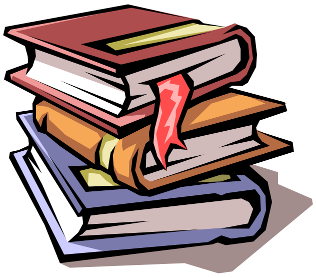
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



TÀI LIỆU TỰ HỌC TOÁN LỚP 8

Tài liệu sưu tầm, ngày 21 tháng 8 năm 2021

TỰ HỌC TOÁN 8

MỤC LỤC

PHẦN 1. ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 3: Phương trình bậc nhất một ẩn

CHƯƠNG 4: Bất phương trình bậc nhất

PHẦN 2. HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1: Tứ giác

CHƯƠNG 5: Hình lăng trụ đứng. Hình chóp đều

CHƯƠNG 6: Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

PHẦN I
ĐẠI SỐ

Chương 1 — PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA ĐA THỨC

Bài 1 — NHÂN ĐA THỨC

1. Tóm tắt lý thuyết

Để nhân một đơn thức với một đa thức ta thực hiện nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các kết quả với nhau.

$$A(B+C)=A.B+A.C$$

Để nhân hai đa thức ta lần lượt nhân từng hạng tử của đa thức này với các hạng tử của đa thức kia rồi cộng các kết quả với nhau.

$$(A+B)(C+D)=A.C+A.D+B.C+B.D$$

2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $A=x^4-17x^3+17x^2-17x+20$ tại $x=16$.

Lời giải

- Cách 1

  Chú ý rằng $x=16$ nên $x-16=0$, do đó ta biến đổi để biểu thức chứa nhiều biểu thức dạng $x-16$

  $A=x^4-16x^3-x^3+16x^2+x^2-16x-x+16+4$

  $=x^3\left(x-16\right)-x^2\left(x-16\right)+x\left(x-16\right)-\left(x-16\right)+4\ =4$

- Cách 2

  Trong biểu thức A, ta thay các số 17 bởi $x+1$, còn 20 bởi $x+4$

$$A = x^4 - x^3(x+1) + x^2(x+1) - x(x+1) + x + 4$$

$$= x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 4 \; = 4 .$$

Ví dụ 1. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết rằng nếu cộng ba tích của hai trong ba số ấy, ta được 242.

Lời giải

Coi $x-1, x, x+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp. Ta có:

$$x(x-1) + x(x+1) + (x-1)(x+1) = 242 \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 1 = 242 \Leftrightarrow \; x^2 = 81$$

Do x là số tự nhiên nên $x = 9$. Ba số tự nhiên cần tìm là $8;9;10$.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Thực hiện phép tính

a) $3x^n \cdot (6x^{n-3} + 1) - 2x^n \cdot (9x^{n-3} - 1)$.

b) $5^{n+1} - 4.5^n$

c) $6^2 \cdot 6^4 - 4^3 \cdot (3^6 - 1)$

Lời giải

a) $3x^n(6x^{n-3} + 1) - 2x^n(9x^{n-3} - 1) = 18x^{2n-3} + 3x^n - 18x^{2n-3} + 2x^n = 5x^n$.

b) $5^{n+1} - 4.5^n = 5.5^n - 4.5^n = 5^n$.

c) $6^2 \cdot 6^4 - 4^3(3^6 - 1) = (3.2)^6 - (2^2)^3(3^6 - 1) = 3^6 \cdot 2^6 - 2^6 \cdot 3^6 + 2^6 = 2^6$.

Bài 2. Tìm x, biết

a) $4(18 - 5x) - 12(3x - 7) = 15(2x - 16) - 6(x + 14)$.

b) $5(3x + 5) - 4(2x - 3) = 5x + 3(2x + 12) + 1$.

c) $2(5x - 8) - 3(4x - 5) = 4(3x - 4) + 11$.

d) $5x - 3[4x - 2(4x - 3(5x - 2))] = 182$.

Lời giải

a) $4(18-5x)-12(3x-7)=15(2x-16)-6(x+14)$

$$72-20x-36x+84=30x-240-6x-84$$

$$156-56x=24x-324$$

$$156+324=24x+56x$$

$$80x=480$$

$$x=6$$

b) $5(3x+5)-4(2x-3)=5x+3(2x+12)+1$

$$15x+25-8x+12=5x+6x+36+1$$

$$7x+37=11x+37$$

$$4x=0$$

$$x=0$$

c) $2(5x-8)-3(4x-5)=4(3x-4)+11$

$$10x-16-12x+15=12x-16+11$$

$$-2x-1=12x-5$$

$$5-1=12x+2x$$

$$14x=4$$

$$x=\frac{2}{7}$$

d)

$$5x-3\left[4x-2\left(4x-3\left(5x-2\right)\right)\right]=182$$

$$5x-3\left[4x-2\left(4x-15x+6\right)\right]=182$$

$$5x-3\left[4x-2\left(-11x+6\right)\right]=182$$

$$5x-3\left[4x+22x-12\right]=182$$

$$5x-78x+36=182$$

$$-73x=182-36$$

$$x=-2.$$

Bài 3.

Tính giá trị của các biểu thức

a) $A=x^3-30x^2-31x+1$ tại $x=31$.

b) $B=x^5-15x^4+16x^3-29x^2+13x$ tại $x=14$

c) $C=x^{14}-10x^{13}+10x^{12}-10x^{11}+\cdots+10x^2-10x+10$ tại $x=9$.

