4(m+1)^2+4(2m+10)$

$= 4m^2 + 8m + 4 + 8m + 40 = 4m^2 + 16m + 44 = 4m^2 + 16m + 16 + 28$

$= 4(m+2)^2 + 28 \geq 4.(-3+2)^2 + 28 = 32$

Vậy $P_{\max} = 32$ khi và chỉ khi $m = -3$

17.5. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2m(m+2)x + m^2 + 7 = 0$ (1). (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 4$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $m = 1$, phương trình có dạng: $x^2 - 6x + 8 = 0$. Giải ra ta được: $x_1 = 2; x_2 = 4$

b) Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta' = m^2(m+2)^2 - (m^2 + 7) \geq 0$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m(m+2) \\ x_1x_2 = m^2 + 7 \end{cases}$

Theo đề bài: $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 4 \Leftrightarrow m^2 + 7 - 2.2.m(m+2) = 4$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 8m - 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = \dfrac{1}{3}; m_2 = -3$

Thử lại với điều kiện (*) thì $m_1 = \dfrac{1}{3}; m_2 = -3$ không thỏa mãn

Vậy không tồn tại m thỏa mãn điều kiện đề bài

17.6. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ (ẩn x)

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương

b) Gọi $x_1; x_2$ $(x_1 \leq x_2)$ là hai nghiệm dương của phương trình

Tính $P = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ theo m và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = x_1 + x_2 + \frac{2}{x_1 + x_2}$$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Quảng Bình, năm học 2011 – 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Phương trình có hai nghiệm dương $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$

Vậy $m \ge 1$ thì phương trình có hai nghiệm dương

b) Với $m \ge 1$ thì phương trình có hai nghiệm dương

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$

Xét: $P^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2} = 2m - 2$. Vì $P \le 0$ nên $P = -\sqrt{2m-2}$

Ta có: $Q = x_1 + x_2 + \dfrac{2}{x_1 + x_2} = 2m + \dfrac{2}{2m} = m + m + \dfrac{1}{m} \ge 1 + 2\sqrt{m.\dfrac{1}{m}} = 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q là 3 khi $m = 1$

17.7. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (1)

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương.

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm dương của phương trình (1). Tìm m nguyên dương để $A = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Phương trình có hai nghiệm dương

$$\begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (2m-5) \ge 0 \\ 2(m-1) > 0 \\ 2m - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 6 > 0 \\ m > 1 \\ m > \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{5}{2}$$

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = 2m - 5 \end{cases}$

Ta có: $A = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 = \left(\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 - 2 = \left(\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2}\right)^2 - 2$

$$\Leftrightarrow A = \left[\dfrac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2} - 2\right]^2 - 2 = \left[\dfrac{4(m-1)^2}{2m-5} - 2\right]^2 - 2$$

$$A \in \mathbb{Z} \Leftarrow \dfrac{4(m-1)^2}{2m-5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2m + 1 + \dfrac{9}{2m-5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2m - 5 \in U(9)$$

Vì m nguyên dương nên $2m - 5 \ge -5$, suy ra:

$2m-5$	-3	-1	1	3	9

m	1	2	3	4	7

Vậy với $m \in \{1;2;3;4;7\}$ thì A nhận giá trị nguyên

17.8. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $cx^2 + bx + a = 0$ (2) (với $a > c > 0$)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) và (2) cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm

b) Với giả thiết phương trình (1) có nghiệm $x_1; x_2$ và phương trình (2) có nghiệm là: $x_1'; x_2'$ và $x_1 + x_2 > x_1' + x_2'$. Chứng minh rằng $b > 0$

c) Trong trường hợp phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm, chứng minh rằng $b < a + c$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Cả hai phương trình đều có: $\Delta = b^2 - 4ac$, nên cả hai phương trình (1) và (2) cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm

b) Trong trường hợp hai phương trình trên có nghiệm. Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1' + x_2' = \frac{-b}{c}$$

Xét: $x_1 + x_2 - x_1' - x_2' = \dfrac{-b}{a} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{b(a-c)}{ac} > 0$ nên $b > 0$

c) Trong trường hợp phương trình vô nghiệm, ta có: $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4ac$

Mặt khác ta có: $4ac \le (a+c)^2$, nên:

$$b^2 < (a+c)^2 \Leftrightarrow b < a + c \text{ (vì } a > c > 0, b > 0\text{)}$$

17.9. Cho p là số tự nhiên khác 0. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 5px - 1 = 0$; $x_3; x_4$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 4px - 1 = 0$. Chứng minh rằng tích $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4)$ là một số chính phương.

(Thi học sinh giỏi Toán, TP Hà Nội, năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $x^2 + 5px - 1 = 0(1); x^2 + 4px - 1 = 0(2)$

Từ (1); (2) theo hệ thức vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = -5p; x_1x_2 = -1$

$$x_3 + x_4 = -4p; x_3x_4 = -1$$

$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4)$

$= (x_1 - x_3)(x_2 + x_4)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)$

$= (x_1x_2 + x_1x_4 - x_3x_2 - x_3x_4)(x_1x_2 + x_2x_4 - x_1x_3 - x_3x_4)$

$= (x_1x_4 - x_2x_3)(x_2x_4 - x_1x_3)$

$= x_1x_2x_4^2 - x_1^2x_3x_4 - x_3x_4x_2^2 + x_1x_2x_3^2$

$= -x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ (vì $x_1x_2 = -1; x_3x_4 = -1$)

$= (-x_4^2 + 2 - x_3^2) + (x_1^2 - 2 + x_2^2)$

Mà $2 = (-1)(-2) = -2x_1x_2; 2 = (-1)(-2) = -2x_3x_4$

Suy ra (*) $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - (x_3 + x_4)^2$

$= 25p^2 - 16p^2$

$= (3p)^2 \Rightarrow$ Điều phải chứng minh

17.10. Tìm m để phương trình $(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$ có nghiệm dương

(Thi học sinh giỏi lớp 9, Thừa Thiên Huế, vòng 1, năm học 2003 – 2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

Khi $m = -1$, phương trình trở thành: $3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} > 0$

Khi $m \neq -1$ thì PT: $(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$ (1) là phương trình bậc hai

Gọi $S = \frac{3m}{m+1}; P = \frac{4m}{m+1}$ là tổng và tích các nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình (1)

Phương trình (1) có nghiệm dương trong các trường hợp sau:

- $0 = x_1 < x_2$, khi đó $\Delta > 0, P = 0, S > 0$. Suy ra hệ vô nghiệm
- $x_1 < 0 < x_2$, khi đó $P < 0 \Leftrightarrow \frac{4m}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$
- $0 < x_1 \le x_2$, khi đó $\Delta \ge 0, S > 0, P > 0$. Suy ra $\frac{-16}{7} \le m < -1$

Đáp số: $\frac{-16}{7} \le m < -1$

17.11. Cho phương trình: $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm

b) Gọi hai nghiệm của phương trình trên là $x_1; x_2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4|$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hồ Chí Minh, năm học 2003 – 2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $2x^2+2mx+m^2-2=0$

Xét $\Delta=4m^2-4.2\left(m^2-2\right)=4m^2-8m^2+16=-4m^2+16$

Phương trình có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0\Rightarrow -4m^2\ge -16\Leftrightarrow m^2\le 4\Leftrightarrow -2\le m\le 2$

b) $A=\left|x_1+x_2+2x_1x_2-4\right|$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1+x_2=-m; 2x_1x_2=m^2-2$

$A=\left|-m+m^2-2-4\right|=\left|(m+2)(3-m)\right|$

Vì $m\in[-2;2]$ nên $m+2\ge 0$ và $m-3<0$

Do đó $A=(m+2)(3-m)=-m^2+m+6=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\le\frac{25}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{25}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $m=\frac{1}{2}$

17.12. Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\,(a\ne 0)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi $x_1,x_2\,(x_1\le x_2)$ là hai nghiệm của phương trình đã cho

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ x_1x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$

Khi đó $P=\frac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}=\frac{8-6\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}{4-2\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{8+6(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}$

Do $0\le x_1\le x_2\le 2\Rightarrow x_1^2\le x_1x_2, x_2^2\le 4\Rightarrow x_1^2+x_2^2\le x_1x_2+4$

$\Rightarrow (x_1+x_2)^2\le 3x_1x_2+4$

Vậy $P\le\frac{8+6(x_1+x_2)+3x_1x_2+4}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = 2$ hoặc $x_1 = 0, x_2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a} = 4 \\ \dfrac{c}{a} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow c = -b = 4a \text{ hoặc } \begin{cases} -\dfrac{b}{a} = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = 0 \end{cases}$$

Vậy, $P_{\max} = 3 \Leftrightarrow c = -b = 4a$ hoặc $\begin{cases} b = -2a \\ c = 0 \end{cases}$

17.13. Cho phương trình $(x-2)(x^2-x)+(4m+1)x-8m-2=0$ (x là ẩn số).

Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Quốc Học, tỉnh Thừa Thiên Huế, năm học 2015 – 2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $(x-2)(x^2-x)+(4m+1)x-8m-2=0 \qquad (1)$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x)+(4m+1)x-2(4m+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x+4m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-x+4m+1=0 \quad (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1-4(4m+1) > 0 \\ 2^2 - 2 + 4m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{3}{16} \\ m \neq -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (2), theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = 4m+1 \end{cases}$$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_3^2 = 11$

Suy ra: $1-2(4m+1)+4=11 \Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với $m=-1$ thì phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$

17.14. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, với m là tham số (1).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0 \le m \le 1$.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

i. Chứng minh $\left|x_1+x_2+x_1x_2\right|\le\frac{9}{8}$.

ii. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|=1$.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, tỉnh Bến Tre, năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $x^2-2(m-1)x+2m^2-3m+1=0$, với m là tham số (1)

Có $\Delta'=(m-1)^2-\left(2m^2-3m+1\right)=-m^2+m$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'=-m^2+m\ge0\Leftrightarrow m(m-1)\le0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\ge0\\m-1\le0\end{cases}\\\begin{cases}m\le0\\m-1\ge0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\ge0\\m\le1\end{cases}\\\begin{cases}m\le0\\m\ge1\end{cases}(\text{VN})\end{array}\right.\Leftrightarrow0\le m\le1$$

b) Với $0\le m\le1$ thì phương trình có hai nghiệm x_1,x_2

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m-1)\\x_1x_2=2m^2-3m+1\end{cases}$

i. Ta có: $\left|x_1+x_2+x_1x_2\right|=\left|2(m-1)+2m^1-3m+1\right|$

$$=\left|2m^2-m-1\right|=\left|(2m+1)(m-1)\right|$$

Vì $0\le m\le1$ nên $\begin{cases}m-1\le0\\2m+1\ge0\end{cases}\Leftrightarrow(m-1)(2m+1)\le0$

Suy ra $\left|x_1+x_2+x_1x_2\right|=-\left(2m^2-m-1\right)=2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\le\frac{9}{8}$

Dấu bằng xảy ra khi $m=\frac{1}{4}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $\left|x_1+x_2+x_1x_2\right|\le\frac{9}{8}$

ii. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$$\Leftrightarrow x_1x_2<0\Leftrightarrow2m^2-3m+1<0\Leftrightarrow(m-1)(2m-1)<0\Leftrightarrow\frac{1}{2}<m<1$$

Ta có $\left|x_1-x_2\right|=1\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)^2=1\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=1$

$\Leftrightarrow4(m-1)^2-4\left(2m^2-3m+1\right)=1\Leftrightarrow(2m-1)^2=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ (không thỏa mãn)

Vậy không tồn tại m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|=1$

17.15. Cho phương trình $\left(m^2+5\right)x^2-2mx-6m=0$ (1) với m là tham số

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện $\left(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}\right)^4=16$.

(Tuyển sinh lớp 10, trường Phổ thông năng khiếu, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $m^2+5\neq 0$ với mọi m nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$m^2+6m\left(m^2+5\right)>0\Leftrightarrow 6m\left[\left(m+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{719}{144}\right]>0\Leftrightarrow m>0$$

Khi đó theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{2m}{m^2+5}$

Vì $m^2+5-2m=\left(m-1\right)^2+4>0\Leftrightarrow m^2+5>2m\Rightarrow 0<\dfrac{2m}{m^2+5}<1$ (do $m>0$)

b) $m^2+5\neq 0$ với mọi m nên phương trình (1) có hai nghiệm khi và chỉ khi

$$m^2+6m\left(m^2+5\right)\geq 0\Leftrightarrow 6m\left[\left(m+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{719}{144}\right]\geq 0\Leftrightarrow m\geq 0$$

Khi đó theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m^2+5} \\ x_1x_2=\dfrac{-6m}{m^2+5} \end{cases}$

$$\left(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}\right)^4=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=2 \\ x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=-2 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1. Xét $x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=2\Leftrightarrow \dfrac{-6m}{m^2+5}-\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=\dfrac{-6m}{m^2+5}-2$ (vô nghiệm vì $m\geq 0$)

Trường hợp 2. Xét $x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=-2\Leftarrow \dfrac{-6m}{m^2+5}-\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=-2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}} = 2 - \dfrac{6m}{m^2+5}$. Đặt $t = \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}} \ge 0$

Ta có: $t = 2 - 3t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1(ktm) \\ t = \dfrac{2}{3}(tm) \end{array}\right.$

$t = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 2m^2 - 9m + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn $m \ge 0$)

Vậy với $m \in \left\{2; \dfrac{5}{2}\right\}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $\left(x_1x_2 - \sqrt{x_1 + x_2}\right)^4 = 16$

Chuyên đề 18. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình trùng phương

• Phương trình trùng phương là phương trình có dạng: $ax^4+bx^2+c=0\left(a\neq 0\right)\left(1\right)$

• Để giải phương trình trùng phương, ta đặt ẩn phụ.

Đặt $x^2=t\geq 0,$ đưa về phương trình $at^2+bt+c=0\left(2\right)$

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta làm như sau:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình;

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức;

Bước 3. Giải phương trình vừa nhận được;

Bước 4. Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thỏa mãn điều kiện xác định, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

3. Phương trình tích

• Phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0

• Giải phương trình tích

4. Một số dạng khác của phương trình thường gặp

- Phương trình bậc bốn dạng $\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+c\right)\left(x+d\right)=m$ với $a+b=c+d$

- Phương trình đối xứng bậc bốn có dạng: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\left(a\neq 0\right)$

- Phương trình hồi quy có dạng $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\left(a\neq 0\right)$ trong đó $\dfrac{e}{a}=\left(\dfrac{d}{b}\right)^2$

- Phương trình bậc bốn dạng $\left(x+a\right)^4+\left(x+b\right)^4=c$

- Phương trình phân thức hữu tỉ. Trong phần này chúng ta xét một số dạng sau:

• $\dfrac{mx}{ax^2+bx+d}+\dfrac{nx}{ax^2+cx+d}=p$

• $\dfrac{ax^2+mx+c}{ax^2+nx+c}+\dfrac{ax^2+px+c}{ax^2+qx+c}=d$

• $\dfrac{ax^2+mx+c}{ax^2+nx+c}+\dfrac{px}{ax^2+qx+c}=d$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải phương trình $x^4+3x^3-2x^2-6x+4=0$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hà Nội, năm học 2009 - 2010)

Giải

Tìm cách giải. Đây là phương trình bậc 4. Suy luận rất tự nhiên là phân tích vế trái của phương trình thành nhân tử. Tuy nhiên quan sát các hệ số của vế trái: $1;3;-2;-6;4$, ta phát hiện ra : $\frac{4}{1}=\left(\frac{-6}{3}\right)^2$ do vậy bài toán có dạng $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\left(a\neq 0\right)$ trong đó $\frac{e}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2$ Cách giải của phương trình dạng này là:

• Bước 1. Xét $x=0$, hai vế không bằng nhau nên $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

• Bước 2. Xét $x\neq 0$ chia cả hai vế của phương trình cho x^2 . Sau đó đặt ẩn phụ. Bài toán có hai cách giải sau:

Trình bày lời giải

Cách 1

• $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

• Với $x\neq 0$ chia hai vế cho x^2 ta được:

$$x^2+3x-2-\frac{6}{x}+\frac{4}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{2}{x}\right)-2=0$$

Đặt $y=x-\frac{2}{x}\Rightarrow y^2=x^2-4+\frac{4}{x^2}\Rightarrow x^2+\frac{4}{x^2}=y^2+4$

Phương trình có dạng $y^2+4+3y-2=0\Leftrightarrow y^2+3y+2=0$

Giải ra ta được $y_1=-1; y_2=-2$

- Với $y=-1$ ta có $x-\frac{2}{x}=-1\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

Giải ra ta được $x=1; x=-2$

- Với $y=-2$ ta được $x-\frac{2}{x}=-2\Leftrightarrow x^2+2x-2=0$

Giải ra ta được $x=-1+\sqrt{3}; x=-1-\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $s=\left\{1;-2;-1+\sqrt{3};-1-\sqrt{3}\right\}$

Cách 2:

$x^4-4x^2+4+3x^3-6x+2x^2=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2+2\right)^2+3x\left(x^2-2\right)+2x^2=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)^2+x\left(x^2-2\right)+2x\left(x^2-2\right)+2x^2=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(x^2-2+x\right)+2x\left(x^2-2+x\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+2x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+x-2=0(1)\\x^2+2x-2=0(2)\end{array}\right.$

• Giải phương trình (1): $x^2+x-2=0$ ta được $x_1=1;x_2=-2$

• Giải phương trình (2): $x^2+2x-2=0$ ta được $x_3=-1+\sqrt{3};x_4=-1-\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $s=\left\{1;-2;-1+\sqrt{3};-1-\sqrt{3}\right\}$

Ví dụ 2: Giải phương trình $\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+15x+56\right)+8=0$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Thanh Hóa, năm học 2008 - 2009)

Giải

Tìm cách giải. Khi khai triển, bài toán này có dạng phương trình bậc 4, nên cách giải chung là phân tích đa thức thành nhân tử. Tuy nhiên vế trái có hai ngoặc chứa ẩn, có thể phân tích trực tiếp thành nhân tử. Sau khi phân tích xong ta thấy phương trình có dạng phương trình bậc bốn dạng:

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ với $a+b=c+d$

Vì vậy ta có lời giải thứ hai cho dạng toán này như sau:

• Bước 1. Viết phương trình dưới dạng: $\left[x^2+(a+b)x+ab\right]\left[x^2+(c+d)x+cd\right]=m$

• Bước 2. Đặt $x^2+(a+b)x+ab=y$. Giải phương trình ẩn y

Trình bày lời giải

Cách 1:

$\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+15x+56\right)+8=0$

$\Leftrightarrow x^4+12x^3+13x^2-138x+120=0$

$\Leftrightarrow \left(x^4+6x^3-15x^2\right)+\left(6x^3+36x^2-90x\right)-\left(8x^2+48x-120\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+6x-15\right)+6x\left(x^2+6x-15\right)-8\left(x^2+6x-15\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+6x-15\right)\left(x^2+6x-8\right)=0$

• Giải phương trình $x^2+6x-15=0$ ta được $x_1=-3+2\sqrt{6}; x_2=-3-2\sqrt{6}$

• Giải phương trình $x^2+6x-8=0$ ta được $x_3=-3+\sqrt{17}; x_4=-3-\sqrt{17}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $s=\left\{-3+2\sqrt{6};-3-2\sqrt{6};-3+\sqrt{17};-3-\sqrt{17}\right\}$

Cách 2:

Ta có thể viết:

$\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+7\right)\left(x+8\right)+8=0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x+7\right)\left(x-2\right)\left(x+8\right)+8=0 \Leftrightarrow \left(x^2+6x-7\right)\left(x^2+6x-16\right)+8=0$

Đặt $x^2+6x-7=y$ phương trình có dạng $y\left(y-9\right)+8=0 \Leftrightarrow y^2-9y+8=0$

Giải ra ta được $y_1=1; y_2=8$

• Với $y=1$ ta được $x^2+6x-7=1 \Leftrightarrow x^2+6x-8=0$

Giải ra ta được $x_3=-3+\sqrt{17}; x_4=-3-\sqrt{17}$

• Với $y=8$ ta được $x^2+6x-7=8 \Leftrightarrow x^2+6x-15=0$

Giải ra ta được $x_1=-3+2\sqrt{6}; x_2=-3-2\sqrt{6}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $s=\left\{-3+2\sqrt{6};-3-2\sqrt{6};-3+\sqrt{17};-3-\sqrt{17}\right\}$

Ví dụ 3: Giải phương trình $\dfrac{2x}{3^2-5x+2}+\dfrac{13x}{3x^2+x+2}=6$

Giải

Tìm cách giải. Cũng như các ví dụ trên, nếu quy đồng ta được phương trình bậc 4, nên cũng phân tích đa thức thành nhân tử và giải được. Song trong ví dụ này, bài toán có dạng $\dfrac{mx}{ax^2+bx+d}+\dfrac{nx}{ax^2+cx+d}=p$ Nên bài toán có hai cách giải khác:

- Cách 1. Đặt $ax^2+d=t$ Ta được phương trình chứa cả x và t , rồi phân tích đa thức thành nhân tử. Cách này gọi là đổi biến không hoàn toàn.

- Cách 2.

Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia cả tử và mẫu mỗi phân thức ở vế trái cho x, ta được: $\dfrac{m}{ax+b+\dfrac{d}{x}}+\dfrac{n}{ax+c+\dfrac{d}{x}}=p$ Sau đó đặt ẩn phụ rồi giải

Trình bày lời giải

Cách 1. Đặt $t=3x^2+2$ phương trình có dạng $\dfrac{2x}{t-5x}+\dfrac{13x}{t+x}=6$

Quy đồng khử mẫu, thu gọn ta được: $2t^2-13t+11x^2=0 \Leftrightarrow (t-x)(2t-11x)=0$

Trường hợp 1 Xét $t-x=0 \Leftrightarrow 3x^2+2-x=0$ vô nghiệm

Trường hợp 2.

Xét $2t-11x=0 \Leftrightarrow 2(3x^2+2)-11x=0 \Leftrightarrow 6x^2-11x+4=0$

Giải ra ta được $x_1=\dfrac{1}{2};x_2=\dfrac{4}{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trinh là: $s=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{3}\right\}$

Cách 2. Xét $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, nên ta chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức cho x ta được $\dfrac{2}{3x-5+\dfrac{2}{x}}+\dfrac{13}{3x+1+\dfrac{2}{x}}=6$

Đặt $3x-2+\dfrac{2}{x}=t$ phương trình có dạng $\dfrac{2}{t-3}+\dfrac{13}{t+3}=6$

Quy đồng, khử mẫu và thu gọn ta được: $6t^2-15t-21=0$ Giải ra ta được $t_1=-1;t_2=\dfrac{7}{2}$

* Trường hợp 1. Xét $t=-1$ suy ra $3x-2+\dfrac{2}{x}=-1 \Leftrightarrow 3x^2-x+2=0$ vô nghiệm

* Trường hợp 2. Xét $t=\dfrac{7}{2}$ suy ra $3x-2+\dfrac{2}{x}=\dfrac{7}{2} \Leftrightarrow 6x^2-11x+4=0$

Giải ta ta được $x_1=\dfrac{1}{2};x_2=\dfrac{4}{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $s=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{3}\right\}$

Ví dụ 4: Giải phương trình $\dfrac{x^2+3x+3}{x^2-4x+3}+\dfrac{x^2+6x+3}{x^2+5x+3}=\dfrac{53}{12}$

(Thi học sinh giỏi, Tinh Trà Vinh, năm học 2009 - 2010)

Giải

Tìm cách giải. Cũng như các ví dụ trên, nếu quy đồng ta được phương trình bậc 4, nên cũng phân tích đa thức thành nhân tử và giải được. Song trong ví dụ này, Bài toán có dạng $\frac{ax^2+mx+c}{ax^2+nx+c}+\frac{ax^2+px+c}{ax^2+qx+c}=d$ Cách giải thông thường cho dạng toán này là:

- Bước 1. Xét $x=0$ hai vế không bằng nhau nên $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

- Bước 2. Xét $x\neq 0$ chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức cho x. Sau đó đặt ẩn phụ, giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức vừa tìm được.