Lời giải

a) Vì $x=31$ nên $x-31=0$ do đó ta biến đổi

$A=x^3-30x^2-31x+1$

$=x^3+x^2-31x^2-31x+1$

$=x^2(x-31)+x(x-31)+1$

$=1$.

b) Vì $x=14$ nên $x-14=0$ do đó ta biến đổi

$B=x^5-15x^4+16x^3-29x^2+13x$

$=x^5-14x^4-x^4+14x^3+2x^3-28x^2-x^2+14x-x$

$=x^4(x-14)-x^3(14-x)+2x^2(x-14)+x(14-x)-x$

$=-x$

$=-14$.

c) Trong biểu thức C, ta thay các số 10 bởi $x+1$.

$C=x^{14}-(x+1)x^{13}+(x+1)x^{12}-(x+1)x^{11}+\cdots+(x+1)x^2-(x+1)x+(x+1)$

$=x^{14}-x^{14}-x^{13}+x^{13}+x^{12}-x^{12}-x^{11}+\cdots-x^2-x+x+1$

$=1$.

Bài 4.

Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách thay số bởi chữ một cách hợp lý

$$A=2\frac{1}{315}\cdot\frac{1}{651}-\frac{1}{105}\cdot3\frac{650}{651}-\frac{4}{315\cdot651}+\frac{4}{105}.$$

Lời giải

$A=2\frac{1}{315}\cdot\frac{1}{651}-\frac{1}{105}\cdot3\frac{650}{651}-\frac{4}{315\cdot651}+\frac{4}{105}$

$=\frac{2.315+1}{315}\cdot\frac{1}{651}-\frac{3}{315}\cdot\frac{3.651+650}{651}-\frac{4}{315\cdot651}+\frac{4.3}{315}$

$=\left(2+\frac{1}{315}\right)\cdot\frac{1}{615}-3\frac{1}{315}\left(4-\frac{1}{651}\right)-4\cdot\frac{1}{315}\cdot\frac{1}{651}+12\cdot\frac{1}{315}$.

Đặt $\begin{cases} a = \dfrac{1}{315} \\ b = \dfrac{1}{651} \end{cases}$

Khi đó biểu thức có dạng

$$A = (2+a)b - 3a(4-b) - 4ab + 12a$$

$$= 2b + ab - 12a + 3ab - 4ab + 12a$$

$$= 2b$$

$$= \frac{2}{651}.$$

2. Nhân đa thức với đa thức

Bài 5.

Thực hiện phép tính

a) $A = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

b) $B = (x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

Lời giải

a) Ta có

$$A = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$= (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) - (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$= x^6 - 1.$$

b) Ta có

$$B = (x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$= (x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x) + (x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$= x^7 + 1.$$

Bài 6.

Tìm x, biết

a) $(x+2)(x+3) - (x-2)(x+5) = 6$.

b) $(3x+2)(2x+9) - (x+2)(6x+1) = (x-1) - (x-6)$.

c) $3(2x-1)(3x-1) - (2x-3)(9x-1) = 0$.

Lời giải

a)

$$(x+2)(x+3) - (x-2)(x+5) = 6$$

$$(x^2 + 5x + 6) - (x^2 + 3xx - 10) = 6$$

$$2x + 16 = 6$$

$2x=-10$

$x=-5$.

b)

$\left(3x+2\right)\left(2x+9\right)-\left(x+2\right)\left(6x+1\right)=\left(x+1\right)-\left(x-6\right)$

$\left(6x^2+31x+18\right)-\left(6x^2+13x+2\right)=7$

$18x=-9$

$x=-\dfrac{1}{2}$

c)

$3\left(2x-1\right)\left(3x-1\right)-\left(2x-3\right)\left(9x-1\right)=0$

$3\left(6x^2-5x+1\right)-\left(18x^2-29x-3\right)=0$

$\left(18x^2-15x+3\right)-\left(18x^2-29x-3\right)=0$

$14x=0$

$x=0$.

Bài 7.

Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $M=N=P$ với

$M=a\left(a+b\right)\left(a+c\right)$; $N=b\left(b+c\right)\left(b+a\right)$; $P=c\left(c+a\right)\left(c+b\right)$.

Lời giải

Vì $a+b+c=0\Rightarrow\begin{cases}a+c=-b\\b+c=-a\\a+b=-c\end{cases}$

Do đó

$M=a\left(a+b\right)\left(a+c\right)=a\left(-c\right)\left(-b\right)=abc\ \left(1\right)$.

$N=b\left(b+c\right)\left(b+a\right)=b\left(-a\right)\left(-c\right)=abc\ \left(2\right)$.

$P=c\left(c+a\right)\left(c+b\right)=c\left(-b\right)\left(-a\right)=abc\ \left(3\right)$.

Từ $\left(1\right)$, $\left(2\right)$ và $\left(3\right)$ suy ra $M=N=P$.

Bài 8.

Chứng minh rằng các hằng đẳng thức

a) $\left(x+a\right)\left(x+b\right)=x^2+\left(a+b\right)x+ab$.

b) $\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+c\right)=x^3+\left(a+b+c\right)x^2+\left(ab+bc+ca\right)x+abc$

Lời giải

Thực hiện phép toán nhân đa thức biến đổi VT thành VP.

Bài 9.

Cho $a+b+c=2p$. Chứng minh hứng hằng đẳng thức

$$2bc+b^2+c^2-a^2=4p(p-a).$$

Lời giải

Ta có $4p(p-a)=2p\cdot(2p-2a)$

$$=(a+b+c)(a+b+c-2a)$$

$$=(a+b+c)(b+c-a)$$

$$=(b+c)^2-a^2$$

$$=2bc+b^2+c^2-a^2.$$

Bài 10.