Trình bày lời giải

• Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

• Điều kiện $x\neq 0$ mỗi phân thức ở vế trái ta chia cả tử và mẫu cho x, ta được:

$$\frac{x+3+\frac{3}{x}}{x-4+\frac{3}{x}}+\frac{x+6+\frac{3}{x}}{x+5+\frac{3}{x}}=\frac{53}{12}(2)$$

Đặt $y=x+\frac{3}{x}+3$, phương trình (2) trở thành $\frac{y}{y-7}+\frac{y+3}{y+2}=\frac{53}{12}$

Suy ra

$$12y(y+2)+12(y+3)(y-7)=53(y+2)(y-7)$$
$$\Leftrightarrow 29y^2-241y-490=0$$

Giải ra ta được $y_1=10; y_2=-\frac{49}{29}$

• Với $y=10$ ta được $x+\frac{3}{x}=7\Leftrightarrow x^2-7x+3=0$ Giải ra ta được $x_1=\frac{7+\sqrt{37}}{2}; x_2=\frac{7-\sqrt{37}}{2}$

• Với $y=-\frac{49}{29}$ ta được $x+\frac{3}{x}=-\frac{136}{29}\Leftrightarrow 29x^2+87+136x=0$

Giải ra ta được $x_1=\frac{-68+\sqrt{2101}}{29}; x_2=\frac{-68-\sqrt{2101}}{29}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $s=\left\{\frac{7+\sqrt{37}}{2};\frac{7-\sqrt{37}}{2};\frac{-68+\sqrt{2101}}{29};\frac{-68-\sqrt{2101}}{29}\right\}$

Ví dụ 5: Giải phương trình $(x-2)(x-1)(x-8)(x-4)=4x^2$

Giải

Tìm cách giải. Cũng như các ví dụ trên, nếu khai triển vế trái, ta được phương trình bậc 4, nên cũng phân tích đa thức thành nhân tử và giải được. Song trong ví dụ này, phương trình bậc 4 dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=mx^2$ với $ab=cd$. Chúng ta có hai cách giải:

• Cách 1. Viết đa thức dưới dạng: $\left[x^2+(a+b)x+ab\right]\left[x^2+(c+d)x+cd\right]=mx^2$

Bước 1. Viết phương trình dưới dạng: $\left[x^2+(a+b)x+ab\right]\left[x^2+(c+d)x+cd\right]=mx^2$

Bước 2. Xét $x=0$, hai vế không bằng nhau nên $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia cả hai vế của phương trình cho x^2. Sau đó đặt ẩn phụ, giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức vừa tìm được.

• Cách 2. Đặt $x^2+(a+b)x+ab=y$, ta được phương trình hai ẩn. Phân tích đa thức thành nhân tử phương trình vừa tìm được.

Trình bày lời giải

Cách 1

$(x-2)(x-1)(x-8)(x-4)=4x^2 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)(x-1)(x-8)=4x^2$
$\Leftrightarrow \left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-9x+8\right)=4x^2$

Nhận xét. $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được: $\left(x-6+\frac{8}{x}\right)\left(x-9+\frac{8}{x}\right)=4$

Đặt $x-6+\frac{8}{x}=y$ phương trình có dạng $y(y-3)=4 \Leftrightarrow y^2-3y-4=0$

Giải ra ta được $y=-1; y=4$

Trường hợp 1. Xét $y=-1$ ta có $x-6+\frac{8}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2-5x+8=0$

Phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Xét $y=4$ ta có $x-6+\frac{8}{x}=4 \Leftrightarrow x^2-10x+8=0$

Giải ra ta được $x_1=5-\sqrt{17}; x_2=5+\sqrt{17}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $s=\left\{5-\sqrt{17};5+\sqrt{17}\right\}$

Cách 2

$\left(x-2\right)\left(x-1\right)\left(x-8\right)\left(x-4\right)=4x^2 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x-4\right)\left(x-1\right)\left(x-8\right)=4x^2$

$\Leftrightarrow \left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-9x+8\right)=4x^2$

Đặt $x^2-6x+8=y$ phương trình có dạng $y\left(y-3x\right)=4x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+3xy-y^2=0 \Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(4x-y\right)=0$

- Trường hợp 1. $x+y=0 \Leftrightarrow x+x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x^2-5x+8=0$

Phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2. $4x-y=0 \Leftrightarrow 4x-x^2+6x-8=0 \Leftrightarrow x^2-10x+8=0$

Giải ra ta được $x_1=5-\sqrt{17}; x_2=5+\sqrt{17}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $s=\left\{5-\sqrt{17};5+\sqrt{17}\right\}$

Ví dụ 6. Giải phương trình $\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^3-\left(x-3\right)^3=16$

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2011 - 2012)

Giải

Áp dụng hằng đẳng thức $a^3-b^3=\left(a-b\right)^3-3ab\left(a-b\right)$

Ta có

$$\left(\frac{x-3}{x-2}-x+3\right)^3-3\frac{x-3}{x-2}\left(x-3\right)\left(\frac{x-3}{x-2}-x+3\right)=16$$

$$-\left[\frac{\left(x-3\right)^2}{x-2}\right]^3-3\left[\frac{\left(x-3\right)^2}{x-2}\right]^2=16$$

Đặt $\dfrac{\left(x-3\right)^2}{x-2}=y$ phương trình có dạng $-y^3-3y^2=16$

$\Leftrightarrow y^3+3y^2+16=0 \Leftrightarrow \left(y+4\right)\left(y^2-y+4\right)=0$

- Trường hợp 1. Xét $y+4=0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(x-3\right)^2}{x-2}+4=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$
- Trường hợp 2. Xét $y^2-y+4=0$ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của phương trình là $s=\left\{1\right\}$

Ví dụ 7. Giải phương trình: $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}+\dfrac{x^2+2x+2}{x+2}=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}+\dfrac{x^2+4x+4}{x+4}$

Giải

Điều kiện : $x \notin \{-1;-2;-3;-4\}$

Phương trình viết dưới dạng:

$$x+1+\frac{1}{x+1}+x+1+\frac{2}{x+2}=x+1+\frac{3}{x+3}+x+1+\frac{4}{x+4}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x+4}\right)+\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{-3x}{(x+1)(x+4)}+\frac{-x}{(x+2)(x+3)}=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(\frac{3}{(x+1)(x+4)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}\right)=0$$

- Trường hợp 1. Xét $x=0$ là nghiệm của phương trình.
- Trường hợp 2. Xét $\frac{3}{(x+1)(x+4)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=0$

Quy đồng khử mẫu, thu gọn ta được $4x^2+20x+22=0$

Giải ra ta được $x_1=\frac{-5-\sqrt{3}}{2};x_2=\frac{-5+\sqrt{3}}{2}$ thỏa mãn

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{0;\frac{-5-\sqrt{3}}{2};\frac{-5+\sqrt{3}}{2}\right\}$

C. Bài tập vận dụng

18.1. Giải phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Vĩnh Long, năm học 2009 - 2010).

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $t=\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\Rightarrow t^2=\frac{x^2}{9}-\frac{8}{3}+\frac{16}{x^2}$

$$3t^2=\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}-8\Rightarrow\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=3t^2+8$$

Khi đó phương trình trở thành $3t^2+8=10t\Leftrightarrow 3t^2-10t+8=0$

Giải ra ta được $t_1=2;t_2=\frac{4}{3}$

- Với $t=2$ ta được $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2\Leftrightarrow x^2-6x-12=0$

Giải ra ta được $x_1=3+\sqrt{21};x_2=3-\sqrt{21}$

• Với $t=\frac{4}{3}$ ta được $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x^2-4x-12=0$

Giải ra ta được $x_3=-2; x_4=6$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{3+\sqrt{21};3-\sqrt{21};-2;6\right\}$

18.2. Giải phương trình $2(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=7$

Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, TP Hồ Chí Minh, năm học 2008 - 2009

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $2(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=7\Leftrightarrow 2\left(64x^2+112x+49\right)\left(4x^2+7x+3\right)=7$

Đặt $y=4x^2+7x+3$ thì $64x^2+112x+49=16y+1$

Phương trình đã cho có dạng $2(16y+1)y=7\Leftrightarrow 32y^2+2y-7=0$

Giải ra ta được $y_1=\frac{7}{16}; y_2=\frac{-1}{2}$

• Với $y=\frac{7}{16}$ ta được $4x^2+7x+3=\frac{7}{16}\Leftrightarrow 64x^2+112x+41=0$

Giải ra ta được $x_1=\frac{-7+2\sqrt{2}}{8}; x_2=\frac{-7-2\sqrt{2}}{8}$

• Với $y=-\frac{1}{2}$ ta được $4x^2+7x+3=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 8x^2+14x+7=0$ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{\frac{-7+2\sqrt{2}}{8};\frac{-7-2\sqrt{2}}{8}\right\}$

18.3. Giải phương trình $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Bình Phước, năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải – đáp số

Phương trình tương đương với

$$x^2-2\frac{x^2}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)^2}+2\frac{x^2}{x+1}=3$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2+2.\frac{x^2}{x+1}=3$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2\frac{x^2}{x+1}-3=0$$

Đặt $\frac{x^2}{x+1}=y$ phương trình có dạng $y^2+2y-3=0$

Giải ra ta được $y_1=1; y_2=-3$

• Với $y=1$ ta được $\frac{x^2}{x+1}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$. Giải ra ta được $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}; x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

• Với $y=-3$ ta được $\frac{x^2}{x+1}=-3 \Leftrightarrow x^2+3x+3=0$ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

18.4. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm: $x^4+(3m-1)x^3-(3m-2)x^2+(3m-1)x+1=0$

(m là tham số)

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2007 - 2008)

Hướng dẫn giải – đáp số

Nhận xét $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, nên ta chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được

$$x^2+(3m-1)x-(3m-2)+(3m-1)\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+(3m-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)-(3m-2)=0(1)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=y$ điều kiện $y\ge 2$ hoặc $y\le 2$ tức là $|y|\ge 2$

Khi đó phương trình có dạng $y^2-2+(3m-1)y-(3m-2)=0 \Leftrightarrow y^2+(3m-1)y-3m=0(2)$

Giải ra ta được $y_1=1; y_2=-3m$

Phương trình (1) có nghiệm ⇔ phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn

$|y|\ge 2 \Leftrightarrow |-3m|\ge 2 \Leftrightarrow m\ge \frac{2}{3}$ hoặc $m\le \frac{-2}{3}$

Vậy với $|m|<\frac{2}{3}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm

18.5. Giải phương trình $\frac{4x^2+16}{x^2+6}-\frac{3}{x^2+1}=\frac{5}{x^2+3}+\frac{7}{x^2+5}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2007 - 2008)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\frac{4x^2+16}{x^2+6}-\frac{3}{x^2+1}=\frac{5}{x^2+3}+\frac{7}{x^2+5}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4x^2+16}{x^2+6}-3\right)+\left(1-\frac{3}{x^2+1}\right)+\left(1-\frac{5}{x^2+3}\right)+\left(1-\frac{7}{x^2+5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-2}{x^2+6}+\frac{x^2-2}{x^2+1}+\frac{x^2-2}{x^2+3}+\frac{x^2-2}{x^2+5}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(\frac{1}{x^2+6}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{x^2+5}\right)=0$$

Vì $\frac{1}{x^2+6}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{x^2+5}\neq 0$ nên $x^2-2=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$

18.6. Giải phương trình $\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)=2x^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Nhận xét. $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế cho x^2 ta được:

$$\left(x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{2}{x}+2\right)=2$$

Đặt $x+\frac{2}{x}+1=y$ phương trình có dạng $y.(y+1)=2$

$y^2+y-2=0$ giải ra ta được $y=1; y=-2$

Trường hợp 1. Với $y=1$ ta có $x+\frac{2}{x}+1=1\Leftrightarrow x^2+2=0$, phương trình vô nghiệm

Trường hợp 1. Với $y=-2$ ta có $x+\frac{2}{x}+1=-2\Leftrightarrow x^2+3x+2=0$. Giải ra ta được $x=-1; x=-2$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{-1;-2\}$

18.7 Giải phương trình $3(x^2+2x-1)^2-2(x^2+3x-1)^2+5x^2=0$

Hướng dẫn giải – đáp số

Nhận xét. $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế của hai phương trình cho x^2 ta được: $3\left(x+2-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+3-\frac{1}{x}\right)^2+5=0$

Đặt $x+2-\frac{1}{x}=y$ phương trình có dạng $3y^2-2\left(y+1\right)^2+5=0\Leftrightarrow y^2-4y+3=0$

Giải ra ta được $y=1; y=3$

Trường hợp 1. Với $y=1$ ta có $x+2-\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$

Giải ra ta được $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 2. Với $y=3$ ta có $x+2-\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$

Giải ra ta được $x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}; x_4=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

18.8. Giải các phương trình:

$a) x^4=24x+32$
$b) x^4=4x+1$
$c) x^4=2x^2-12x+8$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) x^4+4x^2+4=4x^2+24x+36$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2\right)^2=\left(2x+6\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2=2x+6 \\ x^2+2=-2x-6 \end{array}\right.$$

• Giải phương trình $x^2+2=2x+6 \Leftrightarrow x^2-2x-4=0$

Giải ra ta được $x_1=1+\sqrt{5}; x_2=1-\sqrt{5}$

Giải phương trình $x^2+2=-2x-6 \Leftrightarrow x^2+2x+8=0$ vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm là: $S=\left\{1+\sqrt{5}; 1-\sqrt{5}\right\}$

$$b) x^4+2x^2+1=2x^2+4x+2 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^2=\left(\sqrt{2}.x+\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+1=\sqrt{2}.x+\sqrt{2} \\ x^2+1=-\sqrt{2}x-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

• Giải phương trình $x^2+1=\sqrt{2}.x+\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0$

Giải ra ta được $x_1=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}; x_2=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$

• Giải phương trình $x^2+1=-\sqrt{2}x-\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1=0$ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right\}$

$c)\Leftrightarrow x^4+2x^2+1=4x^2-12x+9\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2=\left(2x-3\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+1=2x-3\\x^2+1=-2x+3\end{array}\right.$

• Giải phương trình $x^2+1=2x-3\Leftrightarrow x^2-2x+4=0$. Vô nghiệm

• Giải phương trình $x^2+1=-2x+3\Leftrightarrow x^2+2x-2=0$

Giải ra ta được $x_1=1-\sqrt{3};x_2=1+\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\}$

18.9 Giải phương trình $\dfrac{x}{x^2-x-2}-\dfrac{3x}{x^2-5x-2}-2=0$

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, tỉnh Thanh Hóa, năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $\begin{cases}x^2-x-2\neq 0\\x^2-5x-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x\neq 2\\x\neq\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{2}\end{cases}$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Khi $x\neq 0$ thì phương trình đã cho $\Leftrightarrow\dfrac{1}{x-1-\dfrac{2}{x}}-\dfrac{3}{x-5-\dfrac{2}{x}}-2=0$

Đặt $t=x-\dfrac{2}{x}$ ta được phương trình biểu thị theo t là $\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{3}{t-5}=2$

$\Leftrightarrow t^2-5t+6=0\Leftrightarrow t=2;t=3$

Với $t=2\Rightarrow x-\dfrac{2}{x}=2\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$ (thỏa mãn)

Với $t=3\Rightarrow x-\dfrac{2}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{1\pm\sqrt{3};\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$

Chuyên đề 19. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A. Kiến thức cần nhớ

Bước 1. Lập phương trình.

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp của ẩn.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình nói trên.

Bước 3.Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán và trả lời.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Một nhóm thợ đặt kế hoạch sản xuất 2400 sản phẩm trong thời gian dự định. Trong 5 ngày đầu họ thực hiện đúng mức đề ra, nhưng vì muốn hoàn thành sớm 5 ngày nên trong những ngày còn lại họ phải làm vượt mức mỗi ngày 20 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày họ cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Giải

Tìm cách giải. Để giải dạng toán này, chúng ta nên nhớ:

Năng suất = $\dfrac{\text{khối lượng công việc}}{\text{thời gian}}$ $\Rightarrow$ Thời gian = $\dfrac{\text{khối lượng công việc}}{\text{năng suất}}$

Sau gọi ẩn là năng suất, chúng ta biểu diễn thời gian dự định và thời gian thực tế theo ẩn số và các số đã biết. Phương trình lập được là phương trình về thời gian.

Trình bày lời giải

Gọi số sản phẩm theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất là x (sản phẩm / ngày, $x \in Z^*$)

Suy ra trong 5 ngày đầu họ làm được $5x$ (sản phẩm), thời gian làm số sản phẩm còn lại là $\dfrac{2400-5x}{x+20}$ ngày

Thời gian làm theo kế hoạch là $\dfrac{2400}{x}$ ngày

Theo đề bài nhóm thợ hoàn thành sớm 5 ngày so với dự định, ta có phương trình

$$5+\frac{2400-5x}{x+20}+5=\frac{2400}{x} \Leftrightarrow x^2+40x-9600=0$$

Giải ra ta được $x_1=80$ (thỏa mãn điều kiện), $x_2=-120$ (loại)

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất 80 sản phẩm.

Ví dụ 2. Một tổ chức có kế hoạch sản xuất 350 sản phẩm theo năng xuất dự định. Nếu tăng năng xuất lên 10 sản phẩm mỗi ngày thì tổ đó hoàn thành sớm 2 ngày so với giảm năng suất 10 sản phẩm mỗi ngày. Tính năng xuất dự kiến.

Giải

Gọi năng suất dự kiến là x ($x \in$ N*, x sản phẩm)

Nếu năng suất mỗi ngày tăng thêm 10 sản phẩm thì thời gian hết là $\frac{350}{x+10}$ ngày

Nếu năng suất mỗi ngày giảm đi 10 sản phẩm thì thời gian hết là: $\frac{350}{x-10}$ ngày

Theo đề bài, nếu tăng năng xuất lên 10 sản phẩm mỗi ngày thì tổ đó hoàn thành sớm 2 ngày so với giảm năng suất 10 sản phẩm mỗi ngày, ta có phương trình $\frac{350}{x-10}-\frac{350}{x+10}=2$

$\Leftrightarrow 350x+3500-350x+3500=2x^2-200$

$\Leftrightarrow 2x^2=7200$

$\Leftrightarrow x_1=60$ (thỏa mãn), $x_2=-60$ (không thỏa mãn)

Vậy năng suất dự kiến là 60 sản phẩm mỗi ngày.

Ví dụ 3. Hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước và đầy bể sau 1h48 phút. Nếu chảy riêng thì vòi thứ hai chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ nhất là 1h30 phút. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi sẽ chảy đầy bể trong bao lâu?

Giải

Đổi 1h48 phút = $\frac{9}{5}h$, 1h30 phút = $\frac{3}{2}h$

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x (giờ, $x>\frac{9}{5}$)

Thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là $\left(x-\frac{3}{2}\right)$ giờ

suy ra 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể

1 giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x-\frac{3}{2}}$ bể

Theo đầu bài, hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước và đầy bể sau 1h48 phút $\left(=\frac{9}{5}h\right)$, ta có phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{3}{2}}=\frac{5}{9}\Leftrightarrow 10x^2-51x+27=0$

Giải ra ta được $x_1=4,5$ (thỏa mãn điều kiện), $x_2=0,6$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất chảy đầy bể hết 4,5h

và vòi thứ hai chảy đầy bể hết $4,5-1,5=3h$

Ví dụ 4. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 720m^2, nếu tăng chiều dài thêm 6m và giảm chiều rộng đi 4m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tìm kích thước mảnh vườn.

Giải

Gọi chiều dài của mảnh vườn là x $(m\, x>0)$

Chiều rộng của mảnh vườn là $\frac{720}{x}(m)$

Chiều dài của mảnh vườn khi tăng thêm 6m là $x+6(m)$

Chiều rộng mảnh vườn khi giảm đi 4m là $\frac{720}{x}-4(m)$

Theo đề bài, diện tích mảnh vườn không đổi, ta có phương trình:

$\left(\frac{720}{x}-4\right)(x+6)=720\Leftrightarrow 4x^2+24x-4320=0$

Giải ra, ta được $x_1=30$ (thỏa mãn), $x_2=-36$ (không thỏa mãn)

Vậy chiều dài của mảnh vườn là 30 m, chiều rộng của mảnh vườn là $\frac{720}{30}=24m$

Ví dụ 5. Một phòng họp chứa 300 chỗ ngồi được chia thành các dãy có số ghế bằng nhau. Nếu thêm hai chỗ vào mỗi dãy ghế và bớt đi 3 dãy ghế thì trong phòng bớt đi 11 chỗ ngồi. Hỏi phòng họp lúc đầu có bao nhiêu dãy ghế, mỗi dãy có bao nhiêu ghế?

Giải

Tìm cách giải. Dạng toán này chúng ta lưu ý: số ghế trong phòng = số dãy x số ghế trong một dãy. Lời giải tương tự như dạng bài toán về hình chữ nhật biết diện tích và sự thay đổi kích thước của nó.

Trình bày lời giải

Gọi số dãy ghế của phòng họp lúc đầu là x $(x \in N, x$ dãy)

Và số ghế mỗi dãy là $\dfrac{300}{x}$ (ghế)

Số dãy ghế lúc sau là $x-3$ dãy

Số ghế ở mỗi dãy lúc sau là $\dfrac{300}{x}+2$ (ghế)

Theo đề bài, ta có phương trình: $(x-3)\left(\dfrac{300}{x}+2\right)=300-11$

$\Leftrightarrow 300+2x-\dfrac{900}{x}-6=289 \Leftrightarrow 2x^2+5x-900=0$

Giải ra, ta được $x_1=20$ (thỏa mãn), $x_2=-22,5$ (không thỏa mãn)

Vậy số dãy ghế là 20 dãy và mỗi dây có $\dfrac{300}{20}=15$ ghế

Ví dụ 6. Cùng một thời điểm, một chiếc ô tô X_A xuất phát từ thành phố A hướng về thành phố B và một chiếc xe khác X_B xuất phát từ thành phố B hướng về thành phố A. Chúng chuyển động với vận tốc riêng không đổi và gặp nhau lần đầu tại một điểm cách A là 20km. Cả hai chiếc xe sau khi đến B và A tương ứng, lập tức quay trở lại và chúng gặp nhau lần thứ hai tại một địa điểm C. Biết thời gian xe X_B đi từ C đến B là 10 phút và thời gian giữa hai lần gặp nhau là 1 giờ. Hãy tính vận tốc của từng chiếc ô tô.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT năng khiếu ĐHQG. TP Hồ Chí Minh, năm học 2004 - 2005)

Giải

Gọi M là chỗ gặp nhau lần đầu; vận tốc của ô tô đi từ A là x $(km/h, x>0)$; vận tốc ô tô đi từ B là y $(km/h, y>0)$. Thời gian xe đi từ A đến M là $\dfrac{20}{x}(h)$

Thời gian này cũng là thời gian xe X_B đi từ B đến M.

Khoảng cách BM là $\dfrac{20}{x}.y=\dfrac{20y}{x}(km)$

Quãng đường AB là $20+\dfrac{20y}{x}(km)$

Khoảng cách CB là $\dfrac{10}{60}y=\dfrac{y}{6}(km)$

Khoảng cách AC là $20+\dfrac{20y}{x}-\dfrac{y}{6}(km)$

Tổng khoảng cách MB và BC là $\frac{20y}{x}+\frac{y}{6}(km)$ Theo đầu bài, ta có phương trình: $\frac{20y}{x}+\frac{y}{6}=x(1)$

Tổng khoảng cách MA và AC là: $20+20+\frac{20y}{x}-\frac{y}{6}=40+\frac{20y}{x}-\frac{y}{6}(km)$

Theo đầu bài ta có phương trình $40+\frac{20y}{x}-\frac{y}{6}=y(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y\left(\frac{20}{x}+\frac{1}{6}\right)=x(1) \\ y\left(\frac{20}{x}-\frac{7}{6}\right)=-40(2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có: $-40\left(\frac{20}{x}+\frac{1}{6}\right)=x\left(\frac{20}{x}-\frac{7}{6}\right)\Leftrightarrow 7x^2-160-4800=0$

Giải ra ta được $x_1=40$ (thỏa mãn), $x_2=-17\frac{1}{7}$ (không thỏa mãn) $\Rightarrow y=60$

Vậy vận tốc của ô tô X_A là 40 km/h, vận tốc của ô tô X_B là 60 km/h.

C. Bài tập vận dụng

19.1. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì đầy sau 7h12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian bao lâu?

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x giờ $(0<x<30)$

Thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là $(30-x)$ giờ

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể)

Trong 1 giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{30-x}$ (bể)

Theo đề bài, hai vòi cùng chảy mà đầy bể sau 7h12 phút ($7\frac{1}{5}$ giờ). Ta có phương trình:

$$7\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{30-x}\right)=1\Leftrightarrow x^2-30x+216=0$$

Giải ra ta được có $x_1=12; x_2=18$ (thỏa mãn)

Vậy nếu vòi thứ nhất chảy riêng là 12(giờ) thì vòi hai chảy riêng đầy bể là $30-12=18$ (giờ) và ngược lại

19.2. Một tổ dự định sản xuất 720 sản phẩm theo năng suất dự định. Nếu sản xuất tăng 10 sản phẩm mỗi ngày sẽ nhanh hơn giảm năng suất 20 sản phẩm mỗi ngày là 4 ngày. Tính năng suất dự kiến.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi năng suất dự kiến là x ($x \in N^*, x$ sản phẩm)

Nếu năng suất mỗi ngày tăng thêm 10 sản phẩm thì thời gian hết là $\dfrac{720}{x+10}$ ngày

Nếu năng suất mỗi ngày giảm đi 10 sản phẩm thì thời gian hết là: $\dfrac{720}{x-20}$ ngày

Theo đề bài, ta có phương trình $\dfrac{720}{x-20}-\dfrac{720}{x+10}=4$

$\Leftrightarrow 720x+7200-720x+14400=4x^2-40x-800$

$\Leftrightarrow 4x^2-40x-22400=0$

$\Leftrightarrow x_1=80$ (thỏa mãn), $x_2=-70$ (không thỏa mãn)

Vậy năng suất dự kiến là 80 sản phẩm mỗi ngày.

19.3. Một hợp tác xã dự kiến thu hoạch 200ha lúa trong thời gian đã định. Song thực tế mỗi ngày thu hoạch nhanh hơn so với kế hoạch là 5 ha nên đã hoàn thành công việc nhanh hơn dự kiến 2 ngày. Hỏi theo dự kiến mỗi ngày thu hoạch bao nhiêu ha?

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi mỗi ngày theo dự kiến thu hoạch được x $(ha, x>0)$

Thời gian thu hoạch theo kế hoạch là $\dfrac{200}{x}$ ngày

Thời gian thu hoạch thực tế là $\dfrac{200}{x+5}$ ngày

Theo đề bài, ta có phương trình $\dfrac{200}{x}-\dfrac{200}{x+5}=2$

$\Leftrightarrow 200x+1000-200x=2x^2+10x$

$\Leftrightarrow 2x^2+10x-1000=0$

$\Leftrightarrow x_1=20$ (thỏa mãn), $x_2=-25$ (không thỏa mãn)

Vậy theo dự kiến mỗi ngày thu hoạch 20 ha.

19.4. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì làm xong trong 4h. Nếu mỗi đội làm một mình xong công việc ấy thì đội thứ nhất cần ít thời gian hơn đội thứ hai là 6h. Hỏi mỗi đội làm một mình xong công việc ấy trong bao lâu?

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi thời gian đội thứ nhất làm 1 mình xong công việc hết x (giờ, $x > 4$)

Suy ra thời gian đội thứ hai làm 1 mình xong công việc hết $(x + 6)$ giờ

Trong 1h đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc

Trong 1h đội thứ hai làm được $\frac{1}{x+6}$ công việc

Theo đầu bài, ta có phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x^2-2x-24=0$

$\Leftrightarrow x_1=6$ (thỏa mãn), $x_2=-4$ (không thỏa mãn)

Vậy nếu làm riêng thì đội 1 hoàn thành công việc trong 6h và đội 2 hoàn thành công việc trong 6 + 6=12h.

19.5. Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 90km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 1,2 giờ (Xe thứ nhất khởi hành từ A xe thứ hai khởi hành từ B). Tìm vận tốc của mỗi xe. Biết rằng thời gian để xe thứ nhất đi hết quãng đường AB ít hơn thời gian để xe thứ hai đi hết quãng đường AB là 1 giờ.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi vận tốc xe đi từ A và xe đi từ B lần lượt là $x; y\left(km/h, x, y>0\right)$

Thời gian xe 1 đi hết quãng đường AB là $\frac{90}{x}h$

Thời gian xe 2 đi hết quãng đường AB là $\frac{90}{y}h$

Theo đề bài, ta có hệ phương trình $\begin{cases}1,2x+1,2y=90\\ \frac{90}{y}-\frac{90}{x}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=75\\ \frac{90}{75-x}-\frac{90}{x}=1\end{cases}$

Giải ra ta được $\begin{cases}x=-150\\ y=225\end{cases}$ (không thỏa mãn) $\begin{cases}x=45\\ y=30\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy vận tốc xe đi từ A, xe đi từ B là 45 km/h, 30 km/h.

19.6. Một xuồng máy xuôi dòng sông 30km và ngược dòng 28km hết một thời gian bằng thời gian mà xuồng đi 59,5km trên mặt hồ yên lặng. Tính vận tốc của xuồng khi đi trên hồ, biết rằng vận tốc của nước chảy trên sông là 3km/h.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi vận tốc của xuồng trên mặt hồ là x (km/h, $x>0$)

Vận tốc xuồng đi xuôi dòng là $x+3$ km/h.

Vận tốc xuồng đi ngược dòng là $x-3$ km/h.

Theo đề bài, ta có phương trình $\frac{30}{x+3}+\frac{28}{x-3}=\frac{59,5}{x}$

$\Rightarrow 1,5x^2+6x-535,5=0 \Leftrightarrow x^2+4x-357=0$

$\Leftrightarrow x_1=17$ (thỏa mãn), $x_2=-21$ (không thỏa mãn)

Vậy vận tốc của ca nô khi đi trên mặt hồ yên lặng là 17km/h.

19.7. Một bè nứa trôi tự do (với vận tốc bằng vận tốc dòng nước) và một ca nô cùng dời bến A để xuôi dòng sông Ca nô xuôi dòng được 96km thì quay lại về bến A ngay. Cả đi lẫn về hết 14 giờ. Trên đường quay về A. khi còn cách bến A là 24km thì gặp bè nứa nói trên. Tìm vận tốc riêng của Ca nô và vận tốc dòng nước.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi vận tốc của ca nô và vận tốc dòng nước lần lượt là x; y (x > y >0, x y km/h)

Thời gian ca nô xuôi dòng là $\frac{96}{x+y}h$

Thời gian ngược dòng là $\frac{96}{x-y}h$

Thời gian bè trôi 24km là $\frac{24}{y}=14-\frac{24}{x-y}(h)$

Theo đề bài, ta có phương trình $\begin{cases}\frac{96}{x+y}+\frac{96}{x-y}=14\\ \frac{24}{y}=14-\frac{24}{x-y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}96x=7(x+y)(x-y)(1)\\ 12x=7y(x-y)(2)\end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $56y(x-y)=7(x+y)(x-y) \Leftrightarrow 8y=x+y$ (vì $x>y$)

$\Rightarrow x=7y$ Thay vào phương trình (2) ta được $12.7y=7y(7y-y)$

$\Rightarrow y=2$ (thỏa mãn), $x=14$ (thỏa mãn)

Vậy vận tốc của dòng nước là 2 km/h và của ca nô là 14 km/h.

19.8. Một phòng họp có 360 chỗ ngồi được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ và bớt đi 3 dãy thì số chỗ trong phòng họp không thay đổi. Hỏi ban đầu trong phòng họp có bao nhiêu dãy?

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số dãy ghế của phòng họp lúc đầu là x ($x \in N^*, x$ dãy)

Số ghế mỗi dãy là $\dfrac{360}{x}$ ghế

Số dãy ghế lúc sau là $x-3$ dãy

Số ghế ở mỗi dãy lúc sau là $\dfrac{360}{x-3}$ ghế

Theo đề bài, ta có phương trình $\dfrac{360}{x-3}-\dfrac{360}{x}=4 \Leftrightarrow 4x^2-12x-1080=0$

Giải ra ta được $x_1=18$ (thỏa mãn), $x_2=-15$ (không thỏa mãn)

Vậy số dãy ghế là 18 dãy và mỗi dãy có $\dfrac{360}{18}=20$ ghế

19.9. Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120km trong một thời gian quy định. Sau khi đi được 1 giờ ô tô bị chắn đường bởi xe hơi trong 10 phút. Do đó để đến B đúng hẹn, xe phải tăng vận tốc thêm 6km/h. Tính vận tốc lúc đầu của ô tô.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đổi 10 phút = $\dfrac{1}{6}$ giờ

Gọi vận tốc ban đầu của ô tô là x (x km, $x>0$)

Thời gian dự định là $\dfrac{120}{x}$ (giờ)

Thời gian đi quãng đường lúc sau là $\dfrac{120-x}{x+6}$ (giờ)

Theo đầu bài ta có phương trình $1+\dfrac{120-x}{x+6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{120}{x} \Leftrightarrow x^2+42x-4320=0$

Giải ra ta được $x_1=48$ (thỏa mãn), $x_2=-90$ (không thỏa mãn)

Vậy vận tốc ban đầu của ô tô là 48 km/h.

19.10. Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120km với vận tốc và thời gian dự định. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB với vận tốc đó người ta tăng vận tốc thêm 10km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường biết người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đổi 24 phút = 0,4 giờ

Gọi vận tốc dự định là x (km/h, $x>0$)

Thời gian dự định đi từ A đến B là $\frac{120}{x}$ (giờ)

Thời gian xe đi quãng đường đầu tiên là $\frac{40}{x}$ (giờ)

Thời gian xe đi quãng đường còn lại là $\frac{80}{x+10}$ (giờ)

Theo đề bài, người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút, ta có phương trình:

$$\frac{120}{x}-\frac{80}{x+10}-\frac{40}{x}=0,4 \Leftrightarrow \frac{80}{x}-\frac{80}{x+10}=0,4 \Leftrightarrow x^2+10x-2000=0$$

Giải ra ta được $x_1=40$ (thỏa mãn) $x_2=-50$ (không thỏa mãn)

Vậy vận tốc của xe là 40km/h và thời gian xe lăn bánh trên đường là: $\frac{120}{40}-0,4=2,6$ giờ

19.11. Một xí nghiệp giao cho một công nhân làm 120 sản phẩm trong thời gian quy định. Sau khi làm được 2 giờ, người đó đã cải tiến kĩ thuật nên đã tăng được 4 sản phẩm mỗi giờ so với dự kiến. Vì vậy trong thời gian qui định không những hoàn thành kế hoạch trước 1 giờ mà còn vượt mức 16 sản phẩm. Tính năng suất làm lúc đầu.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi năng suất lúc đầu là x (sản phẩm/ giờ, $x \in$ N)

Suy ra thời gian dự định là $\frac{120}{x}$ giờ.

Thực tế, 2 giờ đầu làm được là $2x$ sản phẩm

năng suất tăng thêm 4 sản phẩm/giờ nên năng suất thực tế là $x+4$ sản phẩm/ giờ

Số sản phẩm thực tế khi tăng năng suất là $120+16-2x=136-2x$ sản phẩm nên thời gian thực tế là $\frac{136-2x}{x+4}$ giờ

Theo đầu bài, ta có phương trình: $2+\frac{136-2x}{x+4}=\frac{120}{x}-1$

$\Leftrightarrow x^2+28x-480=0$

Giải ra ta được $x_1=12$ (thỏa mãn), $x_2=-40$ (không thỏa mãn)

Vậy năng suất lúc đầu là: 12 sản phẩm mỗi giờ.

19.12. Một nhóm học sinh đi du khảo về nguồn bằng xe đạp từ thành phố Cao Lãnh đến khu căn cứ địa cách mạng Xẻo Quýt cách nhau 24 kilômét (km). Khi trở về thành phố Cao Lãnh, vì ngược gió nên vận tốc trung bình của nhóm học sinh bị giảm 4 km/giờ và thời gian di chuyển từ khu căn cứ địa cách mạng Xẻo Quýt về thành phố Cao Lãnh lâu hơn thời gian di chuyển từ thành phố Cao Lãnh đến khu căn cứ địa cách mạng Xẻo Quýt là 1 giờ. Hãy tính vận tốc trung bình ở lượt đi từ thành phố Cao Lãnh đến khu căn cứ địa cách mạng của nhóm học sinh nói trên.

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, tỉnh Đồng Tháp, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi thành phố Cao Lãnh là A, khu căn cứ địa cách mạng Xẻo Quýt là B.

Gọi vận tốc trung bình ở lượt đi của nhóm học sinh nói trên là: x (km/giờ). Điều kiện $x>4$

Vận tốc trung bình khi trở về là: $x-4$ (km/giờ)

Thời gian nhóm học sinh đi từ điểm A đến điểm B là $\frac{24}{x}$ (giờ)

Thời gian nhóm học sinh đi từ điểm B đến điểm A là $\frac{24}{x-4}$ (giờ)

Theo đề bài ta có $\frac{24}{x-4}-\frac{24}{x}=1\Leftrightarrow x^2-4x-96=0\Leftrightarrow x_1=12; x_2=-8$

Kết hợp với điều kiện ta có $x_1=12$ thỏa mãn

Vậy vận tốc trung bình ở lượt đi từ thành phố Cao Lãnh đến khu căn cứ địa cách mạng của nhóm học sinh nói trên là 12 (km/giờ).

Chương VỊ TRÍ TƯƠNG GIAOGIỮA PARABOL VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Chuyên đề 20

A.Kiến thức cần

Cho Parabol (P): $y = ax^2\left(a \neq 0\right)$ và đường thẳng $y = bx + c$ có đồ thị là (d) . Khi đó hoành độ giao điểm (P) và (d) là nghiệm của phương trình: $ax^2 = bx + c$ (*)

- (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt
- (P) không cắt (d) $\Leftrightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm
- (P) tiếp xúc với (d) $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm kép

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, Cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = kx + 1$ (k là tham số) . Tìm k để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt M,N sao cho $MN = 2\sqrt{10}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9,tỉnh Bắc Ninh, năm học 2012-2013)

Giải

Tìm cách giải. Để giải quyết dạng toán này , chúng ta cần thực hiện qua các bước sau:

- Bước 1. Tìm điều kiện để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Tức là phương trình $x^2 = kx + 1$ có hai nghiệm phân biệt.
- Bước 2. Vận dụng hệ thức Vi-ét. Vì $M\left(x_1; y_1\right), N\left(x_2; y_2\right)$ thuộc (d), biểu diễn y_1, y_2 theo x_1, x_2 rồi theo k.
- Bước 3. Vận dụng công thức : $M\left(x_1; y_1\right), N\left(x_2; y_2\right)$ thì:

$$MN = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$ .Sau đó tìm k

Bước 4. Nhận xét, so sánh k tìm được với bước 1, rồi trả lời

Trình bày lời giải

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $M\left(x_1; y_1\right), N\left(x_2; y_2\right)$ thì $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình : $x^2 - kx - 1 = 0$

Xét $\Delta = k^2 + 4 > 0$ với mọi k, nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Do đó (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1.x_2 = -1 \end{cases}$

Vì M, N thuộc (d) nên $y_1 = kx_1 + 1; y_2 = kx_2 + 1 \Rightarrow y_2 - y_1 = k\left(x_2 - x_1\right)$

Ta có: $MN^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{10}\right)^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + k^2\left(x_2 - x_1\right)^2$

$40 = \left(1 + k^2\right)\left(x_2 - x_1\right)^2 \Leftrightarrow \left(1 + k^2\right)\left[\left(x_2 + x_1\right)^2 - 4x_2x_1\right] = 40$

$\Leftrightarrow \left(1 + k^2\right)\left[k^2 + 4\right] = 40 \Leftrightarrow k^4 + 5k^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 2$

Vậy với $k = \pm 2$ thì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN = 2\sqrt{10}$

Ví dụ 2: Cho Parabol (P) : $y = 2x^2$. Trên (P) lấy điểm A có hoành độ bằng 1, điểm B có hoành độ bằng 2. Tìm m và n để đường thẳng $(d): y = mx + n$ tiếp xúc với Parabol (P) và song song với đường thẳng AB.

(Thi học sinh giỏi Toán 9,Tỉnh Vĩnh Long ,năm học 2011-2012)

Giải

Tìm cách giải . Qua dữ kiện và yêu cầu của bài toán . Chúng ta có thể giải bài toán theo bước sau :

- Bước 1. Biết hoành độ của điểm A và B , đồng thời A và B cùng thuộc (P) nên tính được tung độ điểm A và B. Từ đó viết phương trình đường thẳng AB.
- Bước 2. Vì (d) song song với AB nên $a = a'$. Tìm được m
- Bước 3. Vì (d) tiếp xúc với Parabol (P) nên vận dụng phương trình : $ax^2 = bx + c$ có nghiệm kép .Từ đó tìm được n

Trình bày lời giải

Tung độ của điểm A là $y = 2.1^2 = 2 \Rightarrow A\left(1;2\right)$

Tung độ của điểm B là $y = 2.2^2 = 8 \Rightarrow A\left(2;8\right)$

Gọi phương trình đường thẳng AB là $y = ax + b$

Suy ra : $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -4 \end{cases}$

Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = 6x - 4$

(d) song song với AB nên $m = 6$

(d) tiếp xúc với Parabol $(P) \Leftrightarrow 2x^2 = 6x + n$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow 2x^2-6x-n=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'=9+2n=0 \Leftrightarrow n=-\dfrac{9}{2}$

Vậy với $m=6, n=-\dfrac{9}{2}$ thì đường thẳng $(d): y=mx+n$ tiếp xúc với Parabol (P) và song song với đường thẳng AB

Ví dụ 3: Trong cùng một hệ tọa độ , cho đường thẳng $d: y=x-2$ và Parabol (P): $y=-x^2$. Gọi A và B là giao điểm của d và (P)

a) Tính độ dài AB

b) Tìm m để đường thẳng $d': y=-x+m$ cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho $CD=AB$

(Thi học sinh giỏi Toán 9,Tỉnh Thanh Hóa năm 2011-2012)

Giải

a) Hoành độ của A và B là nghiệm của phương trình :

$-x^2=x-2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x_1=1; x_2=-2$

- Với $x=1$ thì $y=1-2=-1$ suy ra $A(1;-1)$
- Với $x=-2$ thì $y=-2-2=-4$ suy ra $B(-2;-4)$

Độ dài đoạn thẳng AB là : $AB=\sqrt{(1+2)^2+(-1+4)^2}=3\sqrt{2}$ (đvđd)

b) Điều kiện để (d') cắt (P) tại hai điểm phân biệt C và D là : $-x^2=-x+m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1-4m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{4}$

Đặt $C(x_1;y_1); D(x_2;y_2)$ thì $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình : $x^2-x+m=0$

Theo hệ thức Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=m \end{cases}$

Vì $C(x_1;y_1); D(x_2;y_2)$ thuộc (d) nên $y_1=-x_1+m; y_2=-x_2+m$

$CD=AB \Leftrightarrow (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2=18$

$(x_2-x_1)^2=9 \Leftrightarrow (x_2+x_1)^2-4x_1x_2=9 \Leftrightarrow 1-4m=9 \Leftrightarrow m=-2$

Vậy với $m=-2$ thì đường thẳng $d': y=-x+m$ cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho $CD=AB$

Ví dụ 4: Cho Parabol $(P): y=\dfrac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y=-\dfrac{1}{2}x+2$

a) Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng hệ trục Oxy

b) Gọi A,B là giao điểm của (P) và (d). Tìm điểm M trên cung $\overset{\frown}{AOB}$ của (P)

Sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất

c) Tìm điểm N trên trục Ox sao cho $NA+NB$ nhỏ nhất

Giải

Tìm cách giải

- Để tìm vị trí điểm M sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất, ta có hai hướng suy nghĩ:

Hướng 1. Vì A, B đã biết nên phương trình đường thẳng AB là viết được và độ dài đoạn thẳng AB xác định được. Mặt khác vì tập hợp điểm M chỉ trên cung $\overset{\frown}{AOB}$ của (P) nên để diện tich tam giác MAB lớn nhất chúng ta cần xác định khoảng cách từ M đến AB là lớn nhất. Từ đó chúng ta nghĩ tới việc viết đường thẳng (d) tiếp xúc với (P) và song song với (d) là : $y=ax+b$. Khi đó cung $\overset{\frown}{AOB}$ của (P) chỉ nằm giữa (d) và (d') nên khoảng cách từ M đến AB là lớn nhất khi M trùng với tiếp điểm (d') và (P)

Hướng 2. Gọi C,D, N lần lượt là hình chiếu của B, A, M trên trục hoành. Khi đó ABCD, AMND, BCNM là hình thang và ABCD có diện tích xác định.Để diện tích tam giác MAB lớn nhất khi và chỉ khi tổng diện tích AMND và BCMN có diện tích nhỏ nhất. Vậy ta tính tất cả cách diện tích hình thang trên theo tọa độ đã biết và m.

- Tìm điểm N trên trục Ox sao cho $NA+NB$ nhỏ nhất, chúng ta dựa vào kiến thức hình học. Lấy B' đối xứng với B qua Ox thì độ dài AB' không đổi đồng thời $OB=OB'$ nên $NA+NB=NA+NB'\ge AB'$

Trình bày lời giải

a) Tự vẽ hình

b) Gọi phương trình đường thẳng (d) tiếp xúc với (P) và song song với (d) là :

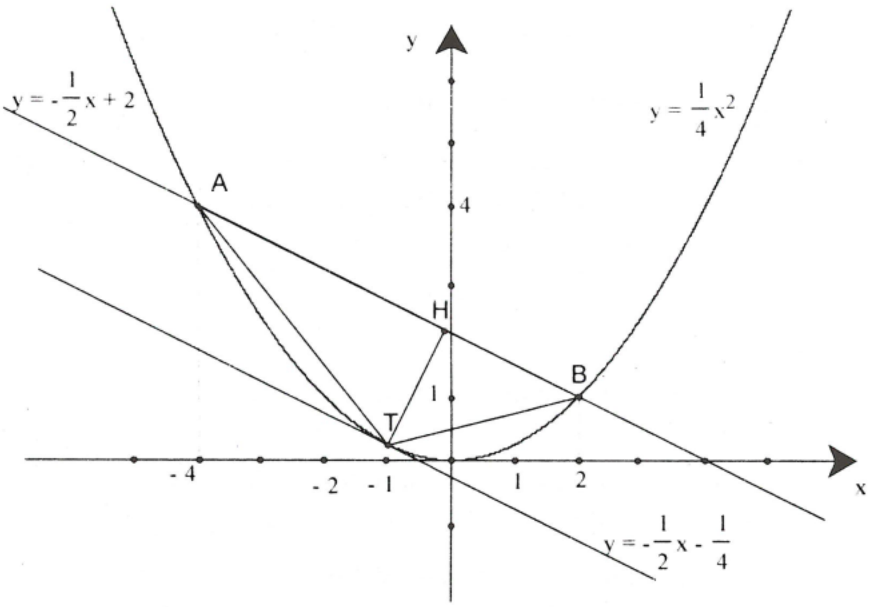
$$y=ax+b$$

Vì $(d')//(d)$ nên : $a=-\frac{1}{2}\Rightarrow(d'):y=-\frac{1}{2}x+b$

(d') tiếp xúc với $(P)\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm

$\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{2}x+b$ hay $x^2+2x-4b=0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow\Delta'=1+4b=0\Leftrightarrow b=-\frac{1}{4}$



Khi đó , phương trình (d') là $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. Tiếp điểm có hoành độ là nghiệm kép của phương trình: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

Tọa độ tiếp điểm là $T\left(-1;\frac{1}{4}\right)$

Kẻ $MH \perp AB$. Ta có : $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MH$. Do đó AB không đổi nên S_{ABM} lớn nhất

$\Leftrightarrow MH$ lớn nhất $\Leftrightarrow M$ trùng với $T \Leftrightarrow M\left(-1;\frac{1}{4}\right)$

c) Tọa độ giao điểm của A và B của (P) và (d) có hoành độ là nghiệm của phương trình : $\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

Suy ra $x_1 = -4; x_2 = 2 \Rightarrow y_1 = 4; y_2 = 1$

Do đó $A(-4;4); B(2;1)$. Lấy B' đối xứng với $B(2;1)$ qua Ox , ta có $B'(2;-1)$ khi đó $NB = NB'$