Xét các ví dụ $53\cdot57=32021,\ 72\cdot78=5616$.

Hãy xây dựng quy tắc nhân nhẩm hai số có hai chữ số, trong đó các chữ số hàng chục bằng nhau, còn chữ số hàng đơn vị có tổng bằng 10.

Lời giải

Ta xét hai số $\overline{ab}$ và $\overline{ac}$ thỏa mãn $b+c=10$. Khi đó

$$(10a+b)(10a+c)=100a^2+10ac+10ab+bc$$

$$=100a^2+10a(b+c)+bc$$

$$=100a^2+100a+bc$$

$$=100a(a+1)+bc.$$

Quy tắc: Nhân chữ số hàng chuc với chữ số hàng chuc thêm 1 rồi viết vào sau tích đó tích của hai chữ số đơn vị (tích này viết bằng hai chử số).

Bài 11.

Cho biểu thức $M=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+x^2$.

Tính M theo a,b,c biết rằng $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c.$

Lời giải

Ta có

$$M=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+x^2$$

$$=(x^2-ax-bx+ab)+(x^2-bx-cx+bc)+(x^2-ax-cx+ac)+x^2$$

$$=4x^2-2x(a+b+c)+(ab+bc+ac). \qquad (1)$$

Theo giả thiết $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c\Leftrightarrow 2x=a+b+c$.

Do đó thay vào (1) ta được $M = 4x^2 - 4x^2 + ab + bc + ac = ab + bc + ac$.

Bài 12.

Cho dãy số $1,3,6,10,15,\cdots,\dfrac{n(n+1)}{2},\cdots$

Chứng minh rằng tổng hai số hạng liên tiếp của dãy bao giờ cũng là số chính phương.

Lời giải

Xét dãy số có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Theo giả thiết $u_{n-1} + u_n = \dfrac{(n-1)n}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = n^2$.

Vậy tổng hai số hạng liên tiếp của dãy bao giờ cũng là số chính phương.

Bài 13.

Cho a gồm 31 số 1, số b gồm 38 số 1. Chứng minh rằng $ab - 2$ chia hết cho 3.

Lời giải

Vì a gồm 31 số 1 nên số a chia cho 3 dư 1.

vì b gồm 38 số 1 nên số b chia cho 3 dư 2.

Đặt $\begin{cases} a = 3n + 1 \\ b = 3m + 2 \end{cases}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} ab - 2 &= (3n+1)(3m+2) - 2 \\ &= 9mn + 6n + 3m + 2 - 2 \\ &= 3(mn + 2n + m) \vdots 3. \end{aligned}$$

Bài 14.

Số $3^{50} + 1$ có là tích của hai số tự nhiên liên tiếp không?

Lời giải

Vì tích của hai số tự nhiên liên tiếp là một số chẵn và có số tận cùng là $0,2,6$.

Do đó phần dư của tích của hai số tự nhiên liên tiếp chia cho 3 là 0 hoặc 2 (1)

Mặt khác $3^{50} + 1$ chia cho 3 dư 1 (2)

Từ (1) và (2) suy ra số $3^{50} + 1$ không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Bài 15.

a) Thực hiện phép tính $A = (2^9 + 2^7 + 1)(2^{23} - 2^{21} + 2^{19} - 2^{17} + 2^{14} - 2^{10} + 2^9 - 2^7 + 1)$.

b) Số $2^{32} + 1$ có là số nguyên không?

Lời giải

a) Ta có

$$A=\left(2^9+2^7+1\right)\left(2^{23}-2^{21}+2^{19}-2^{17}+2^{14}-2^{10}+2^9-2^7+1\right)$$

$$A=2^{32}+\left(2^{23}+2^{23}-2^{24}\right)+\left(2^{18}-2^{17}-2^{17}\right)+\left(2^9+2^9-2^{10}\right)+1$$

$$A=2^{32}+\left(2.2^{23}-2^{24}\right)+\left(2^{18}-2.2^{17}\right)+\left(2.2^9-2^{10}\right)+1$$

$$A=2^{32}+1.$$

b) Vì $\begin{cases}\left(2^{32}+1\right)\vdots\left(2^9+2^7+1\right)\\ \left(2^{32}+1\right)\vdots\left(2^{23}-2^{21}+2^{19}-2^{17}+2^{14}-2^{10}+2^9-2^7+1\right)\end{cases}$

nên $(2^{32}+1)$ không là số nguyên tố.

Bài 2

CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

1 Tóm tắt lý thuyết

Tóm tắt lý thuyết

Thực hiện phép nhân đa thức, ta được các hằng đẳng thức đáng nhớ sau:

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6. $(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3-b^3$
7. $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3+b^3$.

Ta cũng có

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

Tổng quát của các công thức 3 và 7 , ta có hằng đẳng thức

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right) \text{ với mọi số lẻ } n.$$

Tổng quát của các hằng đẳng thức $1,2,4,5$, ta có công thức newton. (xem chuyên đề Tính chia hết đối với số nguyên).

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1.
Chứng minh rằng 3599 viết được dưới dạng tích của hai số tự nhiên khác 1.

Lời giải

Ta có $3599 = 3600 - 1 = 60^2 - 1^2 = (60+1)(60-1) = 61.59$.

Ví dụ 2.
Chứng minh rằng biểu thức sau viết dưới dạng tổng các bình phương của hai biểu thức
$x^2 + 2(x+1)^2 + 3(x+1)^2 + 4(x+3)^2$.