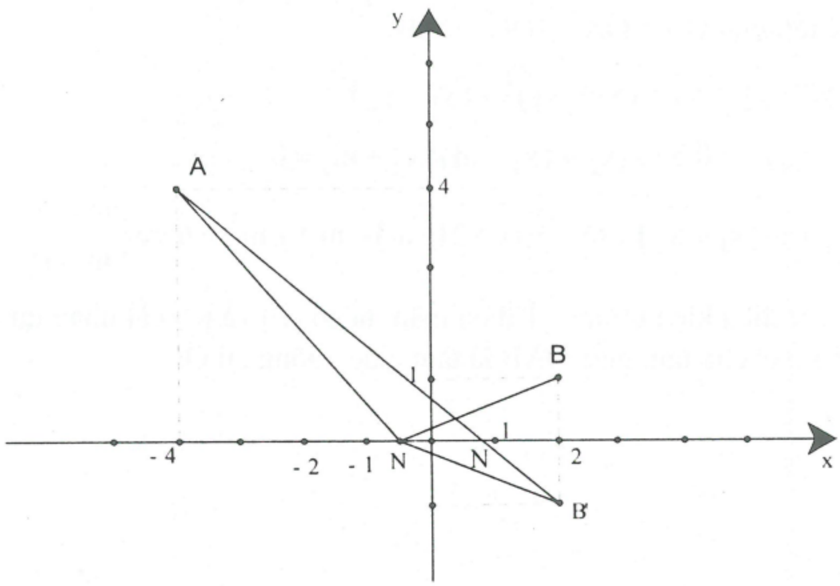
$\Rightarrow NA + NB = NA + NB' \geq AB'$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A, N, B' thẳng hàng . Suy ra điểm N cần tìm chính là giao điểm của AB' và trục Ox . Gọi phương trình của đường thẳng AB' có dạng $y = mx + n$. Do $A(-4;4)$ và $B'(2;-1)$ thuộc đường thẳng nên :

$$\begin{cases}-4m+n=4\\2m+n=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\dfrac{5}{6}\\n=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Phương trình của AB' là : $y=-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{2}{3}$

Suy ra tọa độ của N là nghiệm của hệ : $\begin{cases}y=-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{3}{2}\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{5}\\y=0\end{cases}$ vậy $N\left(\dfrac{4}{5};0\right)$



Ví dụ 5: Cho Parabol$(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=x+m$ với $m\neq 0$.Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB là tam giác vuông tại O

Giải

Tìm cách giải. Những bài toán về tọa độ liên quan đến khoảng cách , góc vuông thông thường chúng ta nghĩ tới vận dụng hệ thức Vi-ét . Do vậy , để giải quyết bài toán này :

- Bước 1.Tìm điều kiện m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt . Tức là phương trình : $x^2=x+m$ có hai nghiệm phân biệt , trong đó nghiệm của phương trình là hoành độ của giao điểm
- Bước 2. Sử dụng định lí đảo Py-ta-go : OAB là tam giác vuông tại O

$\Leftrightarrow OA^2+OB^2=AB^2$

Từ đó chúng ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Gọi $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ thì $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình : $x^2=x+m$

$\Leftrightarrow x^2 - x - m = 0$

(P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1+4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$

Theo hệ thức Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$

Vì $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ thuộc (d) nên:

$y_1 = x_1 + m; y_2 = x_2 + m; y_2 - y_1 = x_2 - x_1$

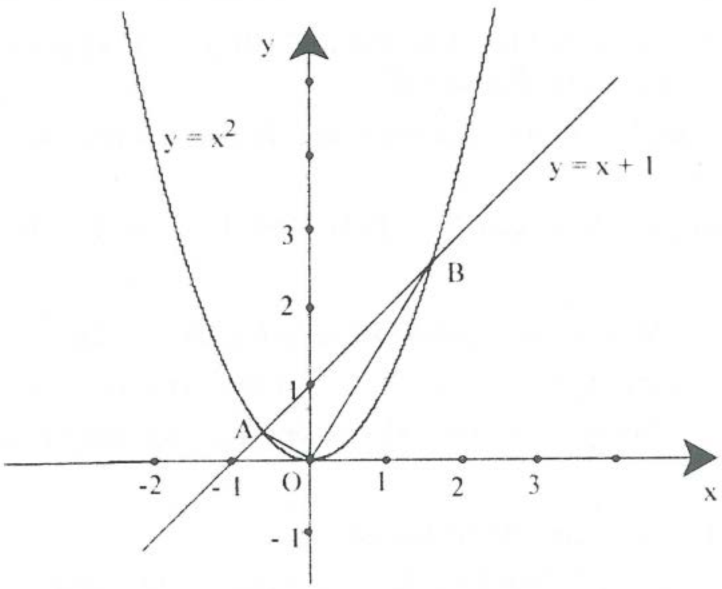
ΔABC vuông tại $O \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + y_2^2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1 + m)(x_2 + m) = 0$

$\Leftrightarrow 2x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow 2(-m) + m.1 + m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện thì $m = 1$ thỏa mãn , ta có (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm A,B phân biệt cho tam giác OAB là tam giác vuông tại O



C. Bài tập vận dụng

20.1. Cho hàm số $y = x^2$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng phương trình $y = x - m$ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $(x_2 - x_1)^4 + (y_2 - y_1)^4 = 18$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Bắc Giang năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Vì $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ thuộc (d) nên:

$$y_1 = x_1 - m; y_2 = x_2 - m; y_2 - y_1 = x_2 - x_1$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $(d): x^2 = x - m \Leftrightarrow x^2 - x + m = 0$

(P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{1}{4}$

Theo hệ thức Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = m \end{cases}$

$(x_2 - x_1)^4 + (y_2 - y_1)^4 = 18 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^4 + (x_2 - x_1)^4 = 18$

$(x_2 - x_1)^4 = 9 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 3 \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 3$

Hay $1 - 4m = 3 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy với $m = -\dfrac{1}{2}$ thì đường thẳng $y = x - \dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt

$A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ thỏa mãn $(x_2 - x_1)^4 + (y_2 - y_1)^4 = 18$

20.2. Cho Parabol (P): $y = -\dfrac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - 2m - 1$ (m là tham số)

a) Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với Parabol (P)

b) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm A cố định thuộc Parabol (P)

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Bình Phước năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đường thẳng (d) tiếp xúc với Parabol $(P) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}x^2 = mx - 2m - 1$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8m - 4 = 0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 + 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

b) Gọi $A(x_0;y_0)$ mà đường thẳng (d) đi qua với mọi $m \Leftrightarrow y_0 = mx_0 - 2m - 1$

$\Leftrightarrow m(x_0 - 2) = y_0 + 1$ đúng với mọi $m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$

Ta có $x_0 = 2, y_0 = -1$ thỏa mãn $y = \dfrac{1}{4}x^2$ nên $A(2;-1)$ thuộc Parabol (P)

20.3. Cho hàm số $y = f(x) = (m^2 + m + 5).x^2$

a) Chứng minh rằng $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trong khoảng $(0;\infty)$

b) Với $m = 0$. Tìm giá trị nguyên của x để $f(x) < 100$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $m^2 + m + 5 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 4\frac{3}{4} > 0$

Nên $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trong khoảng $(0;\infty)$

b) Với $m = 0$ thì $f(x) = 5.x^2 < 100 \Leftrightarrow x^2 < 20$ với x nguyên nên :

$$x \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$$

20.4. Cho đường thẳng $(d): y = mx - m + 2$ (m là tham số) và Parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$

a) Tìm m để đường thẳng (d) và Parabol (P) cùng đi qua điểm có hoành độ $x = 4$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt

c) Giả sử $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$ là tọa độ các giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P). Chứng minh rằng : $y_1 + y_2 \ge \left(2\sqrt{2} - 1\right).(x_1 + x_2)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $x = 4$ thì $y = \frac{4^2}{2} = 8 \Rightarrow I(4;8)$

Điểm I đó thuộc $(d) \Leftrightarrow 8 = 4m - m + 2 \Leftrightarrow m = 2$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$\frac{x^2}{2} = mx - m + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 4 = 0$

Có $\Delta' = m^2 - (2m - 4) = (m - 1)^2 + 3 > 0$ với mọi m, nên phương trình có hai nghiệm phân biệt .

Vì vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

c) $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình : $x^2 - 2mx + 2m - 4 = 0$ theo hệ thức Vi-et:

$$x_1 + x_2 = 2m$$

Do đó: $y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) - 2m + 4 = 2m^2 - 2m + 4$

Nhận thấy : $y_1 + y_2 \geq \left(2\sqrt{2}-1\right).\left(x_1 + x_2\right)$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m + 4 \geq \left(2\sqrt{2}-1\right).2m \Leftrightarrow m^2 - 2\sqrt{2}m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(m-\sqrt{2}\right)^2 \geq 0$

(luôn đúng với mọi m) nên suy ra điều phải chứng minh

20.5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = mx - 1$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng với mọi m, đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B

b) Gọi hoành độ giao điểm của A và B lần lượt là x_1 và x_2 . Chứng minh rằng : $|x_1 - x_2| \geq 2$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Bình Định năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Xét phương trình $-x^2 = mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$ có $\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m

Vậy đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B

b) Theo hệ thức Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$

Xét $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = m^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq 2$

20.6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm $A(-1;1); B(3;9)$ nằm trên (P) . Gọi M là điểm thay đổi trên (P) có hoành độ là $m(-1 < m < 3)$

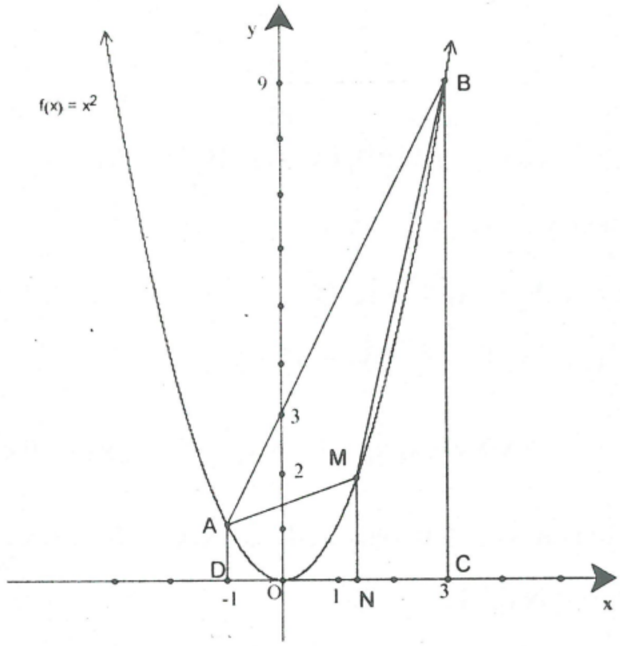
Tìm m để diện tích tam giác AMB lớn nhất

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Thái Bình năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

$M \in P$ có hoành độ là m , suy ra tung độ là m^2

Gọi C, D, N là hình chiếu của B, A, M trên trục hoành thì : $C(3;0), D(-1;0), N(m;0)$



Diện tích hình thang ABCD là : $S = \dfrac{AD + BC}{2} \bullet CD = \dfrac{1+9}{2} \cdot 4 = 20$ (đv.dt)

Diện tích hình thang AMND là: $S_1 = \dfrac{AD + MN}{2} \bullet DN = \dfrac{1+m^2}{2} \cdot (m+1)$ (đv.dt)

Diện tích hình thang BCNM là : $S_2 = \dfrac{BC + MN}{2} \bullet CN = \dfrac{m^2+9}{2} \cdot (3-m)$ (đv.dt)

Suy ra diện tích tam giác AMB là:

$$S_{AMB} = S - S_1 - S_2 = 20 - \frac{(1+m^2)(m+1)}{2} - \frac{(9+m^2)(3-m)}{2}$$

$$S_{ABM} = 6 - 2m^2 + 4m = 8 - 2(m-1)^2 \le 8$$

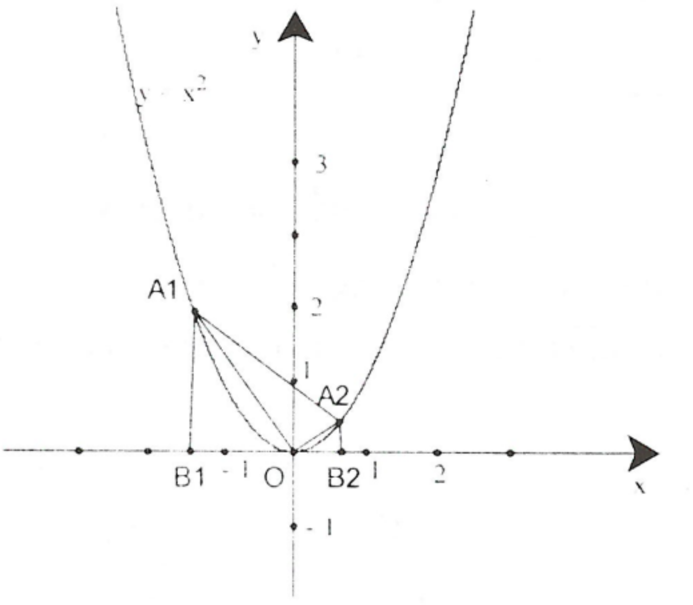
Vậy diện tích tam giác AMB lớn nhất là 8 (đv.dt) khi $m = 1$

20.7. Cho Parabol $(P): y = x^2$. Trên (P) lấy hai điểm $A_1; A_2$ sao cho $\widehat{A_1OA_2} = 90°$ (O là gốc tọa độ).Hình chiếu vuông góc của $A_1; A_2$ trên trục hoành lần lượt là $B_1; B_2$

Chứng minh rằng $OB_1.OB_2 = 1$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Hưng Yên, năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải – đáp số



Đặt $A_1(x_1;y_1);A_2(x_2;y_2)$ thì $B_1(x_1;0);B_2(x_2;0)$

Vì $A_1;A_2 \in P$ nên $y_1 = {x_1}^2; y_2 = {x_2}^2$

$\widehat{A_1OA_2} = 90^\circ \Leftrightarrow {A_1A_2}^2 = A_1O^2 + A_2O^2$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2$

$\Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + {x_1}^2{x_2}^2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2(1 + x_1x_2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1x_2 = 0 \\ 1 + x_1x_2 = 0 \end{array}\right.$

Vì $A_1;A_2$ khác O nên $x_1x_2 = 0$ loại , do đó $1 + x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_1x_2 = -1$

Vậy $OB_1.OB_2 = |x_1|.|x_2| = 1$

Điều phải chứng minh

20.8. Cho Parabol $(P): y = \dfrac{1}{3}x^2$

a) Viết phương trình các tiếp tuyến của (P) , biết các tiếp tuyến này đi qua điểm $A(2;1)$

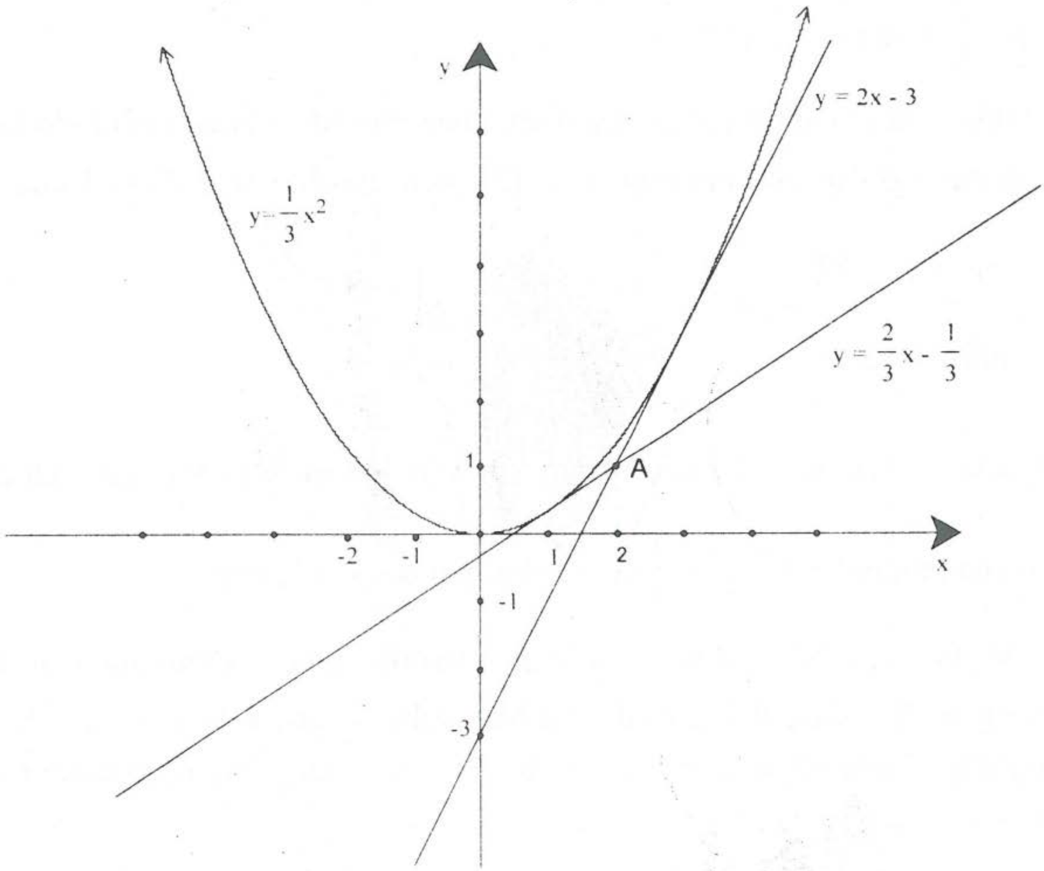
b) Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(2;1)$ và có hệ số góc m . Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N . Khi đó tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng MN khi m thay đổi

c) Tìm quỹ tích các điểm M_0 từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Thừa Thiên Huế, vòng 1, năm học 2004-2005)

Hướng dẫn giải – đáp số

a)



Phương trình đường thẳng d_1 đi qua $A(2;1)$ có dạng

$y=ax+b\Rightarrow 1=2a+b\Rightarrow b=1-2a$ .Do đó $(d_1):y=ax-2a+1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (P) là :

$\frac{1}{3}x^2=ax-2a+1\Leftrightarrow x^2-3ax+6a-3=0$ (1)

d_1 là tiếp tuyến của $(P)\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow\Delta=9a^2-4(6a-3)=0\Leftrightarrow 9a^2-24a+12=0$

$\Leftrightarrow(a-2)(3a-2)=0\Leftrightarrow a_1=2;a_2=\frac{2}{3}$

Vậy từ $A(2;1)$ có hai tiếp tuyến đến (P) là $d_1:y=2x-3;d_2:y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

b) Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(2;1)$ có hệ số góc m là :

$$y=mx+1-2m$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$\frac{1}{3}x^2 = mx - 2m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3mx + 6m - 3 = 0 \ (2)$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 9m^2 - 4(6m-3) > 0$

$\Leftrightarrow 9m^2 - 24m + 12 > 0 \Leftrightarrow 3.(m-2)(3m-2) > 0$

$\Leftrightarrow m < \dfrac{2}{3}$ hoặc $m > 2$ (*)

Với điều kiện (*) , d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M và N có hoành độ là x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình (2) , nên tọa độ trung điểm I của MN là

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{3m}{2} \\ y = mx + 1 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{2x}{3} \\ y = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{4}{3}x + 1 \end{cases}$$

Với $m < \dfrac{2}{3}$ hoặc $m > 2 \Leftrightarrow x < 1; x > 3$. Vậy khi m thay đổi , quỹ tích của I là phần của Parabol $y = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{4}{3}x + 1$, giới hạn bởi $x < 1; x > 3$

c) Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là điểm từ đó có thể vẽ hai tiếp tuyến vuông góc với (P) . Gọi phương trình đường thẳng d đi qua M_0 và hệ số góc k là $y = kx + b$, đường thẳng này đi qua M_0 nên $y_0 = kx_0 + b \Leftrightarrow b = y_0 - kx_0$, suy ra phương trình của $(d'): y = kx - kx_0 + y_0$

Phương trình cho hoành độ giao điểm của d' và (P) là :

$$\frac{1}{3}x^2 = kx - kx_0 + y_0 \Leftrightarrow x^2 - 3kx + 3kx_0 - 3y_0 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 9k^2 - 4(3kx_0 - 3y_0) = 0 \Leftrightarrow 9k^2 - 12kx_0 + 12y_0 = 0$ (**)

Để từ M_0 có thể kẻ hai tiếp tuyến vuông góc tới (P) thì phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt $k_1; k_2$ và $k_1k_2 = -1 \Leftrightarrow \dfrac{12y_0}{9} = -1 \Leftrightarrow y_0 = -\dfrac{3}{4}$

Vậy quĩ tích các điểm M_0 , từ đó có thể vẽ được hai tiếp tuyến vuông góc với (P) là đường thẳng $y = -\dfrac{3}{4}$

20.9. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x}{4}$

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số

b) Viết phương trình các đường tiếp tuyến từ điểm $A(2;-2)$ đến P

c) Tìm tập hợp các điểm mà qua đó có hai tiếp tuyến vuông góc đến (P)

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 , TP Hờ Chí Minh, năm học 1992-1993)

Hướng dẫn giải – đáp số

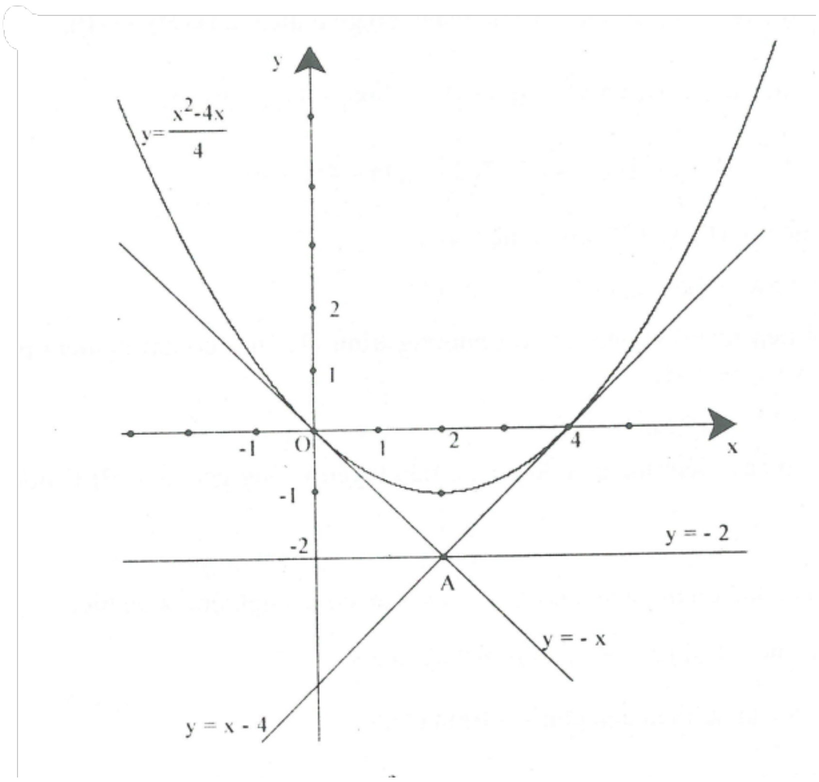
a) $(P): y = \frac{1}{4}x^2 - x$

TXĐ: R

Bảng giá trị

x	-2	0	2	4	6
y	3	0	-1	0	3

Vẽ:



Nhận xét : Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{4}$ là một đường cong Parabol có đỉnh $(2;-1)$

Và đi qua các điểm $(-2;3);(0;0);(4;0);(6;3)$

b)Phương trình đường thẳng (d) cần tìm có dạng $y = ax + b$

$A \in (d) \Rightarrow -2 = 2a + b \Rightarrow b = -2a - 2$

$(d): y = ax - 2a - 2$. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$\frac{x^2 - 4x}{4} = ax - 2a - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4(a+1)x + 8a + 8 = 0$ (*)

Xét $\Delta' = 4.(a+1)^2 - (8a+8) = 4a^2 - 4$

(d) tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow (*)$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$

$a = 1$ thì $b = -2a - 2 = -4$

$a = -1$ thì $b = -2a - 2 = 0$

Vậy qua A có hai tiếp tuyến với (P) và phương trình là: $y = x - 4; y = -x$

c)Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc tập hợp điểm cần tìm . Phương trình đường thẳng (D) qua M có dạng $y = ax + b$

$M \in (D) \Leftrightarrow y_0 = ax_0 + b \Leftrightarrow b = -ax_0 + y_0$

$(D): y = ax - ax_0 + y_0$. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) :

$\frac{x^2 - 4x}{4} = ax - ax_0 + y_0 \Leftrightarrow x^2 - 4(a+1)x + 4ax_0 - 4y_0 = 0(**)$

$\Delta' = 4(a+1)^2 - 4ax_0 + 4y_0 = 4a^2 + 4(2 - x_0)a + 4y_0 + 4$

(D) tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow (**)$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a^2 + (2 - x_0)a + y_0 + 1 = 0$ (1)

Để có hai tiếp tuyến vuông góc thì phương trình (1) ẩn a có hai nghiệm phân biệt $a_1; a_2$ và $a_1.a_2 = -1$

Do đó $y_0 + 1 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$

Vậy tập hợp các điểm mà qua đó có hai tiếp tuyến vuông góc đến (P) là đường thẳng $y = -2$

20.10. Tìm m để đường thẳng $(d): y = x + m$ cắt đồ thị $y = x^2 (P)$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho : $(x_2 - x_1)^{2014} + (y_2 - y_1)^{2014} = 2$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Thanh Hóa, năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

(P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 = x + m$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - x - m = 0$ (1) có $\Delta = 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$

Khi ấy $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (1)

Theo hệ thức Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1.x_2 = -m \end{cases}$

Ta có : $y_1 = x_1 + m, y_2 = x_2 + m \Rightarrow y_2 - y_1 = x_2 - x_1$

$(x_2 - x_1)^{2014} + (y_2 - y_1)^{2014} = 2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^{2014} + (x_2 - x_1)^{2014} = 2$

$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^{2014} = 1 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_2x_1 = 1 \Leftrightarrow 1 + 4m = 1$

$\Leftrightarrow m = 0$ thỏa mãn

Vậy với $m = 0$ thì (P) cắt (d) thỏa mãn điều kiện đề bài

20.11. một xe tải có chiều rộng $2,4$m và chiều cao $2,5$m muốn đi qua một cái cổng có hình parabol . Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh parabol) tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$m (bỏ qua độ dầy của cổng)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi parabol $(P) \, y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua . Chứng minh $a = -1$

b) Hỏi xe tải có thể qua cổng được không ? Tại sao ?

(tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên , Đại học sư phạm Hà Nội , năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Giả sử trên mặt phẳng tọa độ , độ dài các đoạn thẳng được tính theo đơn vị mét .

Do khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 4 m nên $MA = NA = 2$

Từ giả thiết ta có: $OM = ON = 2\sqrt{5}$, do đó theo định lý Py-ta-go có $OA = 4$

Vậy $M(2;-4), N(-2;-4)$

Mặt khác , do M, N thuộc Parabol nên $-4 = a.2^2 \Rightarrow a = -1$

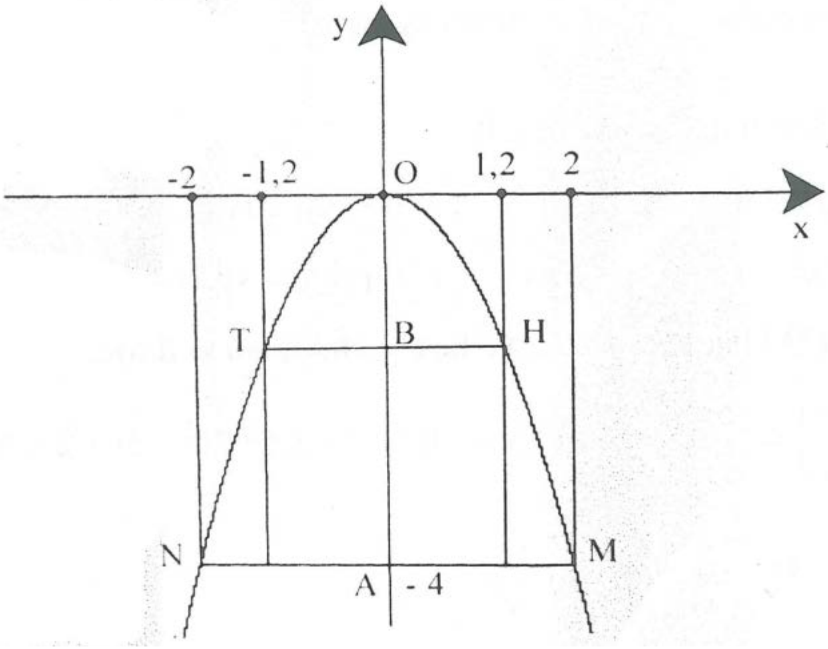
và $(P): y = -x^2$

b) Để đáp ứng được chiều cao , trước hết xe tải phải chọn phương án đi vào chính giữa cổng

Trên Parabol (P) xét hai điểm $H\left(\frac{6}{5}; -\frac{36}{25}\right)$ và $T\left(-\frac{6}{5}; -\frac{36}{25}\right)$ đối xứng nhau qua Oy và $HT = 2,4$ (ứng với chiều cao của xe tải)

Gọi B là giao điểm của HT và trục tung . Khi đó $AB = \frac{64}{25} > 2,5$

Do đó xe tải có thể đi qua cổng



20.12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho parabol $(P): y = x^2$ cắt đường thẳng $d: y = mx - 2$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_1 = 2(x_1 + x_1) - 1$

(Tuyển sinh vào lớp 10 , THPT chuyên , tỉnh Ninh Bình, năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

(P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 = mx - 2$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - mx + 2 = 0$ (1) có $\Delta = m^2 > 8 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{8}$

Khi ấy $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (1)

Theo hệ thức Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$

Ta có : $y_1 = mx_1 - 2, y_2 = mx_2 - 2$

$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 1 \Leftrightarrow m(x_1 + x_2) - 4 = 2(x_1 + x_2) - 1 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 2m - 1$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \end{array}\right.$

Ta có $m = 3$ thỏa mãn điều kiện

Vậy với $m = 3$ thì (P) cắt (d) tại điểm thỏa mãn điều kiện đề bài

Chương HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

Chuyên đề 21

A. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên , Đại học Quốc Gia Hà Nội, năm học 2014-2015)

Giải

- Xét $x = 0$ ta có hệ $\begin{cases} y^2 = 1 \\ y^2 = 2 \end{cases}$ hệ vô nghiệm
- Xét $y = 0$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases}$ hệ vô nghiệm
- Vậy $x; y$ khác 0 đặt $x = ty; t \neq 0$

Ta có hệ $\begin{cases} t^2y^2 - ty^2 + y^2 = 1 \\ t^2y^2 + ty^2 + 2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\left(t^2 - t + 1\right) = 1 \\ y^2\left(t^2 + t + 2\right) = 4 \end{cases}$ (*)

Vì mỗi vế hệ (*) khác 0 ta chia 2 vế hệ (*) cho nhau ta được :

$$\frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4t^2 - 4t + 4 = t^2 + t + 2 \Leftrightarrow 3t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(3t-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

_ Với $t = 1 \Rightarrow x = y$ thay vào hệ (*) ta được : $\begin{cases} y^2 = 1 \\ 4y^2 = 4 \end{cases}$ giải ra ta có nghiệm $(x; y) \in \{(1;1); (-1;-1)\}$

_ Với $t = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}y$ thay vào hệ (*) ta được:

$$\begin{cases} \frac{4}{9}y^2 - \frac{2}{3}y^2 + y^2 = 1 \\ \frac{4}{9}y^2 + \frac{2}{3}y^2 + 2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{9}y^2 = 1 \\ \frac{28}{9}y^2 = 4 \end{cases}$$

Giải ra ta có nghiệm $(x; y) \in \left\{\left(\frac{2\sqrt{7}}{9}; \frac{\sqrt{7}}{3}\right); \left(-\frac{2\sqrt{7}}{9}; -\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right\}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là :

$$(x;y)\in\left\{(1;1);(-1;-1);\left(\frac{2\sqrt{7}}{9};\frac{\sqrt{7}}{3}\right);\left(-\frac{2\sqrt{7}}{9};-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right\}$$

Nhận xét . Hệ phương trình trên là hệ phương trình đẳng cấp bậc hai . Ngoài cách giải trên , chúng ta còn có thể đồng nhất hai phương trình , bằng cách nhân phương trình (1) với 4 rồi vế trừ vế . Ta được phương trình: $3x^2-5xy+2y^2=0$, sau đó phân tích đa thức thành nhân tử

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh An Giang , năm học 2008-2009)

Giải

Đặt $x+y=u; xy=v$ hệ phương trình có dạng : $\begin{cases} u^2-2v+u=8(1) \\ u^2-v=7(2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có : $v=u^2-7$ thay vào phương trình (1) ta được:

$u^2-2(u^2-7)+u=8 \Leftrightarrow u^2-u-6=0$. Giải ra ta được $u_1=-2; u_2=3$

- Trường hợp 1. Xét $u=-2$ suy ra $v=(-2)^2-7=-3$

Ta được : $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-3 \end{cases}$. Suy ra x,y là nghiệm của phương trình

$X^2+2X-3=0$. Giải ra ta được : $X_1=1; X_2=-3$

Do đó nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}; \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

- Trường hợp 2 . $u=-3; v=(-3)^2-7=2$, ta được $\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}$

Suy ra $x;y$ là nghiệm của phương trình : $X^2+3X-2=0$

Giải ra ta được $X_1=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}; X_2=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$

Do đó nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}; \begin{cases} x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

$$\left(x;y\right)\in\left\{(1;-3);(-3;1);\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2};\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$$

Nhận xét . Hệ phương trình trên là hệ phương trình đối xứng loại một . Hệ phương trình đối xứng loại một là hệ phương trình nếu đổi vai trò của ẩn cho nhau thì mỗi phương trình không thay đổi . Để giải hệ phương trình dạng này, chúng ta thường đặt ẩn phụ $x+y=u;xy=v$. Sau đó giải hệ phương trình này.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^3+1=2\left(x^2-x+y\right)(1)\\ y^3+1=2\left(y^2-y+x\right)(2)\end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Tiền Giang , năm học 2011-2012)

Giải

Từ phương trình (1) và (2) vế trừ vế ta được:

$x^3-y^3=2\left(x^2-y^2\right)-4\left(x-y\right)\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2-2\left(x+y\right)+4\right)=0$

Ta có : $x^2+xy+y^2-2\left(x+y\right)+4=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{3\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2}{4}-2\left(x+y\right)+4=0$

$\Leftrightarrow3\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2-8\left(x+y\right)+16=0$

$\Leftrightarrow2\left(x+y\right)^2-8\left(x+y\right)+8+\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2+8=0$

$\Leftrightarrow2\left(x+y-2\right)^2+\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2+8=0$

Phương trình vô nghiệm , nên $x-y=0$, thay vào phương trình (1) ta được:

$x^3+1=2x^2\Leftrightarrow x^3-2x^2+1=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2-x-1\right)=0$

- Trường hợp 1: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$
- Trường hợp 2: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ Giải ra ta được $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là :

$$\left(x;y\right)\in\left\{(1;1);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

Nhận xét . Hệ phương trình trên là hệ phương trình đối xứng loại hai . Hệ phương trình đối xứng loại hai là hệ phương trình nếu đổi vai trò của ẩn cho nhau thì phương trình này thành phương trình kia và ngược lại . Để giải hệ phương trình dạng này, chúng ta lấy vế trừ vế rồi phân tích đa thức thành nhân tử phương trình vừa nhận được .

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ xy+3y^2+x=3 \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 , tỉnh Hải Dương , năm học 2011-2012)

Giải

Tìm cách giải . Quan sát kỹ mỗi phương trình, ta nhận thấy phương trình thứ nhất, vế trái phân tích đa thức thành nhân tử được . Từ đó chúng ta có thể đưa về

hệ phương trình tích : $\begin{cases} A.B=0 \\ C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases} \\ \begin{cases} B=0 \\ C=0 \end{cases} \end{array}\right.$

Các nghiệm của hai hệ phương trình sau là nghiệm của hệ phương trình đã cho

Trình bày lời giải

$$\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ xy+3y^2+x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+2y)=0 \\ xy+3y^2+x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ xy+3y^2+x=0 \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} x+2y=0 \\ xy+3y^2+x=3 \end{cases}$

- Giải hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ xy+3y^2+x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2+3x^2+x=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 4x^2+x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

- Giải hệ $\begin{cases} x+2y=0 \\ xy+3y^2+x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ -2y^2+3y^2-2y=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ y^2-2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=-6 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $(x;y) \in \left\{(-1;-1);\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right);(2;-1);(-6;3)\right\}$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=11 \\ x^2y^2+2x^2y+2xy^2+4xy=24 \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 , tỉnh Quảng Ngãi , năm học 2012-2013)

Giải

Tìm cách giải. Hệ phương trình này là hệ phương trình đối xứng loại một nên chúng ta có thể giải như ví dụ 2. Tuy nhiên chúng ta nhận thấy vế trái của phương trình hai phân tích thành nhân tử được mà tổng hai nhân tử chính là vế trái của phương trfinh thứu nhất . Nên chúng ta dùng cách đặt ẩn phụ khác cho lời giả ngắn gọn và hay hơn

Trình bày lời giải

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=11 \\ x^2y^2+2x^2y+2xy^2+4xy=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+2x\right)+\left(y^2+2y\right)=11 \\ \left(x^2+2x\right)\left(y^2+2y\right)=24 \end{cases}$$

Đặt : $x^2+2x=u, y^2+2y=v$. Hệ phương trình có dạng : $\begin{cases} u+v=11 \\ uv=24 \end{cases}$. Suy ra u,v là nghiệm của phương trình: $X^2-11X+24=0$

Giải phương trình , ta được : $X_1=3, X_2=8$

Suy ra : $\begin{cases} u=3 \\ v=8 \end{cases}; \begin{cases} u=8 \\ v=3 \end{cases}$

Truờn hợp 1. Xét $\begin{cases} u=3 \\ v=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x=3 \\ y^2+2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2=4 \\ (y+1)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=\pm 2 \\ y+1=\pm 3 \end{cases}$

Suy ra nghiệm của phương trình : $(x;y) \in \left\{(1;2),(1;-4),(-3;2),(-3;-4)\right\}$

Trường hợp 2 . Xét $\begin{cases} u=8 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x=8 \\ y^2+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2=9 \\ (y+1)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=\pm 3 \\ y+1=\pm 2 \end{cases}$

Suy ra nghiệm của phương trình : $(x;y) \in \left\{(2;1),(2;-3),(-4;1),(-4;-3)\right\}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là :

$(x;y) \in \left\{(1;2),(1;-4),(-3;2),(-3;-4),(2;1),(2;-3),(-4;1),(-4;-3)\right\}$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{y^2-3x}+\sqrt{x^2+8y}=5 \\ x(x-3)+y(y+8)=13 \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 , tỉnh Nam Định , năm học 2011-2012)

Giải

$$\begin{cases}\sqrt{y^2-3x}+\sqrt{x^2+8y}=5\\ x(x-3)+y(y+8)=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{y^2-3x}+\sqrt{x^2+8y}=5\\ \left(y^2-3x\right)+\left(x^2+8y\right)=13\end{cases}$$

Đặt $\sqrt{y^2-3x}=u;\sqrt{x^2+8y}=v\left(u\ge 0;v\ge 0\right)$

Hệ phương trình có dạng $\begin{cases}u+v=5\\ u^2+v^2=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=5-u\\ u^2+(5-u)^2=13\end{cases}$

$$\begin{cases}v=5-u\\ u^2-5u+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=2\\ v=3\end{cases};\begin{cases}u=3\\ v=2\end{cases}$$

- ***Trường hợp 1.*** Xét $\begin{cases}u=2\\ v=3\end{cases}$ ta có $\begin{cases}\sqrt{y^2-3x}=2\\ \sqrt{x^2+8y}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2-3x=4(1)\\ x^2+8y=9(2)\end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $x=\dfrac{y^2-4}{3}$ thay vào phương trình (2) ta được :

$$\left(\frac{y^2-4}{3}\right)^2+8y=9 \Leftrightarrow y^4-8y^2+72y-65=0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y+5)(y-2)(y-3)=0$$

* Với $y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=\dfrac{1^2-4}{3}=-1$

* Với $y+5=0 \Rightarrow y=-5 \Rightarrow x=\dfrac{(-5)^2-4}{3}=7$

* Với $y-2=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=\dfrac{2^2-4}{3}=0$

* Với $y-3=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=\dfrac{3^2-4}{3}=\dfrac{5}{3}$

- ***Trường hợp 2 .*** Xét $\begin{cases}u=3\\ v=2\end{cases}$ ta có $\begin{cases}\sqrt{y^2-3x}=3\\ \sqrt{x^2+8y}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2-3x=9(3)\\ x^2+8y=4(4)\end{cases}$

Từ phương trình (3) suy ra : $x=\dfrac{y^2-9}{3}$, thay vào phườn trình (4) , ta được :

$$\frac{y^4-18y^2+81}{9}+8y=4 \Leftrightarrow y^4-18y^2+72y+45=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2-6y+15\right)\left(y^2-6y+3\right)=0$$

Xét $y^2-6y+15=0$, phương trình vô nghiệm

Xét $y^2-6y+3=0$, giải ra ta được : $y_1=3-\sqrt{6}; y_1=3+\sqrt{6}$ từ đó tìm được : $x_1=-2\sqrt{6}; x_2=2\sqrt{6}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là :

$$(x;y)\in\left\{(-1;1),(7;-5),(0;2),\left(\frac{5}{3};3\right),\left(-2\sqrt{6};3-\sqrt{6}\right),\left(2\sqrt{6};3+\sqrt{6}\right)\right\}$$

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+4=0 \\ xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-4=0 \end{cases}$

Giải

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+4=0 \\ xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)+4=0 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right).\left(y+\dfrac{1}{y}\right)-4=0 \end{cases}$$

Đặt $u=x+\dfrac{1}{x}; v=y+\dfrac{1}{y}$ hệ phương trình có dạng $\begin{cases} u+v+4=0 \\ u.v-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=-4 \\ uv=4 \end{cases}$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình $X^2+4X+4=0$

Giải ra ta được $X_1=X_2=-2$

Suy ra $u=v=-2$. Do đó $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=-2 \\ y+\dfrac{1}{y}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+1=0 \\ y^2+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-1;-1)$

B. Bài tập vận dụng

21.1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1 \\ 3x^2-xy+3y^2=13 \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 , tỉnh Nghệ An , năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

- Xét $x=0$ ta có hệ $\begin{cases} y^2=-1 \\ 3y^2=13 \end{cases}$ hệ vô nghiệm

- Xét $y=0$ ta có hệ $\begin{cases} x^2=-1 \\ 3x^2=13 \end{cases}$ hệ vô nghiệm

- Vậy $x;y$ khác 0 đặt $x=ty;t\neq 0$

Ta có hệ $\begin{cases} t^2y^2-3ty^2+y^2=-1 \\ 3t^2y^2-ty^2+3y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\left(t^2-3t+1\right)=-1 \\ y^2\left(3t^2-t+3\right)=13 \end{cases}$ (*)

Vì mỗi vế hệ (*) khác 0 ta chia vế hệ (*) cho nhau ta được :

$$\frac{t^2-3t+1}{3t^2-t+3}=\frac{-1}{13} \Leftrightarrow 13t^2-39t+13=-3t^2+t-3 \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(2t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Với $t=2 \Rightarrow x=2y$ thay vào hệ (*) ta được : $\begin{cases} -y^2=-1 \\ 13y^2=13 \end{cases}$

Giải ra ta có nghiệm $(x;y)\in\{(2;1);(-2;-1)\}$

- Với $t=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}y$ thay vào hệ (*) ta được :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{3}{2}y^2+y^2=-1 \\ \dfrac{3}{4}y^2-\dfrac{1}{2}y^2+3y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{4}y^2=-1 \\ \dfrac{13}{4}y^2=13 \end{cases}$$

Giải ra ta có nghiệm $(x;y)\in\{(1;2);(-1;-2)\}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là : $(x;y)\in\{(2;1);(-2;-1);(1;2);(-1;-2)\}$

21.2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3=2x+y(1) \\ y^3=2y+x(2) \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 , tỉnh Hải Dương , năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ phương trình (1) và (2) vế trừ vế ta được :

$$x^3-y^3=x-y \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2-1\right)=0$$

- ***Trường hợp 1*** **.** Xét $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$ thế vào phương trình (1) ta có :

$$x^3=2x+x \Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)=0 \text{ suy ra } x=0;x=\sqrt{3};x=-\sqrt{3}$$

- ***Trường hợp 2.*** Xét $x^2+xy+y^2-1=0$

Từ phương trình (1), (2) cộng vế với vế ta được

$x^3+y^3=3(x+y)\Leftrightarrow(x+y)(x^2-xy+y^2-3)=0$

Xét $\begin{cases}x+y=0\\x^2+xy+y^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\x^2-x^2+x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\x^2=1\end{cases};\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

Xét $\begin{cases}x^2-xy+y^2-3=0\\x^2+xy+y^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-xy+y^2-3=0\\3x^2+3xy+3y^2-3=0\end{cases}$

Vế trừ vế ta được : $2(x^2+2xy+y^2)=0\Leftrightarrow x=-y$

Giải như trên ta được $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases};\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là :

$$(x;y)\in\left\{(0;0);(\sqrt{3};\sqrt{3});(-\sqrt{3};\sqrt{3});(1;-1);(-1;1)\right\}$$

21.3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x+2y=5(1)\\x^2+2y^2-2xy=5(2)\end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ phương trình (1) suy ra $x=5-2y$, thế vào phương trình (2) ta được :

$(5-2y)^2+2y^2-2y(5-2y)=5\Leftrightarrow y^2-3y+2=0$

Giải ra ta được $y_1=1;y_2=2$

- Với $y=1$ ta được $x=5-2.1=3$
- Với $y=2$ ta được $x=5-2.2=1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\{(3;1);(1;2)\}$

21.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=2xy+1\\x^3-y^3=2xy+3\end{cases}$

Hướng dẫn giải – đáp số

$\begin{cases}x^2+y^2=2xy+1\\x^3-y^3=2xy+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=1\\x^3-y^3=1xy+3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x-y=-1\\x^3-y^3=2xy+3\end{cases}$

- ***Trường hợp 1:*** Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-y=1(1)\\x^3-y^3=2xy+3(2)\end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $x = y+1$ thay vào phương trình (2) ta được :

$(y+1)^3 - y^3 = 2y(y+1)+3 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0$

Giải ra ta được $y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2; y_2 = -2 \Rightarrow x_2 = -1$

• ***Trường hợp 2 :*** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = -1(3) \\ x^3 - y^3 = 2xy + 3(4) \end{cases}$

Từ phương trình (3) ta có $x = y-1$ thay vào phương trình (4) ta được

$(y-1)^3 - y^3 = 2y(y-1)+3 \Leftrightarrow 5y^2 + 4 = 0$ phương trình vô nghiệm

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) \in \{(1;2);(-2;-1)\}$

21.5. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 4xy + 4(x^2+y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = \dfrac{85}{3} \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{13}{3} \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi , Tỉnh Thái Bình , năm học 2009-2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2+y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = \dfrac{85}{3} \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \dfrac{3}{(x+y)^2} = \dfrac{85}{3} \\ (x+y)+(x-y) + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{13}{3} \end{cases}$$

Đặt $x + y = u; x - y = v$ hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} 3u^2 + v^2 + \dfrac{3}{u^2} = \dfrac{85}{3} \\ u + v + \dfrac{1}{u} = \dfrac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(u + \dfrac{1}{u}\right)^2 + v^2 = \dfrac{103}{3}(1) \\ u + \dfrac{1}{u} = \dfrac{13}{3} - v(2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) thay vào phương trình (1) ta được

$$3\left(\frac{13}{3} - v\right)^2 + v^2 = \frac{103}{3} \Leftrightarrow 2v^2 - 13v + 11 = 0$$

Giải ra ta được $v_1 = 1; v_2 = \dfrac{11}{2}$

• ***Trường hợp 1 :*** Xét $v = 1 \Rightarrow u + \dfrac{1}{u} = \dfrac{13}{3} - 1 \Leftrightarrow 3u^2 - 10u + 3 = 0$. Giải ra ta được $u_1 = 3; u_2 = \dfrac{1}{3}$

- Xét $\begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

- Xét $\begin{cases} u = \dfrac{1}{3} \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{1}{3} \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

- ***Trường hợp 2:*** Xét $v = \dfrac{11}{2}$ ta có $u + \dfrac{1}{u} = \dfrac{13}{3} - \dfrac{11}{2}$

$\Leftrightarrow 6u^2 + 7u + 6 = 0$ phương trình này vô nghiệm

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) \in \left\{(2;1); \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)\right\}$

21.6. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \\ (x + y)(xy - 1) = 3 \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi toán 9, tỉnh Thanh Hóa , năm học 2008-2009)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{cases} x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = 10 \\ (x + y)(xy - 1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 + (xy - 1)^2 = 10 \\ (x + y)(xy - 1) = 3 \end{cases}$$

Đặt $u = x + y; v = xy - 1$ hệ phương trình có dạng :

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 + 2uv = 16 \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u + v)^2 = 16 \\ uv = 3 \end{cases}$$

- ***Trường hợp 1.*** Xét $\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3 \end{cases}$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình $X^2 - 4X + 3 = 0(1)$