Lời giải

Ta có

$$x^2 + 2(x+1)^2 + 3(x+1)^2 + 4(x+3)^2 = x^2 + 2(x^2+2x+1) + 3(x^2+4x+4) + 4(x^2+6x+9)$$
$$= x^2 + 2x^2 + 4x + 2 + 3x^2 + 12x + 12 + 4x^2 + 24x + 36$$
$$= 10x^2 + 40x + 50$$
$$= \left(x^2 + 10x + 25\right)\left(9x^2 + 30x + 25\right)$$
$$= (x+5)^2 + (3x+5)^2.$$

Ví dụ 3.
Cho $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$. Chứng minh rằng $x = y = z$.

Lời giải

Ta có

$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yx + 2xz$
$\Leftrightarrow 0 = x^2 + y^2 + z^2$
$\Leftrightarrow x = y = z = 0$

Ví dụ 4.
a) Tính $A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \cdots - 99^2 + 100^2$.

b) s Tính $A=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots+(-1)^n\cdot n^2$.

Lời giải

a) Ta có

$A=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-99^2+100^2$

$=\left(2^2-1^2\right)+\left(4^2-3^2\right)+\cdots+\left(100^2-99^2\right)$

$=1+2+3+4+\cdots+99+100$

$=\dfrac{100\cdots101}{2}$

$=5050$.

b)

Xét hai trường hợp

- Nếu n là chẵn thì $A=\left(2^2-1^2\right)+\left(4^2-3^2\right)+\cdots+\left(100^2-99^2\right)$

$=1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

- Nếu n là lẻ thì $A=\left(2^2-1^2\right)+\left(4^2-3^2\right)+\cdots+\left(100^2-99^2\right)$

$=1+2+3+4+\cdots+(n-1)-n^2$

$=\dfrac{n(n-1)}{2}-n^2$

$=-\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Hai kết quả trên có thể viết chung trong một công thức $(-1)^n\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ví dụ 5.

Cho $x+y=a+b$ (1),

$x^2+y^2=a^2+b^2$ (2)

Chứng minh rằng $x^3+y^3=a^3+b^3$.

Lời giải

Ta có $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$ (3)

Từ (1) suy ra $(x+y)^2=(a+b)^2$

Tức là $x^2+2xy+y^2=a^2+2ab+b^2$.

Do $x^2+y^2=a^2+b^2$ nên $2xy=2ab$, suy ra $xy=ab$ $\quad(4)$

Thay các kết quả (1), (2), (4) vào (3) ta được

$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)=(a+b)\left(a^2+b^2-ab\right)=a^3+b^3$.

Ví dụ 6.

Cho $a+b=m, a-b=n$. Tính ab và a^3-b^3 theo m và n.

Lời giải

Cách 1. Từ $a+b=m, a-b=n$, ta tính được $b=\dfrac{m-n}{2}, a=\dfrac{m+n}{2}$.

Do đó $ab=\dfrac{m+n}{2}\cdot\dfrac{m-n}{2}=\dfrac{m^2-n^2}{4}$

$$a^3-b^3=\left(\frac{m+n}{2}\right)^3-\left(\frac{m-n}{2}\right)^3=\frac{(m+n)^3-(m-n)^3}{8}$$

Rút gọn biểu thức trên, ta được $\dfrac{3m^2n+n^3}{4}$.

Cách 2. Ta có

$$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2=m^2-n^2 \text{ nên } ab=\frac{m^2-n^2}{4}$$

Ta có

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=(a-b)\left[(a+b)^2-ab\right]$$

$$=n\left(m^2-\frac{m^2-n^2}{4}\right)=\frac{n\left(3m^2+n^2\right)}{4}=\frac{3m^2n+n^3}{4}.$$

3 Bài tập tự luyện

Bài 16.

Tính giá trị của các biểu thức.

a) $\dfrac{63^2-47^2}{215^2-105^2}$.

b) $\dfrac{437^2-363^2}{537^2-463^2}$.

c) $\dfrac{437^2-363^2}{537^2-463^2}$

Lời giải

a) $\dfrac{63^2-47^2}{215^2-105^2}=\dfrac{(63-47)(63+47)}{(215-105)(215+105)}=\dfrac{16.110}{110.320}=\dfrac{1}{20}$.

b) $\dfrac{437^2-363^2}{537^2-463^2}=\dfrac{(437-363)(437+363)}{(537-463)(537+463)}=\dfrac{74\cdot 800}{74\cdot 1000}=\dfrac{4}{5}$

c) $\dfrac{437^2-363^2}{537^2-463^2}=\dfrac{(437-363)(437+363)}{(537-463)(537+463)}=\dfrac{74\cdot 800}{74\cdot 1000}=\dfrac{4}{5}$.

Bài 17.

So sánh $A=26^2-24^2$ và $B=27^2-25^2$.

Lời giải

$A=(26-24)(26+24)$ và $B=(27-25)(27+25)=(26-24)(26+24+2)>A$.

Bài 18.

Tìm x, biết $4(x+1)^2+(2x-1)^2-8(x-1)(x+1)=11$.

Lời giải

Ta có

$$4(x^2+2x+1)+(4x^2-4x+1)-8(x^2-1)-11=0.$$

$$\Leftrightarrow 4x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Bài 19.

Rút gọn biểu thức:

a) $2x(2x-1)^2-3x(x+3)(x-3)-4x(x+1)^2$.

b) $(a-b+c)^2-(b-c)^2+2ab-2ac$.

c) $(3x+1)^2-2(3x+1)(3x+5)+(3x+5)^2$.

d) $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$.

e) $(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-2(b-c)^2$.

f) $(a+b+c)^2+(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(c-a-b)^2$.

g) $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2$.