Phương trình (1) có nghiệm $X_1 = 1; X_2 = 3$. Suy ra $\begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases}; \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}$

_ Xét $\begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 4 \end{cases}$

Suy ra x; y là nghiệm của phương trình $X^2 - X + 4 = 0(2)$ phương trình (2) vô nghiệm

_ Xét $\begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

Suy ra x; y là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0(3)$

Phương trình (3) có nghiệm $X_1 = 1; X_2 = 2$ suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

- ***Trường hợp 2.*** Xét $\begin{cases} u + v = -4 \\ u.v = 3 \end{cases}$

Suy ra u; v là nghiệm của phương trình $X^2 + 4X + 3 = 0(4)$ phương trình (4) có nghiệm là : $X_1 = -1; X_2 = -3$. Suy ra $\begin{cases} u = -1 \\ v = -3 \end{cases}; \begin{cases} u = -3 \\ v = -1 \end{cases}$

_ Xét $\begin{cases} u = -1 \\ v = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ xy - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + X - 2 = 0(5)$

Giải phương trình (5) ta được $X_1 = 1; X_2 = -2$

Suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

_ Xét $\begin{cases} u = -3 \\ v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ xy - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 0 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là:

$$(x; y) \in \{(2;1);(1;2);(1;-2);(-2;1);(0;-3);(-3;0)\}$$

21.7. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{y^2} = 7 \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 , tỉnh Hà Tĩnh , năm học 2007-2008)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{y^2} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{x}\right) + \left(y + \dfrac{2}{y}\right) = 5 \\ \left(x^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) + \left(y^2 + \dfrac{4}{y^2}\right) = 7 \end{cases}$$

Đặt $u = 1 + \dfrac{1}{x}; v = y + \dfrac{2}{y}$

Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} u+v=5 \\ u^2-2+v^2-4=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5(1) \\ u^2+v^2=13(2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $u=5-v$ thay vào phương trình (2) ta được $v_1=2; v_2=3$

- Với $v=2 \Rightarrow u=3$ ta có $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y+\dfrac{y}{2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ y^2-3y+2=0 \end{cases}$

Giải hệ có nghiệm $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

- Với $v=3$ thì $u=2$ ta có $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=3 \\ y+\dfrac{2}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1=0 \\ y^2-2y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1=0 \\ (y-1)^2+1=0 \end{cases}$

vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là : $(x;y) \in \{(1;1);(1;2)\}$

21.8. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2}(1) \\ xy+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{5}{2}(2) \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9,tỉnh Quãng Ngãi , năm học 2009-2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ phương trình (2) ta có :

$$2(xy)^2-5xy+2=0 \Leftrightarrow (2xy-1)(xy-2)=0 \Leftrightarrow xy=\frac{1}{2}; xy=2$$

- ***Trường hợp 1.*** Xét $xy=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1}{2x}$ thay vào phương trình (1) ta được :

$$x+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}+2x=\frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0$$

Giải ra ta được : $x_1=1 \Rightarrow y_1=\dfrac{1}{2}; x_2=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_2=1$

- ***Trường hợp 2 .*** Xét $xy=2 \Rightarrow y=\dfrac{2}{x}$

Thay vào (1) ta có $x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$

Giải ra ta được $x_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 3; x_4 = 2; y_4 = 1$

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $(x;y) \in \left\{\left(1;\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};1\right);(1;2);(2;1)\right\}$

21.9. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+4\sqrt{xy}=16 \\ x+y=10 \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9 , tỉnh Hải Dương , năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Điều kiện $x \ge 0; y \ge 0$

Đặt $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}; v=\sqrt{xy}$ với $u \ge 0; v \ge 0$

Hệ phương trình có dạng : $\begin{cases} u+4v=16(1) \\ u^2-2v=10(2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) suy ra $v=\frac{16-u}{4}$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$u^2-2\left(\frac{16-u}{4}\right)=10 \Leftrightarrow 2u^2+u-36=0$$

Giải phương trình ta được : $u_1=-\frac{9}{2}$(loại)

$u_2=4$ (thỏa mãn)

Với $u=4 \Rightarrow v=3$. Suy ra $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \\ \sqrt{xy}=3 \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{x};\sqrt{y}$ là nghiệm của phương trình $X^2-4X+3=0$

Giải ra ta được : $X_1=1; X_2=3$

Suy ra : $\begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{y}=3 \end{cases};\begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{y}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases};\begin{cases} x=9 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $(x;y) \in \{(1;9);(9;1)\}$

21.10. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2-y^2=1(1) \\ xy+x^2=2(2) \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Phú Thọ , năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{cases}2x^2-y^2=1(1)\\xy+x^2=2(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-2y^2=2\\xy+x^2=2\end{cases}$$

Suy ra : $4x^2-2y^2=xy+x^2\Leftrightarrow 3x^2-xy-2y^2=0$

$$\Leftrightarrow(x-y)(3x+2y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\\3x+2y=0\end{array}\right.$$

- ***Trường hợp 1.*** Xét $x-y=0\Leftrightarrow x=y$ thay vào phương trình (1) ta được:

$2x^2-y^2=1\Leftrightarrow x=\pm1; y=\pm1$

- ***Trường hợp 2 .*** $3x+2y=0\Leftrightarrow y=\dfrac{-3x}{2}$ thay vào (1)

$2x^2-\dfrac{9x^2}{4}=1\Leftrightarrow-\dfrac{x^2}{4}=1$ vô nghiệm

Thử lại hệ phương trình

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(x;y)\in\{(1;1);(-1;-1)\}$

21.11. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2(x+y)=3\left(\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}\right)\\\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6\end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 , tỉnh Hải Dương , năm học 2009-2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $\sqrt[3]{x}=a;\sqrt[3]{y}=b$, hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases}2(a^3+b^3)=3(a^2b+ab^2)\\a+b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(a+b)(a^2-ab+b^2)-3ab(a+b)=0\\a+b=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(a^2+b^2)-5ab=0\\a+b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(a+b)^2-9ab=0\\a+b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=6\\ab=8\end{cases}$$

Suy ra a; b là nghiệm của hệ phương trình $X^2-6X+8=0$. Giải ra ta được

$X_1=2;X_2=4$ do đó $\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases};\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$

- Với $\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x}=2\\\sqrt[3]{y}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\y=64\end{cases}$

- Với $\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x}=4\\\sqrt[3]{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=64\\y=8\end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã có cho nghiệm $(x;y)$ là $(8;64);(64;8)$

21.12. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3x^2+xy-4x+2y=2 \\ x(x+1)+y(y+1)=4 \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9 , tỉnh Hải Dương , năm hcoj 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{cases} 3x^2+xy-4x+2y=2 \\ x(x+1)+y(y+1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+xy-4x+2y-2=0 \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0 \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases}$$

Ta có : $2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0 \Leftrightarrow (y+x-2)(y-2x+1)=0$

$\Leftrightarrow y=2-x$ hoặc $y=2x-1$

- Với $y=2-x$ thay vào (2) ta được : $x^2-2x+1=0$ suy ra $x=1$

Ta được nghiệm $(1;1)$

- Với $y=2x-1$ thay vào (2) ta được : $5x^2-x-4=0$, suy ra $x=1; x=\frac{-4}{5}$

Ta tính được nghiệm $(1;1)$ và $\left(\frac{-4}{5};\frac{-13}{5}\right)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(1;1)$ và $\left(\frac{-4}{5};\frac{-13}{5}\right)$

21.13. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2=2x^2y^2 \\ (x+y)(1+xy)=4x^2y^2 \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 , tỉnh Thanh Hóa , năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

- Với $x=y=0$ là nghiệm của hệ phương trình
- Nhận thấy nếu $x \neq 0$ thì $y \neq 0$ và ngược lại

Xét $x \neq 0; y \neq 0$ hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2(1) \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{2}{xy}\right)=8(2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^3=8\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2\\\frac{1}{xy}=1\end{cases}\Rightarrow x=y=1$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)$ là $(0;0);(1;1)$

21.14. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x\left(x+\frac{4}{y}\right)+\frac{1}{y^2}=2\\x\left(2+\frac{1}{y}\right)+\frac{2}{y}=3\end{cases}$

(Tuyển sinh lớp 10 , THPT chuyên , Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $\begin{cases}x\left(x+\frac{4}{y}\right)+\frac{1}{y^2}=2\\x\left(2+\frac{1}{y}\right)+\frac{2}{y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+\frac{4x}{y}+\frac{1}{y^2}=2\\2x+\frac{x}{y}+\frac{2}{y}=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\frac{2x}{y}=2\\2\left(x+\frac{1}{y}\right)+\frac{x}{y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\frac{2x}{y}=2\\4\left(x+\frac{1}{y}\right)+\frac{2x}{y}=6\end{cases}$

Suy ra $\left(x+\frac{1}{y}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{y}\right)=-4\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{y}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{y}=2\Rightarrow\frac{x}{y}=-1\Rightarrow x=-y$

Từ đó ta có : $x+\frac{1}{-x}=2\Leftrightarrow x^2-2x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}\\x=1-\sqrt{2}\end{array}\right.$

Với $x=1+\sqrt{2}\Rightarrow y=-1-\sqrt{2}$

Với $x=1-\sqrt{2}\Rightarrow y=\sqrt{2}-1$

Thử lại ta thấy : $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\\y=1-\sqrt{2}\end{cases};\begin{cases}x=1-\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}-1\end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình

21.15. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^2+y^2=5\\x^3+2y^3=10x+10y\end{cases}$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên , TP. Hà Nội , năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có :

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=10x+10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=5(2x+2y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=\left(x^2+y^2\right)(2x+2y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=2x^3+2xy^2+2x^2y+2y^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x\left(x^2+2xy+2y^2\right)=0 \end{cases}$$

Trường hợp 1 . Xét $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm\sqrt{5} \end{cases}$

Trường hợp 2. Xét $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2+2xy+2y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ (x+y)^2+y^2=0 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)$ là $\left(0;\sqrt{5}\right);\left(0;-\sqrt{5}\right)$

21.16. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2-3xy=-1 \\ 9x^3-2y^3=(x-y)(4xy-1) \end{cases}$

(Tuyển sinh lớp 10 , THPT chuyên , tỉnh Gia Lai , năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có : $\begin{cases} x^2+y^2-3xy=-1(1) \\ 9x^3-2y^3=(x-y)(4xy-1)(2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được :

$$9x^3-2y^3=(x-y)\left(4xy+x^2+y^2-3xy\right)=(x-y)\left(x^2+y^2+xy\right)$$

$$\Leftrightarrow 9x^3-2y^3=x^3-y^3 \Leftrightarrow 8x^3=y^3 \Leftrightarrow y=2x$$

Thay $y=2x$ vào phương trình (1) ta được : $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm1$

Với $x=1$ thì $y=2$

Với $x=-1$ thì $y=-2$

Vậy phương trình có hai nghiệm : $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases};\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

Chuyên đề 22. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

A. Kiến thức cần nhớ

Phương trình vô tỉ là phương trình chứa ẩn trong dấu căn. Để giải phương trình vô tỉ, ta thường làm như sau:

+ Đặt điều kiện cho ẩn

+ Bình phương hai vế khi hai vế đều dương.

+ Đặt ẩn phụ, giải phương trình ẩn mới.

+ Đánh giá hai vế của phương trình.

+ Sau khi tìm được nghiệm cần kiểm tra lại điều kiện của nghiệm, chọn thích hợp.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải phương trình: $4x^2+10x+9=5.\sqrt{2x^2+5x+3}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Quảng Trị năm học 2012 - 2013)

Giải

Tìm cách giải. Quan sát đề bài, chúng ta nhận thấy bài toán có dạng: $a.f(x)+b\sqrt{f(x)}+c=0$. Do đó nên đặt: $\sqrt{f(x)}=y$. Giải phương trình ẩn y.

Trình bày lời giải

Đặt $\sqrt{2x^2+5x+3}=y\left(y\ge 0\right)$, suy ra $2x^2+5x+3=y^2$.

Phương trình có dạng: $2y^2+3=5y \Leftrightarrow 2y^2-5y+3=0$.

Giải ra ta được: $y_1=1; y_2=\frac{3}{2}$.

- Với y = 1 thì $\sqrt{2x^2+5x+3}=1 \Leftrightarrow 2x^2+5x+3=1 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow x_1=-2; x_2=-\frac{1}{2}$
- Với $y=\frac{3}{2}$ thì

$$\sqrt{2x^2+5x+3}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2+5x+3=\frac{9}{4} \Leftrightarrow 2x^2+5x+\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow x_3=\frac{-5-\sqrt{19}}{4}; x_4=\frac{-5+\sqrt{19}}{4}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S=\left\{-2;-\frac{1}{2};\frac{-5-\sqrt{19}}{4};\frac{-5+\sqrt{19}}{4}\right\}$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\left(x^2-3x\right)^2-6\left(x^2-3x\right)-7=0$

b) $\sqrt{8+\sqrt{x-3}}+\sqrt{5-\sqrt{x-3}}=5$

c) $\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x-x^2}=x+1+\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x-x^2}=x+1$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hồ Chí Minh, năm học 2007 - 2008)

Giải

a) Đặt $y=x^2-3x$, phương trình đã cho trở thành $y^2-6y-7=0$.

Giải ra ta được: $y_1=-1; y_2=7$.

- Với y = -1 ta có $x^2-3x=-1$ giải ra ta được $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}; x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

- Với y = 7 ta có $x^2-3x=7$ giải ra ta được $x_3=\frac{3+\sqrt{37}}{2}; x_4=\frac{3-\sqrt{37}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S=\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{37}}{2};\frac{3-\sqrt{37}}{2}\right\}$

b) Điều kiện $3\le x\le 28$.

Đặt $y=\sqrt{x-3}\left(y\ge 0\right)$ phương trình đã cho trở thành:

$\sqrt{8+y}+\sqrt{5-y}=5 \Leftrightarrow 8+y+2\sqrt{\left(8+y\right)\left(5-y\right)}+5-y=25$

$\Leftrightarrow \sqrt{(8+y)(5-y)}=6 \Leftrightarrow y^2+3y-4=0$

Giải ra ta được $y_1=1$ (thỏa mãn); $y_2=-4$ (không thỏa mãn)

Với $y=1$ ta có: $\sqrt{x-3}=1 \Leftrightarrow x=4$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 4.

Nhận xét: Ngoài cách giải trên, ta có thể chuyển một dấu căn sang vế kia (cô lập căn thức). Sau đó bình phương hai vế.

c) Điều kiện $x+x^2\ge 0; x-x^2\ge 0; x+1\ge 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm ta có:

$\sqrt{\left(x+x^2\right).1}+\sqrt{\left(x-x^2\right).1}\le\frac{x+x^2+1}{2}+\frac{x-x^2+1}{2}=x+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+x^2}+\sqrt{x-x^2}\le x+1$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x+x^2=1 \\ x-x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x^2-1=0 \\ x-x^2-1=0 \end{cases}$

Hệ trên vô nghiệm nên dấu bằng không xảy ra. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $x^2-\sqrt{x+5}=5$

(Thi học sinh giỏi tỉnh Bình Định, năm học 2007- 2008)

Giải

Tìm cách giải. Quan sát phương trình ta có thể tiếp cận cách giải theo các hướng sau:

- *Hướng 1.* Quan sát nếu nâng lên lũy thừa để khử căn thì được phương trình bậc bốn, nên nếu có nghiệm thì hoàn toàn giải được bằng cách phân tích đa thức thành nhân tử.

- *Hướng 2.* Bài toán có dạng $x^2=m+\sqrt{x+m}$ nên có thể đưa về $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x+m}+\frac{1}{2}\right)^2$. Từ đó giải tiếp được phương trình đơn giản.

- *Hướng 3.* Bài toán có dạng $x^2=m+\sqrt{x+m}$ nên có thể chuyển về giải hệ phương trình đối xứng, bằng cách đặt $\sqrt{x+m}=y$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2=m+y \\ y^2=m+x \end{cases}$$

Trình bày lời giải

Cách 1. Ta có: $x^2-5=\sqrt{x+5}$ có điều kiện $\begin{cases} x+5\ge 0 \\ x^2-5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5\le x\le -\sqrt{5} \\ x\ge \sqrt{5} \end{array}\right.$

Bình phương hai vế ta được: $x^4-10x^2+25=x+5$

$$x^4-10x^2-x+20=0 \Leftrightarrow \left(x^4+x^3-4x^2\right)-\left(x^3+x^2-4x\right)-\left(5x^2+5x-20\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x-4\right)\left(x^2-x-5\right)=0.$$

Giải phương trình: $x^2+x-4=0$ ta được $x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

Giải phương trình: $x^2-x-5=0$ ta được $x_3=\frac{1+\sqrt{21}}{2}; x_4=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$

Kết hợp với tập xác định ta được, nghiệm của phương trình là:

$$S=\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{2};\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right\}$$

Cách 2. Xét $x^2-\sqrt{x+5}=5 \Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}=x+5+\sqrt{x+5}+\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x+5}+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=\sqrt{x+5}+\frac{1}{2}\ (1) \\ x+\frac{1}{2}=-\sqrt{x+5}-\frac{1}{2}\ (2) \end{array}\right.$$

- Giải phương trình (1): $x=\sqrt{x+5}$ đk $x\ge 0$

Suy ra $x^2=x+5 \Leftrightarrow x^2-x-5=0$ ta được $x_1=\frac{1+\sqrt{21}}{2};x_2=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$

- Giải phương trình (2): $x+\frac{1}{2}=-\sqrt{x+5}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x+5}=-x-1$ với điều kiện

$-5\le x\le\sqrt{5} \Leftrightarrow x+5=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-4=0$

Giải ra ta được: $x_3=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ (thỏa mãn), $x_4=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ (loại).

Kết hợp với tập xác định ta được, nghiệm của phương trình là:

$S=\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{2};\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right\}$

Cách 3. Đặt $\sqrt{x+5}=y\ (y>0) \Rightarrow x+5=y^2$

Kết hợp với phương trình đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2=y+5\ (3) \\ y^2=x+5\ (4) \end{cases}$

Từ phương trình (3) và (4) vế trừ vế ta được:

$x^2-y^2=y-x \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1)=0$

• **Trường hợp 1.** Xét x = y, thay vào phương trình (3) ta được:

$x^2=x+5 \Leftrightarrow x^2-x-5=0$.

Giải ra ta được $x_1=\frac{1+\sqrt{21}}{2};x_2=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$

• **Trường hợp 2.** Xét $x+y+1=0 \Leftrightarrow y=-x-1$ thay vào phương trình (3) ta được:

$x^2=-x-1+5 \Leftrightarrow x^2+x-4=0$.

Giải ra ta được: $x_3=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ (thỏa mãn), $x_4=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ (loại).

Kết hợp với điều kiện ta được, nghiệm của phương trình là:

$S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{21}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right\}$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$.

Giải

Điều kiện $x\ge -1$.

Cách 1. Đặt $t=\sqrt{x+1}$ $(t\ge 0)$ phương trình có dạng: $xt^2+12t-36=0$

x = 0, không phải là nghiệm của phương trình nên $x\ne 0$. Giải phương trình ẩn t, ta được: $t_1=\dfrac{-6-6\sqrt{x+1}}{x};t_2=\dfrac{-6+6\sqrt{x+1}}{x}$

• **Trường hợp 1.** $t=\dfrac{-6-6\sqrt{x+1}}{x}\Leftrightarrow tx=-6-6t\Leftrightarrow (x+6)t=-6$ (loại) vì $x+6>0,t\ge 0$.

• **Trường hợp 2.** $t=\dfrac{-6+6\sqrt{x+1}}{x}\Leftrightarrow tx=-6+6t\Leftrightarrow t=\dfrac{6}{6-x}\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\dfrac{6}{6-x}$, bình phương hai vế ta được: $x+1=\dfrac{36}{36-12x+x^2}$ với $x<6\Leftrightarrow x^3-11x^2+24x=0\Leftrightarrow x^2-11x+24=0$,

vì $x\ne 0\Leftrightarrow x_1=3$ (thỏa mãn), $x_2=8$ (loại)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.

Cách 2. $\Leftrightarrow x^2+2x+1=x+1-12\sqrt{x+1}+36\Leftrightarrow (x+1)^2=\left(\sqrt{x+1}-6\right)^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=\sqrt{x+1}-6\\x+1=6-\sqrt{x+1}\end{array}\right.$

• **Trường hợp 1.** $x+1=\sqrt{x+1}-6\Leftrightarrow x+7=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^2+14x+49=x+1\Leftrightarrow x^2+13x+48=0$ vô nghiệm.

• **Trường hợp 2.** $x+1=6-\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=5-x\Leftrightarrow x+1=25-10x+x^2$ với điều kiện $x\le 5$.

$x^2-11x+24=0$.

Giải ra ta được x = 3 (thỏa mãn), x = 8 (không thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình: $x^2-2x=2\sqrt{2x-1}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2009 - 2010)

Giải

Tìm cách giải. Quan sát đặc điểm của phương trình, ta thấy có hai hướng suy nghĩ:

• **Cách 1.** Vì vế phải xuất hiện dạng: $2\sqrt{f\left(x\right)}$ còn vế trái xuất hiện x^2, nên tìm cách đưa về hằng đẳng thức: $\left(x+a\right)^2=\left(\sqrt{f\left(x\right)}+b\right)^2$. Sau đó giải tiếp.

• **Cách 2.** Đưa về hệ phương trình đối xứng loại hai.

Trình bày lời giải

Cách 1. $x^2-2x=2\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow x^2=2x+2\sqrt{2x-1}$. Điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow x^2=2x-1+2\sqrt{2x-1}+1\Leftrightarrow x^2=\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2x-1}+1\ (1)\\ x=-\sqrt{2x-1}-1\ (2)\end{array}\right.$$

• Giải phương trình (1): $x=\sqrt{2x-1}+1$

$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{2x-1}$ Điều kiện $x\ge 1$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=2x-1\Leftrightarrow x^2-4x+2=0$.

Giải ra ta được: $x_1=2+\sqrt{2}$ (thỏa mãn) $x_2=2-\sqrt{2}$ (loại).

• Giải phương trình (2): $x=-\sqrt{2x-1}-1$ vì $x\ge\frac{1}{2}$ và $-\sqrt{2x-1}-1<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=2+\sqrt{2}$

Cách 2. Điều kiện $x\ge 2$

Đặt $\sqrt{2x-1}=y-1$ điều kiện $y\ge 1$. $\Rightarrow 2x-1=y^2-2y+1$ kết hợp với phương trình ban đầu ta có hệ phương trình $\left[\begin{array}{l}x^2-2x=2\left(y-1\right)\\ 2x-1=y^2-2y+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-2y=-2\\ y^2-2y-2x=-2\end{array}\right.$

Vế trừ vế ta được $x^2-y^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ x=-y\end{array}\right.$

• **Trường hợp 1.** Xét x = y suy ra: $\sqrt{2x-1}=x-1\Leftrightarrow 2x-1=x^2-2x+1\Rightarrow x^2-4x+2=0$.

Giải ra ta được: $x_1=2+\sqrt{2}$ (thỏa mãn), $x_2=2-\sqrt{2}$ (loại).

• **Trường hợp 2.** Xét x = - y suy ra $\sqrt{2x-1}=-x-1$. Với $x\ge 2$ thì $\sqrt{2x-1}>0;\ -x-1<0\Rightarrow$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 2 + \sqrt{2}$.

Nhận xét. Kĩ thuật của bài là việc chọn ẩn phụ từ việc làm ngược.

Đặt $\sqrt{2x-1} = ax + b \Rightarrow x^2 - 2x = 2\left(ay+b\right)$ và $\left(ax+b\right)^2 = 2x - 1$.

Để được hệ đối xứng thì ta chọn $a = 1;\ b = -1$. Từ đó ta có cách giải trên. Ngoài ra ta có thể bình phương hai vế rồi giải phương trình bậc 4. Thật vậy

$\left(x^2-2x\right)^2 = 4\left(2x-1\right) \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2-4x+2\right)\left(x^2+2\right) = 0$ từ đó ta cũng giải được.

Ví dụ 6. Giải phương trình. $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, thành phố Hồ Chí Minh, năm 2008 - 2009)

Giải

Tìm cách giải. Để giải dạng toán này, ta thường có hai cách:

• **Cách 1.** Chuyển thành hệ phương trình đối xứng loại 1, bằng cách đặt phần chứa căn bằng y.

• **Cách 2.** Nhận thấy: x^2 và $\left(\sqrt{17-x^2}\right)^2$ có tổng là hằng số, đồng thời trong phương trình xuất hiện $x\sqrt{17-x^2}$, nên chúng ta có thể đặt: $x + \sqrt{17-x^2} = y$. Sau đó biểu diễn phần còn lại theo y.