Lời giải

a) $2x(2x-1)^2-3x(x+3)(x-3)-4x(x+1)^2$

$=2x(4x^2-4x+1)-3x(x^2-9)-4x(x^2+2x+1)$

$=x^3-16x^2+25x$.

b) $(a-b+c)^2-(b-c)^2+2ab-2ac$

$=\left(a^2+b^2+c^2+2ac-2ab-2bc\right)-\left(b^2+c^2-2bc\right)+2ab-2ac$

$=a^2$.

c) Đặt $a=3x+5$, $b=3x+1$.

Biểu thức đã cho trở thành $b^2-2ba+a^2=(a-b)^2=4^2=16$.

d) Nhân biểu thức đã cho với $3-1$, ta được $3^{64}-1$

Giá trị của biểu thức là $\frac{1}{2}(3^{64}-1)$.

e) $(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-2(b-c)^2$

$=\left(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc\right)+\left(a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc\right)-2\left(b^2+c^2-2bc\right)$

$=2a^2$.

f) $(a+b+c)^2+(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(c-a-b)^2$

$=\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)+\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc\right)+\left(a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc\right)$

$=4\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

g) $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2$

$=\left[(a+b)+(c+d)\right]^2+\left[(a+b)-(c+d)\right]^2+\left[(a+c)-(b+d)\right]^2+\left[(a+d)-(b+c)\right]^2$

$=2(a+b)^2+2(c+d)^2+(a+c)^2+(b+d)^2+(a+d)^2+(b+c)^2-2\left(ad+bc+ac+bd\right)$

$=4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$.

Bài 20.

Cho $x+y=3$. Tính giá trị của biểu thức $A=x^2+2xy+y^2-4x-4y+1$

Lời giải

Ta có $A=(x+y)^2-4\left(x+y\right)+1=3^2-4\cdot 3+1=-2$.

Bài 21.

Cho $a^2+b^2+c^2=m$. Tính giá trị của biểu thức sau theo m

$$A=(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2.$$

Lời giải

Đặt $x=a+b+c$ thì

$A=(2x-3c)^2+(2x-3b)^2+(2x-3a)^2$

$=\left(4x^2-12xc+9c^2\right)+\left(4x^2-12xb+9b^2\right)+\left(4x^2-12xa+9a^2\right)$

$=12x^2-12\left(a+b+c\right)+9\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$=12x^2-12x^2+9m$

$=9m$.

Bài 22.

Hãy viết các số sau đây dưới dạng tích của hai số tự nhiên khác 1

a) 899 .

b) 9991.

Lời giải

a) $899=900-1=30^2-1^2=(30-1)(30+1)=29\cdot 31$.

b) $9991=10000-9=100^2-3^2=(100-3)(100+3)=97\cdot 103$.

Bài 23.

Chứng minh rằng hiệu sau đây là một số gồm toàn các chữ số như nhau

$$7778^2-2223^2.$$

Lời giải

Ta có $7778^2-2223^2=(7778-2223)(7778+2223)=5555\cdot 10001=55555555$.

Bài 24.

Chứng minh các hằng đẳng thức:

a) $(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$.

b) $x^4+y^4+(x+y)^4=2\left(x^2+xy+y^2\right)^2$.

Lời giải

a) Ta có $(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2=\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$=\left(a^2+2ab+b^2\right)+\left(b^2+2bc+c^2\right)+\left(c^2+2ca+a^2\right)$

$$=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2.$$

b) Ta có $x^4+y^4+(x+y)^4=x^2+y^2+\left(x^2+2xy+y^2\right)^2$

$$=2\left(x^4+y^4+x^2y^2+2x^3y+x^2y^2+2xy^3\right)$$

$$=2\left(x^4+y^4+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3\right)$$

$$=2\left(x^2+xy+y^2\right)^2.$$

Bài 25.

Cho $a^2-b^2=4c^2$. Chứng minh hằng đẳng thức

$(5a-3b-8c)(5a-3b+8c)=(3a-5b)^2$

Lời giải

$(3a-5b)^2=9a^2+25b^2-30ab$

$$= 25a^2 + 9b^2 - 30ab - 16\left(a^2 - b^2\right)$$

$$= (5a)^2 + (3b)^2 - 2\cdot(5a)(3b) - 16\cdot 4c^2$$

$$= \left(5a - 3b\right)^2 - \left(8c\right)^2$$

$$= \left(5a - 3b - 8c\right)\left(5a - 3b + 8c\right).$$

Bài 26.

Chứng minh rằng nếu $\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = \left(ax + by\right)^2$ với $x \neq 0, y \neq 0$ thì $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

Lời giải

$\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = \left(ax + by\right)^2$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy$

$\Leftrightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 = 0 \Leftrightarrow ay - bx = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

BÀI 27. Chứng minh rằng nếu $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = (ax + by + cz)^2$ với x, y, z khác 0 thì $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$

Lời giải

$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = (ax + by + cz)^2$

$\Leftrightarrow \left(a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2\right) + \left(a^2z^2 - 2acxz + c^2x^2\right) + \left(b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = 0$

$\Leftrightarrow ay - bx = 0, az - cx = 0, bz - cy = 0$

$\Rightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}\ (x, y, z \neq 0)$

BÀI 28. Cho $(a + b)^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$. Chứng minh rằng $a = b$.

Lời giải

Ta có

$$(a+b)^2=2\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=2a^2+2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2=0$$

$$\Leftrightarrow a-b=0$$

BÀI 29. Chứng minh rằng $a=b=c$ nếu có một trong các điều kiện sau:

a) $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

b) $\left(a+b+c\right)^2=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

c) $\left(a+b+c\right)^2=3\left(ab+bc+ca\right)$

Lời giải

a) $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ca$

$\Leftrightarrow \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right)=0$

$\Leftrightarrow a-b=0, b-c=0, c-a=0$

Suy ra: $a=b=c=0.$

b) $\left(a+b+c\right)^2=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=3a^2+3b^2+3c^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

Theo câu a suy ra: $a=b=c=0.$

c) $\left(a+b+c\right)^2=3\left(ab+bc+ca\right)$

Theo câu b $\left(a+b+c\right)^2=3\left(ab+bc+ca\right)=3(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

Theo câu a suy ra: $a=b=c=0.$

BÀI 30. Hãy viết các biểu thức sau dưới dạng tổng của ba bình phương:

a) $(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2$;

b) $2(a-b)(c-b)+2(b-a)(c-a)+2(b-c)(a-c)$.

Lời giải:

a) $(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2$

$=\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$=\left(a^2+2ab+b^2\right)+\left(a^2+2ab+b^2\right)+\left(b^2+2bc+c^2\right)$

$=(a+b)^2+(a+b)^2+(b+c)^2$;

b) Đặt $x=a-b, y=b-c, x=c-a$ thì biểu thức trở thành

$-2xy-2xz-2yz=x^2+y^2+z^2-(x+y+z)^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

BÀI 31. Tính giá trị của biểu thức $a^4+b^4+c^4$, biết rằng $a+b+c=0$ và:

a) $a^2+b^2+c^2=2$;

b) $a^2+b^2+c^2=1$.

Lời giải

Theo công thức $a^4+b^4+c^4=\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2}$, ta có

a) $a^4+b^4+c^4=\dfrac{2^2}{2}=2$;

b) $a^4+b^4+c^4=\dfrac{1^2}{2}=\dfrac{1}{2}$.

BÀI 32. Cho $a+b+c=0$. Chứng minh $a^4+b^4+c^4$ bằng mỗi biểu thức:

a) $2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$;

b) $2(ab+bc+ca)^2$

c) $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2}$

Lời giải

a) Bình phương hai vế của $a+b+c=0$, được

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca) \quad (1)$$

Bình phương hai vế của (1) ta được:

$$a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=4\left[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\right]$$

$$=4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

Suy ra $a^4+b^4+c^4=2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$

b) Bình phương hai vế của (1), được

$$a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=4(ab+bc+ca)^2 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $2(ab+bc+ca)^2=\dfrac{a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}{2}$ (3)

Từ (3) và câu a) suy ra $a^4+b^4+c^4=2(ab+bc+ca)^2$

c) Bình phương hai vế của (1), chia cho 2 , được

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2}=2(ab+bc+ca)^2=a^4+b^4+c^4$$

BÀI 33. Chứng minh rằng các biểu thức sau luôn luôn có giá trị dương với mọi giá trị của biến:

a) $9x^2-6x+2$

b) $x^2+x+1;$

c) $2x^2+2x+1$

Lời giải

a) $9x^2-6x+2=(3x-1)^2+1>0$

b) $x^2+x+1=x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

c) $2x^2+2x+1=x^2+\left(x^2+2x+1\right)=x^2+(x+1)^2>0$

BÀI 34. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A=x^2-3x+5$;

b) $B=(2x-1)^2+(x+2)^2$.

Lời giải

a) $A=x^2-3x+5=x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}+\frac{11}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\geqslant\frac{11}{4}$.

Giá trị nhỏ nhất của là $A=\frac{11}{4}$ khi $x=\frac{3}{2}$.

b) $B=(2x-1)^2+(x+2)^2=5x^2+5\geq 5$

Giá trị nhỏ nhất của là $B=5$ khi $x=0$.

BÀI 35. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a) $A=4-x^2+2x$;

b) $B=4x-x^2$.

Lời giải

a) $A=4-x^2+2x=5-\left(x^2-2x+1\right)=5-(x-1)^2\leqslant 5$

Giá trị lớn nhất của biểu thức là $A=5$ khi $x=1$.

b) $B=4x-x^2=4-\left(x^2-2\cdot 2x+2\right)=4-(x-2)^2\leqslant 4$

Giá trị lớn nhất của biểu thức là $B=4$ khi $x=2$.

BÀI 36. Chứng minh rằng:

a)Nếu p và p^2+8 là các số nguyên tố thì p^2+2 cũng là số nguyên tố.

b) Nếu p và $8p^2+1$ là các số nguyên tố thì $2p+1$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Lời giải

a) Xét $p=3k+1$ (k nguyên) thì $p^2+8\vdots 3$, là hợp số.

Xét $p=3k+2$ thì $p^2+8\vdots 3$, là hợp số.

Vậy $p=3k$, mà p là số nguyên tố nên $p=3$.

Khi đó $p^2+2=11$ là số nguyên tố.

b) Xét $p=3k+1$ (k nguyên) thì $8p^2+1\vdots 3$, là hợp số

Xét $p=3k+2$ thì $8p^2+1\vdots 3$, là hợp số.

Vậy $p=3k$, mà p là số nguyên tố nên $p=3$.

Khi đó $2p+1=7$, là số nguyên tố.

BÀI 37. Chứng minh các số sau là hợp số

a) 999991.

b) 1000027.

Lời giải

a) Ta có $999991=1000000-9=1000^2-3^2=1003\cdot 997$ nên là hợp số.

b) Ta có $1000027=100^3+3^3\vdots 100+3$ nên là hợp số.