Trình bày lời giải

Cách 1. Đặt $y = \sqrt{17-x^2}\ \left(y \ge 0\right) \Rightarrow x^2 + y^2 = 17$.

Từ đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + y + xy = 9 \end{cases}$

Đặt $x + y = u; xy = v$. Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} u^2 - 2v = 17\,(1) \\ u + v = 9\,(2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có $v = 9 - u$ thay vào phương trình (1) ta được: $u^2 - 2\left(9-u\right) = 17 \Leftrightarrow u^2 + 2u - 35 = 0$

Giải ra ta được: $u_1 = 5 \Rightarrow v_1 = 4$; $u_2 = -7 \Rightarrow v_2 = 16$.

• **Trường hợp 1.** Xét u = 5; v = 4 ta có $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 4 = 0$ (3). Giải hệ phương trình (3) ta được $X_1 = 1;\ X_2 = 4$

Suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}; \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

• **Trường hợp 2.** Xét u = -7; v = 16 ta có $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 16 \end{cases}$

$\Rightarrow$ x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + 7X + 16 = 0$ (4).

Phương trình này vô nghiệm.

Suy ra hệ phương trình này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 4\}$.

Cách 2.

Đặt: $y = x + \sqrt{17 - x^2} \Rightarrow y^2 = 17 + 2x\sqrt{17 - x^2} \Rightarrow x\sqrt{17 - x^2} = \dfrac{y^2 - 17}{2}$

Phương trình đã cho có dạng: $y + \dfrac{y^2 - 17}{2} = 9 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 35 = 0$.

Giải ra ta được $y_1 = 5;\ y_2 = -7$.

• **Trường hợp 1.** Với y = 5 ta có $x + \sqrt{17 - x^2} = 5$.

$\sqrt{17 - x^2} = 5 - x$ điều kiện $|x| \le \sqrt{17}; x \le 5$

$\Leftrightarrow 17 - x^2 = 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

Giải ra ta được x = 1; x = 4 (thỏa mãn).

• **Trường hợp 2.** Với y = -7 ta có $x + \sqrt{17 - x^2} = -7$

$\sqrt{17 - x^2} = -x - 7$ điều kiện $x \le -7; |x| \le \sqrt{17}$. Suy ra vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 4\}$.

C. Bài tập vận dụng

1.1. Giải phương trình: $x^2 - 2x + 3 = 2\sqrt{2x^2 - 4x + 3}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Phú Thọ, năm học 2009 - 2010)

Hướng dẫn giải – Đáp số

$x^2 - 2x + 3 = 2\sqrt{2x^2 - 4x + 3} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 6 = 4\sqrt{2x^2 - 4x + 3}$

Đặt $y = \sqrt{2x^2 - 4x + 3}$ với $y \ge 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 3 = y^2$

Phương trình có dạng $y^2 + 3 = 4y \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$

Giải ra ta được $y_1 = 1$; $y_2 = 3$

- Với y = 1 thì $\sqrt{2x^2-4x+3}=1 \Leftrightarrow 2x^2-4x+3=1 \Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x=1$

- Với y = 3 thì $\sqrt{2x^2-4x+3}=3 \Leftrightarrow 2x^2-4x+3=9 \Leftrightarrow 2x^2-4x-6=0$

Giải ra ta được x = -1, x = 3.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;-1;3\}$

1.2. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-x-6}+x^2-x-18=0$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Thừa Thiên Huế, năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $\sqrt{x^2-x-6}=y\left(y\ge 0\right)$, phương trình có dạng $y+y^2-12=0$

Giải ra ta được y = 3 (thỏa mãn); y = - 4 (không thỏa mãn)

Với $y=3 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-6}=3 \Leftrightarrow x^2-x-6=9$

Giải ra ta được $x_1=\dfrac{1-\sqrt{61}}{2}; x_2=\dfrac{1+\sqrt{61}}{2}$

1.3. Giải phương trình $2x+\sqrt{x+\sqrt{x-\dfrac{1}{4}}}=2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Điều kiện $x\ge \dfrac{1}{4}$

$$2x+\sqrt{x+\sqrt{x-\frac{1}{4}}}=2 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{x-\frac{1}{4}+\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}}=2$$

$$\Leftrightarrow 2x+\sqrt{\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}=2 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=2$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{3}{2}-2x \Leftrightarrow x-\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{3}{2}-2x\right)^2$ với điều kiện $x\le \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x-\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4}-6x+4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-7x+\dfrac{5}{2}=0$ Giải ra ta được $x=\dfrac{1}{2}; x=\dfrac{5}{4}$.

So sánh với điều kiện, ta được $x=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1}{2}$.

1.4. Giải phương trình:

a) $x^3-3x^2+2(x+2)\sqrt{x+2}=6x$;

b) $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}=6}$.

Hướng dẫn giải - Đáp số

a/ $x^3-3x^2+2(x+2)\sqrt{x+2}=6x \Leftrightarrow x^3-3x(x+2)+2(x+2)\sqrt{x+2}=0$

Điều kiện $x\ge -2$

Đặt $\sqrt{x+2}=y\,(y\ge 0)$ phương trình có dạng: $x^3-3xy^2+2y^3=0$

$\Leftrightarrow x^3-xy^2-2xy^2+2y^3=0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x+2y)=0$

- **Trường hợp 1.** Xét $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=x \Leftrightarrow x^2-x-2=0$ với $x\ge 0$. Giải ra ta được x = -1 (loại), x = 2 (thỏa mãn).

- **Trường hợp 2.** Xét $x+2y=0 \Leftrightarrow x+2\sqrt{x+2}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+1\right)^2=3 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}+1=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=2-2\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{2;2-2\sqrt{3}\right\}$

b) Đặt $t=\sqrt{x-1}\,(t\ge 0)\Rightarrow t^2+\sqrt{5+t}=5$

$\Leftrightarrow t^2+t+\dfrac{1}{4}=t+5-\sqrt{t+5}+\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{t+5}-\dfrac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow t+\dfrac{1}{2}=\sqrt{t+5}-\dfrac{1}{2}\left(\text{vì } t+\dfrac{1}{2}>0, \sqrt{t+5}>\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow t+1=\sqrt{t+5} \Leftrightarrow t^2+2t+1=t+5$

$\Leftrightarrow t^2+t-4=0$ giải ra ta được $t_1=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ (loại); $t_2=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ (thỏa mãn)

Với $t=\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\Rightarrow \sqrt{x-1}=\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$

1.5. Giải phương trình: $\sqrt{16-8x-3x^2}=x^2+3x-4$.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Quảng Bình, năm học 2009 - 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $t=x^2+3x-4\left(t\ge 0\right)$

$\Rightarrow t^2=16-8x-3x^2=4+x-3x^2-9x+12=4+x-3t$ hay $t^2+3t=4+x$

Từ đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} t^2+3t=x+4 \\ x^2+3x=t+4 \end{cases}$

Trừ từng vế các phương trình ta được

$t^2-x^2+3t-3x=x-t\Leftrightarrow \left(t-x\right)\left(t+x+4\right)=0$

- Trường hợp 1. Xét t = x ta có $x^2+3x-4=x\Leftrightarrow x^2+2x-4=0$

Giải ra ta được $x_1=-1+\sqrt{5};x_2=-1-\sqrt{5}$ (loại)

- Trường hợp 2. Xét t + x + 4 = 0 ta có $x^2+3x-4+x+4=0\Leftrightarrow x^2+4x=0$

Giải ra ta được x = 0 (loại), x = -4.

Vậy nghiệm của phương trình là $S=\left\{-4;-1+\sqrt{5}\right\}$

1.6. Giải phương trình: $x=\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}$.

Hướng dẫn giải – Đáp số

Đặt $u=\sqrt{1-\frac{1}{x}};\ v=\sqrt{x-\frac{1}{x}}$ với $u\ge 0;v\ge 0;x\ge 1$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} u+v=x \\ u^2-v^2=1-x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=x \\ \left(u+v\right)\left(u-v\right)=1-x \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=x \\ u-v=\dfrac{1-x}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow 2v=x-\frac{1-x}{x}\Rightarrow 2v=x-\frac{1}{x}+1$ hay $2v=v^2+1\Leftrightarrow v=1$

Với $v=1\Rightarrow \sqrt{x-\frac{1}{x}}=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0$

Giải ra ta được $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại); $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

1.7. Giải phương trình: $\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Nghệ An, năm học 2011 - 2012)

Hướng dẫn giải – Đáp số

Đặt $\sqrt{x-\frac{1}{x}}=u;\sqrt{2x-\frac{5}{x}}=v\left(u\ge 0;v\ge 0\right)$

Điều kiện $x-\frac{1}{x}\ge 0;2x-\frac{5}{x}\ge 0$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{4}{x}+u=x+v\\ u^2-v^2=\frac{4}{x}-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=x-\frac{4}{x}\\ u^2-v^2=\frac{4}{x}-x\end{cases}$

Suy ra $u^2-v^2+u-v=0\Leftrightarrow\left(u-v\right)\left(u+v+1\right)=0$

Do $u\ge 0;v\ge 0$ nên $u+v+1>0$

Suy ra $u-v=0\Leftrightarrow\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\sqrt{2x-\frac{5}{x}}\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=2x-\frac{5}{x}\Leftrightarrow x=\frac{4}{x}\Leftrightarrow x=\pm 2$

Thử lại $x=2\Rightarrow x-\frac{1}{x}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>0$ thỏa mãn.

$x=-2\Rightarrow x-\frac{1}{x}=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}<0$ (không thỏa mãn).

Vậy nghiệm của phương trình là: x = 2.

1.8. Giải các phương trình:

a) $10.\sqrt{x^3+1}=3\left(x^2+2\right)$;

b) $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$;

c) $2\left(x^2+2x+3\right)=5\sqrt{x^3+3x^2+3x+2}$.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hà Nội, năm học 2010 - 2011)

Hướng dẫn giải – Đáp số

a/ $\Leftrightarrow 10.\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}=3\left(x^2+2\right)$ điều kiện $x\ge -1$

Đặt $\sqrt{x+1}=u;\sqrt{x^2-x+1}=v\left(u\ge 0;v>0\right)$

Phương trình có dạng: $10uv=3\left(u^2+v^2\right)$

$$\Leftrightarrow 3u^2-9uv-uv+3v^2=0 \Leftrightarrow (u-3v)(3u-v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-3v=0 \\ 3u-v=0 \end{array}\right.$$

- Trường hợp 1. Xét $u-3v=0 \Leftrightarrow u=3v$

Suy ra $3\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 9x^2-9x+9=x+1 \Leftrightarrow 9x^2-10x+8=0$ vô nghiệm.

- Trường hợp 2. Xét $3u-v=0 \Leftrightarrow v=3u$

Suy ra $\sqrt{x^2-x+1}=3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2-x+1=9x+9 \Leftrightarrow x^2-10x-8=0$.

Giải ra ta được $x_1=5+\sqrt{33}; x_2=5-\sqrt{33}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là : $S=\left\{5+\sqrt{33}; 5-\sqrt{33}\right\}$

b/ $\Leftrightarrow 7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}=2x^2+5x-1$ điều kiện $x \geq 1$

Đặt $\sqrt{x-1}=u; \sqrt{x^2+x+1}=v\,(u \geq 0; v>0)$

Phương trình có dạng : $7uv=2v^2+3u^2$

$$\Leftrightarrow 2v^2-6uv-uv+3u^2=0 \Leftrightarrow (v-3u)(2v-u)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v-3u=0 \\ 2v-u=0 \end{array}\right.$$

- Trường hợp 1. Xét $v-3u=0 \Leftrightarrow v=3u$. Suy ra:

$\sqrt{x^2+x+1}=3\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2+x+1=9x-9 \Leftrightarrow x^2-8x+10=0$

Giải ra ta được: $x_1=4-\sqrt{6}; x_2=4+\sqrt{6}$

- Trường hợp 2. Xét $2v-u=0 \Leftrightarrow 2v=u$

Suy ra $2\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x-1} \Rightarrow 4x^2+4x+4=x-1 \Leftrightarrow 4x^2+3x+5=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S=\left\{4-\sqrt{6}; 4+\sqrt{6}\right\}$

c/ $\Leftrightarrow 2(x^2+2x+3)=5\sqrt{(x+2)(x^2+x+1)}$ điều kiện $x \geq -2$

Đặt $\sqrt{x+2}=u; \sqrt{x^2+x+1}=v\,(u \geq 0; v>0)$. Phương trình có dạng:

$$2(u^2+v^2)=5uv \Leftrightarrow 2u^2-4uv-uv+2v^2=0 \Leftrightarrow (2u-v)(u-2v)=0$$

- Trường hợp 1. Xét $u-2v=0 \Leftrightarrow 2v=u$.

Suy ra $2\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x+2} \Rightarrow 4x^2+4x+4=x+2 \Leftrightarrow 4x^2+3x+2=0$ vô nghiệm.

- Trường hợp 2. Xét $2u-v=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}=2\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow x^2+x+1=4x+8 \Leftrightarrow x^2-3x-7=0$

Giải ra ta được: $x_1=\dfrac{3-\sqrt{37}}{2};x_2=\dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S=\left\{\dfrac{3-\sqrt{37}}{2};\dfrac{3+\sqrt{37}}{2}\right\}$

1.9. Giải phương trình: $3x-1+\dfrac{x-1}{4x}=\sqrt{3x+1}$

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, tỉnh Phú Thọ, năm học 2013 - 2014)

Hướng dẫn giải – Đáp số

Điều kiện xác định: $x \geq -\dfrac{1}{3}, x \neq 0$

Phương trình tương đương với $12x^2-(3x+1)=4x\sqrt{3x+1}$

Đặt $a=2x, b=\sqrt{3x+1}$

Ta có phương trình $3a^2-b^2=2ab \Leftrightarrow (b-a)(b+3a)=0 \Leftrightarrow b=a$ hoặc b = -3a

Khi đó $\sqrt{3x+1}=2x$ hoặc $\sqrt{3x+1}=-6x$

- Với $\sqrt{3x+1}=2x$, điều kiện x > 0, ta có:

$\sqrt{3x+1}=2x \Leftrightarrow 3x+1=4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-\dfrac{1}{4}$ (loại)

- Với $\sqrt{3x+1}=-6x$, điều kiện $-\dfrac{1}{3} \leq x < 0$, ta có:

$\sqrt{3x+1}=-6x \Leftrightarrow 3x+1=36x^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{153}}{72}$ hoặc $x=\dfrac{3+\sqrt{153}}{72}$ (loại)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1, x=\dfrac{3-\sqrt{153}}{72}$

1.10. Giải phương trình: $2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}$

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2014- 2015)

Hướng dẫn giải – Đáp số

ĐKXĐ: $x \geq -3$

$2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{x+3}\right)\left(x-\sqrt{x+3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\sqrt{x+3}=0 \\ x-\sqrt{x+3}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x=\sqrt{x+3} \\ x=\sqrt{x+3} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{1;\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

1.11. Giải phương trình: $x^2+5x+8=3\sqrt{2x^3+5x^2+7x+6}$

(Tuyển sinh lớp 10, THPTchuyên Toán, tỉnh Hưng Yên, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Nhận xét: $2x^3+5x^2+7x+6=\left(2x+3\right)\left(x^2+x+2\right)$

ĐKXĐ: $x\ge -\dfrac{2}{3}$

Phương trình viết dưới dạng $\left(x^2+x+2\right)+2\left(2x+3\right)=3\sqrt{\left(2x+3\right)\left(x^2+x+2\right)}$

Đặt $\sqrt{2x+3}=a,\sqrt{x^2+x+2}=b\left(a\ge 0,b>0\right)$

Phương trình có dạng $b^2-3ba+2a^2=0 \Leftrightarrow \left(b-a\right)\left(b-2a\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 2a=b \end{array}\right.$

Trường hợp 1. Xét a = b, ta có: $x^2+x+2=2x+3 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$

Phương trình có hai nghiệm: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn), $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2. Xét 2a = b, ta có: $\sqrt{x^2+x+2}=2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x^2-7x-10=0$

Phương trình có hai nghiệm: $x=\dfrac{7+\sqrt{89}}{2}$ (thỏa mãn), $x=\dfrac{7-\sqrt{89}}{2}$ (không thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; $x=\dfrac{7+\sqrt{89}}{2}$

Chương

Chuyên đề 23. PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH,

BẤT PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỰC

A. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + xy = 12 \, (1) \\ 6x + x^2y = 12 + 6y + y^2x \;\; (2) \end{cases}$

(Tuyển sinh lớp 10, chuyên Toán, Đại học Khoa học tự nhiên Hà Nội, năm học 2014-2015)

Giải

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + xy = 12 \, (1) \\ 6x + x^2y = 12 + 6y + y^2x \;\; (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 3xy - 3y^2 = 12 \\ 6x - 6y + x^2y - y^2x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y).(2x+3y) = 12 \\ (x-y).(6+xy) = 12 \end{cases}$$

Vì vế phải của mỗi phương trình là số khác 0, nên $x - y \neq 0$.

Suy ra $2x + 3y = 6 + xy \Leftrightarrow (x-3)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{array}\right.$

*** Trường hợp 1.** Xét $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ thay vào phương trình (1) ta được:

$18 - 3y^2 + 3y = 12 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0$

Giải ra ta được $y_1 = -1; y_2 = 2$.

*** Trường hợp 2.** Xét $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ thay vào phương trình (1) ta được:

$2x^2 - 12 + 2x = 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

Giải ra ta được $x_1 = 3; x_2 = -4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là: $(3;-1);(3;2);(-4;2)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 3 \, (1) \\ xy + x + y = x^2 - 2y^2 \, (2) \end{cases}$

Giải

Tìm cách giải. Ta nhận thấy nếu bình phương 2 vế phương trình (1) thì thu được kết quả không khả quan. Vì vậy ta tập trung vào phân tích phương trình (2) thành nhân tử. Sau đó biểu thị x theo y, thế vào phương trình (1) ta được phương trình một ẩn y. Giải phương trình vừa nhận được.

Trình bày lời giải

Điều kiện $x \ge 1\ ; y \ge 1$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(x-2y-1\right)=0 \Leftrightarrow x-2y-1=0\ \left(\text{vì } x+y>0\right) \Leftrightarrow x=2y+1$, thay vào phương trình (1) ta được:

$$\sqrt{2y}+\sqrt{y-1}=3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2y}-2\right)+\left(\sqrt{y-1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y-4}{\sqrt{2y}+2}+\frac{y-1-1}{\sqrt{y-1}+1}=0 \Leftrightarrow \left(y-2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2y}+2}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0 \Leftrightarrow y=2\ .$$

$$\Leftrightarrow x=2y+1=5$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)$ là: $\left(5;2\right)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy=3\left(1\right) \\ y^3+y^2.x+3x-6y=0\left(2\right) \end{cases}$

Giải

Tìm cách giải. Các phương trình (1), (2) không thể đưa về phương trình tích được. Quan sát phương trình (2) chúng ta thấy các hạng tử là các đơn thức bậc nhất hoặc bậc ba, còn phương trình (1) các hạng tử chỉ chứa bậc hai và bậc 0. Do vậy chúng ta thế phương trình (1) vào phương trình (2) để các hạng tử đều bậc ba. Phương trình mới luôn phân tích đa thức thành nhân tử được, cách giải trên gọi là *cân hằng bậc*.

Trình bày lời giải

x = y = 0 không là nghiệm của phương trình.

Từ phương trình (1) thay vào phương trình (2) và thu gọn ta được:

$$y^3+y^2x+\left(x-2y\right)\left(x^2+xy\right)=0 \Leftrightarrow y^3+x^3-x^2y-xy^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(x-y\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right.$$

* ***Trường hợp 1.*** Xét $x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$ thay vào phương trình (1): $y^2-y^2=3$ vô nghiệm

* ***Trường hợp 2.*** Xét $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$ thay vào phương trình (1): $2y^2=3 \Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y=x=\sqrt{\frac{3}{2}}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)$ là $\left(\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \; (1) \\ x^2+8y^2=12 \; (2) \end{cases}$

Giải

Từ phương trình (2) thay vào phương trình (1) ta được:

$$x^3+2xy^2+y.\left(x^2+8y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3+8y^3\right)+\left(x^2y+2xy^2\right)=0 \Leftrightarrow \left(x+2y\right)\left(x^2-xy+4y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=0 \\ x^2-xy+4y^2=0 \end{array}\right.$$

*** Trường hợp 1.** $x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y$ thay vào phương trình (2) ta được:

$\Leftrightarrow 4y^2+8y^2=12 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\,1$. Suy ra $x=\mp\,2$.

* **Trường hợp 2.** $x^2-xy+4y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$ thay vào phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)$là: $\left(-2;1\right);\left(2;-1\right)$.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y\left(1\right) \\ \left(x^2+1\right)\left(x+y-2\right)=y\left(2\right) \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Bắc Giang, năm học 2013-2014)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán khá khó phát hiện cách giải. Quan sát kỹ cấu tạo mỗi phương trình, chúng ta nhận thấy nếu từ phương trình (1) $x^2+1=4y-y^2-xy$ thế vào phương trình (2) thì hai vế có nhân tử y chung, nên có khả năng giải được dễ dàng, đó là cách giải 1. Ngoài ra, phương trình (1) có thể làm xuất hiện x^2+1 và $x+y-2$ nên ta nghĩ tới đặt ẩn phụ, đó là cách giải 2.

Trình bày lời giải

Cách 1. Từ phương trình (1) suy ra: $x^2+1=\ y\left(4-x-y\right)$.

Thay thế vào phương trình (2) ta được:

$$y\left(4-x-\ y\right)\left(x+y-2\right)=y \Leftrightarrow y\left[\left(4-x-y\right).\left(x+y-2\right)-1\right]=0$$

*** Trường hợp 1.** Xét y = 0 thay vào phương trình (1) ta được:

$x^2+1=0$ vô nghiệm.

*** Trưởng hợp 2.** Xét $\left(4-x-y\right)\left(x+y-2\right)-1=0$

Đặt $x+y=t$, ta được: $\left(4-t\right)\left(t-2\right)-1=0\Leftrightarrow t^2-6t+9=0\Leftrightarrow t=3$.

Suy ra $x+y=3\Rightarrow x=3-y$ thay vào phương trình (1) ta được:

$\left(3-y\right)^2+y^2+\left(3-y\right)y+1=4y\Leftrightarrow y^2-7y+10=0$. Giải ra ta được: $y_1=2;\ y_2=5$.

* Với y = 2 ta được x = 3 – 2 = 1.

* Với y = 5 ta được x = 3 – 5 = -2.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)$ là: $\left(1;2\right);\left(-2;5\right)$.

Cách 2. * Xét y = 0 thay vào phương trình (1) ta được: $x^2+1=0$.

Phương trình vô nghiệm.

* Xét y ≠ 0 hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases}\left(x^2+1\right)+y\left(x+y-2\right)=2y\\ \left(x^2+1\right).\left(x+y-2\right)=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}+\left(y+x-2\right)=2\\ \dfrac{x^2+1}{y}.\left(x+y-2\right)=1\end{cases}$$

Đặt $\dfrac{x^2+1}{y}=u, x+y-2=v$ hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}u+v=2\\ u.v=1\end{cases}$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình $x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x_1=x_2=1$

Do đó u = 1, v = 1 $\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}=1\\ x+y-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=y\\ y=3-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=3-x\\ y=3-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-2=0\\ y=3-x\end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được nghiệm của hệ phương trình $\left(x;y\right)$ là: $\left(1;2\right);\left(-2;5\right)$

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=3\sqrt{4y-3}\\ 2y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=3\sqrt{4x-3}\end{cases}$

Giải

Tìm cách giải. Bài toán có dạng đối xứng loại 2. Suy luận tự nhiên ta có hai cách giải:

- *Cách 1*. Đánh giá các ẩn, để chứng tỏ x = y.

- *Cách 2*. Vế trừ vế, rồi chứng tỏ x = y.

Trình bày lời giải

Cách 1. Điều kiện $x\ge\dfrac{3}{4};y\ge\dfrac{3}{4}$.

$$\begin{cases} 2x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=3\sqrt{4y-3} \\ 2y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=3\sqrt{4x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=3\sqrt{4y-3} \\ \sqrt{xy}\left(2\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)=3\sqrt{4x-3} \end{cases}$$

* Nếu x > y suy ra $\sqrt{4x-3}>\sqrt{4y-3}$ dẫn đến:

$\sqrt{xy}\left(2\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)>\sqrt{xy}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\Rightarrow y>x$ mâu thuẫn.