BÀI 38. Thực hiện phép tính:

a) $(x-2)^3-x(x+1)(x-1)+6x(x-3)$.

b) $(x-2)\left(x^2-2x+4\right)(x+2)\left(x^2+2x+4\right)$

Lời giải

a) Ta có

$A\ =(x-2)^3-x(x+1)(x-1)+6x(x-3)=x^3-6x^2+12x-8-x^3+x+6x^2-18x=-5x-8.$

b) Ta có

$B=(x-2)\left(x^2-2x+4\right)(x+2)\left(x^2+2x+4\right)=(x+2)\left(x^2-2x+4\right)\cdot(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$

$$=\left(x^3+8\right)\left(x^3-8\right)=x^6-64$$

BÀI 39. Tìm x biết:

a) $(x-3)\left(x^2+3x+9\right)+x(x+2)(2-x)=1$.

b. $(x+1)^3-(x-1)^3-6(x-1)^2=-10$.

Lời giải

a) Ta có

$$(x-3)\left(x^2+3x+9\right)+x(x+2)(2-x)=1$$

$$\Leftrightarrow\ x^3-3^3+x\left(4-x^2\right)=1 \Leftrightarrow\ x=7$$

b) Ta có

$$(x+1)^3-(x-1)^3-6(x-1)^2=-10$$

$$\Leftrightarrow\ 6x^2+2-6\left(x^2-2x+1\right)=-10 \Leftrightarrow\ x=-\frac{1}{2}$$

BÀI 40. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(a+c-b)^3-(a+b-c)^3$

b) $(a+b)^3+(b+c)^3+(a+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$

Lời giải

a) Ta có

$$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(a+c-b)^3-(a+b-c)^3$$

$$=[a+(b+c)]^3-[(b+c)-a]^3-[a-(b-c)]^3-[a-(b-c)]^3$$

$$=6(b+c)^2a+2a^3-2a^3-6a(b-c)^2$$

$$=24abc$$

b) Ta có

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$= 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + 3\left(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2\right) - 3\left(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc\right)$$

$$= 2\left(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\right)$$

BÀI 41. Chứng minh các hằng đẳng thức:

a) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

b) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$.

Lời giải

a) Ta có:

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$

$$= \left[(a+b+c)^3 - a^3\right] - \left[b^3 + c^3\right]$$

$$= (b+c)\left[(a+b+c)^2 + a(a+b+c) + a^2\right] - (b+c)\left(b^2 - bc + c^2\right)$$

$$= (b+c)\left(3a^2 + 3ab + 3ac + 3bc\right)$$

$$= 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

b) Ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)\left[(a+b)^2 - c(a+b) + c^2 - 3ab\right]$$

$$= (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$$

BÀI 42. Cho $a+b+c=0$. Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Lời giải

Từ giả thiết $a+b+c=0 \Rightarrow c = -(a+b)$, thay vào đẳng thức cần chứng minh ta được

$$a^3 + b^3 - (a+b)^3 = -3ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow -3ab^2 - 3a^2b = -3ab^2 - 3a^2b$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

BÀI 43. Cho $x + y = a$ và $xy = b$. tính giá trị của các biểu thức sau theo a và b .

a) x^2+y^2.

b) x^3+y^3.

c) x^4+y^4.

d) x^5+y^5.

Lời giải

a) Ta có $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2b$.

b) Ta có $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=a^3-3ab$.

c) Ta có $x^4+y^4=\left(x2+y^2\right)^2-2x^2y^2=\left(a^2-2b\right)^2-2b^2=a^4-4a^2b+2b^2$.

d) Ta có

$$x^5+y^5=\left(x^3+y^3\right)\left(x^2+y^2\right)-x^2y^2(x+y)$$

$$=\left(a^3-3ab\right)\left(a^2-2b\right)-b^2a$$

$$=a^5-2a^3b-3a^3b+6ab^2-ab^2=a^5-5a^3b+5ab^2$$

BÀI 44.

a) Cho $x+y=1$. Tính giá trị của biểu thức x^3+y^3+3xy.

b) Cho $x-y=1$. Tính giá trị của biểu thức x^3-y^3-3xy.

Lời giải

a) Ta có

$$x^3+y^3+3xy=(x+y)^3-3xy(x+y)+3xy=1-3xy+3xy=1.$$

b Ta có

$$x^3-y^3-3xy=(x-y)^3+3xy(x-y)-3xy=1+3xy-3xy=1.$$

BÀI 45. Cho $a+b=1$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^3+b^3+3ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2(a+b)$.

Lời giải

Ta có

$$M=(a+b)^3-3ab(a+b)+3ab\left[(a+b)^2-2ab\right]+6a^2b^2(a+b)$$

$$=1-3ab+3ab-6a^2b^2+6a^2b^2=1$$

BÀI 46.

a) Cho $x+y=2$ và $x^2+y^2=10$. Tính giá trị của biểu thức x^3+y^3.

b) Cho $x+y=a$ và $x^2+y^2=b$. Tính giá trị của biểu thức x^3+y^3 theo a,b

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có:

$x+y=2$ và $(x+y)^2-2xy=10$ suy ra $xy=-3$ nên

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=26$$

b) Từ giả thiết ta có

$x+y=a$ và $(x+y)^2-2xy=b$ suy ra $xy=\dfrac{a^2-b}{2}$ nên

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=\frac{3ab-a^3}{2}$$

BÀI 47.

a) Nếu số n là tổng của hai số chính phương thì $2n$ cũng là tổng của hai số chính phương.

b) Nếu số $2n$ là tổng của hai số chính phương thì n cũng là tổng của hai số chính phương.

c) Nếu n là tổng của hai số chính phương thì n^2 cũng là tổng của hai số chính phương.

d) Nếu mỗi số m và n đều là tổng của hai số chính phương thì tích $m.n$ cũng là tổng của hai số chính phương.