* Nếu x < y tương tự dẫn đến mâu thuẫn.

Do đó x = y suy ra:

$$2x\sqrt{x}+x\sqrt{x}=3\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow 3x\sqrt{x}=3\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow x^3-4x+3=0$$

Giải ra, ta được: $x_1=1; x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}; x_3=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là:

$(1;1)$, $\left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Cách 2. Từ phương trình (1) và (2), vế trừ vế ta được:

$$x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+3\sqrt{4x-3}-3\sqrt{4y-3}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+\frac{3\left(4x-3-4y+3\right)}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{4y-3}}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+\frac{12\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{4y-3}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{xy}+\frac{12}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{4y-3}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y}=0\Leftrightarrow x=y$$

Suy ra: $2x\sqrt{x}+x\sqrt{x}=3\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow 3x\sqrt{x}=3\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow x^3-4x+3=0$

Giải ra, ta được: $x_1=1; x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}; x_3=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x;y) là: $(1;1);\left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right);\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xz = x + 4\,(1) \\ 2y^2 = 7xz - 3x - 14\ (2) \\ x^2 + z^2 = 35 - y^2\,(3) \end{cases}$

Giải

Từ phương trình (1) $x = xz - 4$ thay vào phương trình (2) ta được: $2y^2 = 7xz - 3(xz - 4) - 14 \Leftrightarrow y^2 = 2xz - 1$

Thay vào phương trình (3) ta được:

$$x^2 + z^2 = 35 - (2xz - 1) \Leftrightarrow (x+z)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + z = 6 \\ x + z = -6 \end{array}\right.$$

• **Trường hợp 1.** Xét $x + z = 6 \Leftrightarrow z = 6 - x$ thay vào phương trình (1) ta được:

$x.(6 - x) = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = 4$.

Với $x = 1 \Rightarrow z = 6 - 1 = 5$; thay vào phương trình (3): $1 + 25 = 35 - y^2 \Leftrightarrow y = \pm 3$.

Với $x = 4 \Rightarrow z = 6 - 4 = 2$; thay vào phương trình (3): $16 + 4 = 35 - y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{15}$. Vậy tập nghiệm hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z)$ là:

$(1; 3; 5); (1; -3; 5); (4; \sqrt{15}; 2); (4; -\sqrt{15}; 2)$.

• **Trường hợp 2.** Xét $x + z = -6$ ta có:

$$x(-6 - x) = x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Với $x = \dfrac{-7 - \sqrt{33}}{2} \Rightarrow z = \dfrac{-5 + \sqrt{33}}{2}$ thay vào (3) ta được phương trình vô nghiệm.

Với $x = \dfrac{-7 + \sqrt{33}}{2} \Rightarrow z = \dfrac{-5 - \sqrt{33}}{2}$ thay vào (3) tìm được $y = \pm\sqrt[4]{33}$.

Vậy tập nghiệm hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z)$ là:

$$\left(\frac{-7 + \sqrt{33}}{2}; \sqrt[4]{33}; \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}\right); \left(\frac{-7 - \sqrt{33}}{2}; -\sqrt[4]{33}; \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}\right)$$

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1(1) \\ y^2 + yz + z^2 = 4(2) \\ z^2 + zx + x^2 = 7(3) \end{cases}$

Giải

Tìm cách giải. Vế trái của mỗi phương trình, các biến có vai trò như nhau, còn vế phải là ba số 1; 4; 7 cách đều. Do đó rất tự nhiên chúng ta nghĩ tới việc vế trừ vế của hai phương trình để được hai phương trình mới có vế phải là - 3, từ đó so sánh vế trái. Chúng ta biểu diễn được hai ẩn theo ẩn còn lại, từ đó giải được phương trình.

Trình bày lời giải

Trừ từng vế các phương trình (1); (2) và trừ từng vế các phương trình (2); (3) ta được:

$$\begin{cases} x^2 - z^2 + xy - yz = -3 \\ y^2 - x^2 + yz - zx = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-z)(x+y+z) = -3 \\ (y-x)(x+y+z) = -3 \end{cases}$$

Suy ra: $x - z = y - x \Leftrightarrow 2x = y + z$ (4).

Từ phương trình (1) và (3) vế trừ vế ta được: $y^2 - z^2 + xy - zx = -6 \Leftrightarrow (y-z)(x+y+z) = -6$ kết hợp với (4): $(y-z).3x = -6 \Leftrightarrow y - z = -\dfrac{2}{x}$

Mặt khác $y + z = 2x$.

Suy ra: $y = x - \dfrac{1}{x}$; $z = x + \dfrac{1}{x}$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right) + \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow 3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

Giải ra ta được: $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3};\ x_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

- Với x = 1 suy ra: $y = 1 - 1 = 0;\ z = 1 + 1 = 2$.
- Với x = - 1 suy ra: $y = 1 + 1 = 2;\ z = 1 - 1 = 0$.
- Với $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ suy ra: $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3};\ z = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
- Với $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ suy ra: $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3};\ z = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} - \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{-4\sqrt{3}}{3}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y;z)$ là

$$(1;0;2);(-1;2;0);\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{-2\sqrt{3}}{3};\frac{4\sqrt{3}}{3}\right);\left(\frac{-\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{-4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x\sqrt{y} + 2y = x \\ y^2 - 2y\sqrt{z} + 2z = y \\ z^2 - 2z\sqrt{x} + 2x = z \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Bắc Ninh, năm học 2009-2010)

Giải

Tìm lời giải: Bài toán này là dạng hoán vị vòng quanh vì vậy chúng ta nên dùng kỹ thuật đánh giá ẩn. Vế trái của mỗi phương trình có bóng dáng của hằng đẳng thức nên chúng ta dựa vào đó để đánh giá ẩn.

Trình bày lời giải

Điều kiện: $x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0$

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} \left(x - \sqrt{y}\right)^2 = x - y(1) \\ \left(y - \sqrt{z}\right)^2 = y - z(2) \\ \left(z - \sqrt{x}\right)^2 = z - x(3) \end{cases}$

Từ các phương trình (1);(2);(3) ta có:

$$\begin{cases} x - y \ge 0 \\ y - z \ge 0 \Rightarrow x \ge y \ge z \ge x \Rightarrow x = y = z \\ z - x \ge 0 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} x = y = z \ge 0 \\ x - \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$ hoặc $x = y = z = 1$

Thử lại thấy thỏa mãn

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình $(x; y; z)$ là $(0;0;0);(1;1;1)$

B. Bài tập vận dụng

1.1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2xy + x - 2y + 3 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2xy + 2x - 2 = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải – Đáp số

Ta có: $\begin{cases} x^2 - 2xy + x - 2y + 3 = 0\ (1) \\ y^2 - x^2 + 2xy + 2x - 2 = 0\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4xy + 2x - 4y + 6 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2xy + 2x - 2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2+y^2-2xy+4x-4y+4=0$

$\Leftrightarrow (x-y+2)^2=0 \Leftrightarrow y=x+2$

Thay vào phương trình (1) ta được: $x^2+5x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right);\left(\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$

1.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2y+1=0(1) \\ y^2+x-3y+1=0\ (2) \end{cases}$

(Thi học sinh Giỏi Toán 9, tỉnh Đồng Nai, năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – Đáp số

Từ phương trình (1) và (2) vế trừ vế ta được

$x^2-y^2-x+y=0 \Leftrightarrow (x-y).(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y-1=0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1. Xét $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$ thay vào phương trình (1) ta được:

$x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ suy ra $y=1$

Trường hợp 2. Xét $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$ thay vào phương trình (1) ta được:

$x^2-2(1-x)+1=0 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0$

Giải ra ta được: $x_1=-1+\sqrt{2} \Rightarrow y_1=1-\left(-1+\sqrt{2}\right)=2-\sqrt{2}$;

$x_2=-1-\sqrt{2} \Rightarrow y_2=1-\left(-1-\sqrt{2}\right)=2+\sqrt{2}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình $(x;y)$ là $(1;1);\left(-1+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right);\left(-1-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$

1.3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2+3x=\dfrac{8}{y^3}(1) \\ x^3-2=\dfrac{6}{y}(2) \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Thanh Hóa, Năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải – Đáp số

Từ phương trình (1) và (2) cộng vế với vế ta được

$x^3+3x=\dfrac{8}{y^3}+\dfrac{6}{y} \Leftrightarrow x^3-\dfrac{8}{y^3}+3x-\dfrac{6}{y}=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{2}{y}\right).\left(x^2+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{4}{y^2}+3\right)=0$

Ta có $x^2+\frac{2x}{y}+\frac{4}{y^2}+3=\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\frac{3}{y^2}+3>0$ nên $x-\frac{2}{y}=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{y}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$2+\frac{6}{y}=\frac{8}{y^3}\Leftrightarrow y^3+3y^2-4=0\Leftrightarrow (y-1).(y+2)^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-1=0 \\ y+2=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right.$$

- Với $y=1\Rightarrow x=\frac{2}{1}=2$

- Với $y=-2\Rightarrow x=\frac{2}{-2}=-1$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình $(x;y)$ là $(2;1);(-1;-2)$

1.4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y=x^2\,(1) \\ z=xy\,(2) \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{6}{z}\,(3) \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải – Đáp số

Từ phương trình (1) và (2) thay vào phương trình (3) ta được:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{6}{x^3}\Rightarrow x^2-x=6\Leftrightarrow x^2-x-6=0$$

Giải ra ta được $x_1=-2;x_2=3$

- Với $x_1=-2$ thay vào phương trình (1); (2) ta được $y=4;z=-8$

- Với $x_2=3$ thay vào phương trình (1); (2) ta được $y=9;z=27$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y;z)$ là $(-2;4;-8);(3;9;27)$

1.5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-1=\frac{2}{x}\,(1) \\ (x+y)^2+2=\frac{3}{x^2}\,(2) \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Quảng Bình, năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải – Đáp số

Từ phương trình (1) suy ra $x+y=1+\frac{2}{x}$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^2+2=\frac{3}{x^2}\Leftrightarrow 1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}+2=\frac{3}{x^2}\Leftrightarrow 3x^2+4x+1=0$$

Giải ra ta được $x_1=-1; x_2=-\frac{1}{3}$

- Với $x_1=-1$ thay vào phương trình (1) ta được $-1+y-1=-2\Leftrightarrow y=0$

- Với $x_2=-\frac{1}{3}$ thay vào phương trình (2) ta được $\frac{1}{3}+y-1=-6\Leftrightarrow y=\frac{-14}{3}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(-1;0);\left(\frac{-1}{3};\frac{-14}{3}\right)$

1.6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-x^3.y+x^2.y^2=1(1) \\ x^3.y-x^2+xy=1(2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải – Đáp số

Từ phương trình (1) và (2) vế trừ vế ta được:

$$x^4-2x^3.y+x^2.y^2+x^2-xy=0\Leftrightarrow\left(x^2-xy\right)^2+\left(x^2-xy\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)\left(x^2-xy+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-y=0 \\ x^2-xy+1=0 \end{array}\right.$$

- Với x = 0 thay vào phương trình (1), phương trình vô nghiệm.

- Với $x-y=0\Leftrightarrow x=y$ thay vào phương trình (1) ta được $x^4-x^4+x^4=1\Leftrightarrow x=\pm1\Leftrightarrow y=\pm1$

- Với $x^2-xy+1=0\Leftrightarrow x^2-xy=-1$ hệ phương trình viết dưới dạng:

$$\begin{cases} x^4-xy\left(x^2-xy\right)=1 \\ x^3y-\left(x^2-xy\right)=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^4+xy=1 \\ x^3y=0 \end{cases}$$

- Nếu $x=0\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

- Nếu x ≠ 0 thì y = 0 thay vào phương trình (2) suy ra $x^2=-1$ (loại).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(1;1);(-1;-1)$.

1.7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1)=3x^2-4x+1 \\ xy+x+1=x^2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải – Đáp số

$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1)=3x^2-4x+1 \\ xy+x+1=x^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (xy+x)\left(x^2+xy+x\right)=3x^2-4x+1(1) \\ xy+x=x^2-1(2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) thay vào phương trình (1) ta được:

$$\left(x^2-1\right)\left(x^2+x^2-1\right)=3x^2-4x+1 \Leftrightarrow 2x^4-6x^2+4x=0 \Leftrightarrow 2x\left(x-1\right)\left(x^2-2x-2\right)=0$$

- Với x = 0 thay vào phương trình (2) ta được $0.y+0=0^2-1 \Rightarrow$ vô nghiệm

- Với x = 1 thay vào phương trình (2) ta được $1.y+1=1-1 \Leftrightarrow y=-1$

- Xét $x^2-2x-2=0$ giải ra ta được $x_1=1+\sqrt{3}; x_2=1-\sqrt{3}$

+ Với $x=1+\sqrt{3}$ thay vào phương trình (2) ta tính được $y=\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

+ Với $x=1-\sqrt{3}$ thay vào phương trình (2) ta tính được $y=\dfrac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(1;-1);\left(1+\sqrt{3};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right);\left(1-\sqrt{3};\dfrac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$

1.8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9(1) \\ x^2+2xy=6x+6(2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải – Đáp số

Từ phương trình (2) ta có: $xy=\dfrac{6x+6-x^2}{2}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$\Leftrightarrow \left(x^2+xy\right)^2=2x+9 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{6x+6-x^2}{2}\right)^2=2x+9$$

$$\Leftrightarrow x^4+12x^3+48x^2+64x=0 \Leftrightarrow x.\left(x+4\right)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

- Với x = 0 thay vào phương trình (1) ta được phương trình vô nghiệm.

- Với x = -4 thay vào phương trình (2) ta được y = 4,25.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(-4;4{,}25)$.

1.9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3\left(y^2+1\right) \end{cases}$

Hướng dẫn giải – Đáp số

Ta có: $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3\left(y^2+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=2\left(4x+y\right)(1) \\ x^2-3y^2=6(2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có: $2=\dfrac{x^2-3y^2}{3}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$3\left(x^3-y^3\right)=\left(x^2-3y^2\right)(4x+y)\Leftrightarrow x^3+x^2y-12xy^2=0$

$\Leftrightarrow x(x-3y)(x+4y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x-3y=0\\x+4y=0\end{array}\right.$

- **Trường hợp 1.** Xét x = 0 thay vào phương trình (2) ta được: $-3y^2=6\Rightarrow$ Vô nghiệm.

- **Trường hợp 2.** Xét $x-3y=0\Leftrightarrow x=3y$ thay vào phương trình (2) ta được: $9y^2-3y^2=6\Leftrightarrow y=\pm 1$

- **Trường hợp 3**. Xét $x+4y=0\Leftrightarrow x=-4y$ thay vào phương trình (2) ta được:

$16y^2-3y^2=6\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{6}{13}}\Leftrightarrow x=\mp 4\sqrt{\frac{6}{13}}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(3;1);(-3;-1);\left(4\sqrt{\frac{6}{13}};-\sqrt{\frac{6}{13}}\right);\left(-4\sqrt{\frac{6}{13}};\sqrt{\frac{6}{13}}\right)$

1.10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=3(1)\\\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4(2)\end{cases}$

Hướng dẫn giải – Đáp số

* Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$x+y=3+\sqrt{xy}\le 3+\frac{x+y}{2}\Leftrightarrow x+y\le 6(3)$

*Áp dụng bất đẳng thức $ax+by\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$ ta có:

$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\le\sqrt{x+1+y+1}.\sqrt{1+1}\Leftrightarrow 4\le\sqrt{x+y+2}.\sqrt{2}\Leftrightarrow x+y\ge 6(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $x+y=6$. Đẳng thức xảy ra khi x = y = 3

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(3;3)$

1.11. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x\sqrt{y}+2y\sqrt{x}=3x\sqrt{2x-1}\\y\sqrt{x}+2x\sqrt{y}=3y\sqrt{2y-1}\end{cases}$

Hướng dẫn giải – Đáp số

Điều kiện $x\ge\frac{1}{2};y\ge\frac{1}{2}$

Hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)=3x\sqrt{2x-1}\\\sqrt{xy}\left(\sqrt{y}+2\sqrt{x}\right)=3y\sqrt{2y-1}\end{cases}$

- Nếu x > y suy ra $3x\sqrt{2x-1} > 3y\sqrt{2y-1}$ dẫn đến: $\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right) > \sqrt{xy}\left(\sqrt{y}+2\sqrt{x}\right) \Rightarrow y > x$ mâu thuẫn.

- Nếu x < y tương tự dẫn đến mâu thuẫn.

Do đó x = y suy ra: $x\sqrt{x}+2x\sqrt{x}=3x\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x=1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(1;1)$

1.12. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3+y^3=z^2 \\ 3xy+z=z^2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải – Đáp số

Ta có: $\begin{cases} x^3+y^3=z^2 \\ 3xy+z=z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=z^2 \\ 3xyz+z^2=z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=z^2\,(1) \\ 3xyz+x^3+y^3=z^3\,(2) \end{cases}$

Từ phương trình (2): $x^3+y^3-z^3+3xyz=0 \Leftrightarrow (x+y-z)\left(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx\right)=0$

* Mà $x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx=0,5(x-y)^2+0,5(y+z)^2+0,5(z+x)^2>0$

Suy ra $x+y-z=0 \Leftrightarrow x+y=z$

Vậy với x; y; z thỏa mãn x + y = z thì hệ phương trình có nghiệm.

Thay x + y = z vào phương trình (1) ta được:

$x^3+y^3=(x+y)^2 \Leftrightarrow x^2-xy+y^2=x+y$ (vì x + y > 0)

$\Leftrightarrow y^2-(x+1)y+x^2-x=0$

Phương trình bậc hai (ẩn y) có nghiệm khi và chỉ khi:

$\Delta=(x+1)^2-4\left(x^2-x\right)\ge 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2\le 4$

Do x nguyên dương nên x = 1 hoặc x = 2

Với x = 1 suy ra y = 2; z = 3

Với x = 2 suy ra $y_1 = 1$; $z_1 = 3$

$y_2 = 2$; $z_2 = 4$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm nguyên dương $(x;y;z)$ là $(1;2;3);(2;1;3);(2;2;4)$

1.13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x-20}+\sqrt{y+3}=6 \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi toán 9, tỉnh Bình Định, năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải – Đáp số

Điều kiện $x \ge 20; y \ge 0$

Đặt $u = \sqrt{x-20}; v = \sqrt{y+3}\left(u \ge 0; v \ge 0\right)$

Suy ra $x = u^2 + 20; y = v^2 - 3$

Hệ phương trình đã cho có dạng $\begin{cases} \sqrt{u^2+20} + \sqrt{v^2-3} = 7(1) \\ u + v = 6(2) \end{cases}$ trong đó $u \le 6; v \le 6$.

Từ phương trình (1) bình phương hai vế ta được:

$$u^2 + 20 + v^2 - 3 + 2\sqrt{\left(u^2+20\right)\left(v^2-3\right)} = 49 \qquad (3)$$

Từ phương trình (2): $v = 6 - 4$ thay vào phương trình (3) ta được:

$$u^2 + 20 + (6-u)^2 - 3 + 2\sqrt{(u^2+20)(u^2 - 12u + 33)} = 49$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(u^2+20\right)(u^2 - 12u + 33} = -u^2 + 6u - 2$$

$$\Leftrightarrow \left(u^2+20\right)\left(u^2-12u+33\right) = \left(-u^2+6u-2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 13u^2 - 216u + 656 = 0$$

Giải ra ta được $u_1 = 4; u_2 = \dfrac{164}{13} > 6$ (loại).

Với u = 4 thì v = 2 suy ra $\begin{cases} \sqrt{x-20} = 4 \\ \sqrt{y+3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(36; 1)$

1.14. Cho hệ phương trình với ẩn x: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4(1) \\ x^2 + (5y+2)x + 4y^2 + 2y < 0(2) \end{cases}$

Tìm y sao cho hệ trên có nghiệm x.

(Thi học sinh giỏi toán 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1992 – 1993 – Vòng 2)

Hướng dẫn giải – Đáp số

Từ (1) có $y^2 = 4 - x^2 \le 4$ do đó $-2 \le y \le 2$

Ta có $x = \pm\sqrt{4-y^2}$ với $-2 \le y \le 2$. Hệ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{4-y^2}\right)^2 + (5y+2).\sqrt{4-y^2} + 4y^2 + 2y < 0 \\ \left(-\sqrt{4-y^2}\right)^2 + (5y+2)\left(-\sqrt{4-y^2}\right) + 4y^2 + 2y < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(5y+2).\sqrt{4-y^2} < -3y^2-2y-4 \\ (5y+2)\sqrt{4-y^2} > 3y^2+2y+4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow |5y+2|\sqrt{4-y^2} > 3y^2+2y+4$$

$$\Leftrightarrow (5y+2)^2(4-y^2) > (3y^2+2y+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 34y^4+32y^3-68y^2-64y<0$$

$$\Leftrightarrow 2y(y^2-2).(17y+16)<0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{16}{7} < y < -\sqrt{2} \text{ hoặc } 0<y<\sqrt{2}$$

Do đó giá trị y để hệ có nghiệm x là $0<y<\sqrt{2}$ hoặc $-\frac{16}{7}<y<-\sqrt{2}$

1.15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3x^2+2y^2-4xy+x+8y-4=0 \\ x^2-y^2+2x+y-3=0\end{cases}$

(Thi học sinh giỏi toán 9, tỉnh Phú Thọ, năm học 2013 - 2014)

Hướng dẫn giải – Đáp số

Ta có: $\begin{cases}3x^2+2y^2-4xy+x+8y-4=0 \\ x^2-y^2+2x+y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+2y^2-4xy+x+8y-4=0 & (1) \\ 2x^2-2y^2+4x+2y-6=0 & (2)\end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) theo vế với vế ta có:

$$(x^2-4xy+4y^2)-3(x-2y)+2=0 \Leftrightarrow (x-2y)^2-3(x-2y)+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y-1)(x-2y-2)=0 \Leftrightarrow x=2y+1 \text{ hoặc } x=2y+2$$

- Với $x=2y+1$, thế vào (2) và rút gọn, ta có $y(y+3)=0 \Leftrightarrow y=0$ hoặc $y=-3$

Suy ra x = 1, y = 0 hoặc x = -5, y = -3.

- Với $x=2y+2$, thế vào (2) và rút gọn ta có:

$$3y^2+13y+5=0 \Leftrightarrow y=\frac{-13+\sqrt{109}}{6} \text{ hoặc } y=\frac{-13-\sqrt{109}}{6}$$

Suy ra $x=\frac{-7+\sqrt{109}}{3}, y=\frac{-13+\sqrt{109}}{6}$

Hoặc $x=\frac{-7-\sqrt{109}}{3}, y=\frac{-13-\sqrt{109}}{6}$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $(x;y)$ là

$$S=\left\{(1;0);(-5;-3);\left(\frac{-7+\sqrt{109}}{3};\frac{-13+\sqrt{109}}{6}\right);\left(\frac{-7-\sqrt{109}}{3};\frac{-13-\sqrt{109}}{6}\right)\right\}$$

1.16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y=2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi toán 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – Đáp số

ĐKXĐ: $x\ge 1$ *và* $x\ge -y$.

$$\begin{cases} y=2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=x^2-2\sqrt{x-1} \end{cases}$$

Do $x+2\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2$ nên:

$$\sqrt{x-1}+1=x^2-2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x^2-1=3\sqrt{x-1}\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2=9(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\left(x^2+3x+5\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=0 \\ x=2\Rightarrow y=2 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(x;y)\in\{(1;0);(2;2)\}$

1.17. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=2 \\ x^3+y^3=2x+4y \end{cases}$

(Thi học sinh giỏi toán 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – Đáp số

Ta có: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=2 \\ x^3+y^3=2x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+xy=2 & (1) \\ (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=2x+4y & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) thế vào phương trình (2), ta được:

$$(x+y)(2-2xy)=2x+4y\Leftrightarrow x^2y+xy^2+y=0$$

$$\Leftrightarrow y\left(x^2+xy+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ x^2+xy+1=0 \end{array}\right.$$

- **Trường hợp 1.** Xét y = 0 thay vào phương trình (1), ta được $x=\pm\sqrt{2}$.

- **Trường hợp 2.** Xét $x^2+xy+1=0\Rightarrow x^2+xy=-1$, thay vào phương trình (1) ta được: $y^2=3\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$

Suy ra $x^2\pm\sqrt{3}.x+1=0$ có $\Delta<0\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $S=\left\{\left(\sqrt{2};0\right),\left(-\sqrt{2};0\right)\right\}$.