Lời giải

a) Giả sử $n=a^2+b^2 (a,b\in\mathbb{N})$. Khi đó

$$2n=2a^2+2b^2=(a+b)^2+(a-b)^2$$

b) Giả sử $2n=a^2+b^2 (a,b\in\mathbb{N})$. Khi đó

$$n=\frac{a^2+b^2}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Vì a^2+b^2 là số chẵn nên a và b cùng tính chẵn, lẻ. Do đó, $\dfrac{a+b}{2}$ và $\dfrac{a-b}{2}$ đều là số nguyên.

c) Giả sử $n=a^2+b^2(a,b\in\mathbb{N})$. Khi đó

$$n^2=\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2+(2ab)^2$$

d) Giả sử $m=a^2+b^2, n=c^2+d^2$. Khi đó,

$$mn=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=(ac+bd)^2+(ac-bd)^2$$

BÀI 48. Mỗi số sau là bình phương của số tự nhiên nào?

a) $A=\underbrace{99...9}_{n}\underbrace{00...0}_{n}25.$

b) $B=\underbrace{99...9}_{n}8\underbrace{00...0}_{n}1.$

c) $C=\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9.$

d) $D=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5.$

Lời giải

a) $A=\left(a\cdot10^n\right)\cdot100+25=a(a+1)\cdot100+25=100a^2+100a+25=(10a+5)^2=(\underbrace{99\ldots9}_{n-1}5)^2.$

b) Đặt $a=\underbrace{99\ldots9}_{n}$ ta có $10^n=a+1$. Do đó,

$$B=\underbrace{99\ldots9}_{n}\cdot10^{n+2}+8\underbrace{00\ldots0}_{n}1=a(a+1)\cdot100+80(a+1)+1=100a^2+180a+81$$

$$=(10a+9)^2=(\underbrace{99\ldots9}_{n+1})^2.$$

c) Đặt $a=\underbrace{11\ldots1}_{n}$ ta có $10^n=9a+1$. Do đó,

$$C=4a\cdot10^n+8a+1=4a(9a+1)+8a+1=36a^2+12a+1$$

$$=(6a+1)^2=(\underbrace{66\ldots6}_{n-1}7)^2.$$

d) Đặt $a=\underbrace{11\ldots1}_{n}$ ta có $10^n=9a+1$. Do đó,

$$D=a\cdot10^{n+2}+20(10a+1)+5=a(900a+100)+200a+25$$

$$=900a^2+300a+25=(30a+5)^2=(\underbrace{33\ldots3}_{n}5)^2.$$

BÀI 49. Chứng minh rằng các biểu thức sau là số chính phương:

a) $A=\underbrace{11\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}$

b) $B=\underbrace{11\ldots1}_{2n}+\underbrace{44\ldots4}_{n}+1$

Lời giải

a) $A=\underbrace{11\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}=\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}-2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}=a(9a+1)+a-2a=(3a)^2$.

b) $B=\underbrace{11\ldots1}_{2n}+\underbrace{44\ldots4}_{n}+1=a(9a+1)+a+4a+1=(3a+1)^2$.

BÀI 50.

a) Cho $a=\underbrace{11\ldots1}_{n},b=1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}5$. Chứng minh rằng $ab+1$ là số chính phương.

b) Cho một dãy số có số hạng đầu là 16 , các số hạng sau là số tạo thành bằng cách viết chèn số 15 vào chính giữa số hạng liền trước: $16,1156,111556,\ldots$ Chứng minh mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

Lời giải

a) Ta có $9a+1=10^n,b=10^n+5=9a+6$. Do đó

$$ab+1=a(9a+6)+1=9a^2+6a+1=(3a+1)^2$$

b) Ta cần chứng minh mọi số có dạng $A=\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6$ đều là số chính phương. Thật vậy,

đặt $\underbrace{11\ldots1}_{n}=a$ thì $10^n=9a+1$ nên

$$A=\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot10^n+\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6=a(9a+1)+5a+1=(3a+1)^2.$$

BÀI 51. Chứng minh rằng $ab+1$ là số chính phương với $a=\underbrace{11\ldots1}_{n}2, b=1\underbrace{11\ldots1}_{n}4$.

Lời giải

Ta nhận thấy $b=a+2$ nên $ab+1=a(a+2)+1=(a+1)^2$.

BÀI 52. Chứng minh với mọi số tự nhiên a, tồn tại số tự nhiên b sao cho $ab+4$ là số chính phương.

Lời giải

Với mọi số tự nhiên a, ta chọn $b=a+4$ khi đó $ab+4=a(a+4)+4=(a+2)^2$.

BÀI 53. Cho a là số gồm $2n$ chữ số 1, b là số gồm $n+1$ chữ số 1, c là số gồm n chữ số 6 . Chứng minh $a+b+c+8$ là số chính phương.

Lời giải

Đặt $k=\underbrace{11\ldots1}_{n}$. Khi đó,

$$a=\underbrace{11\ldots1}_{2n}=\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}+\underbrace{11\ldots1}_{n}=k(9k+1)+k=9k^2+2k$$

$$b=\underbrace{11\ldots1}_{n+1}=10k+1; \quad c=\underbrace{66\ldots6}_{n}=6k$$

Suy ra $a+b+c+8=9k^2+2k+10k+1+6k=(3k+2)^2$.

BÀI 54. Chứng minh rằng biểu thức sau không là lập phương của một số tự nhiên $10^{150}+5\cdot10^{50}+1$

Lời giải

Ta có;

$$\left(10^{50}\right)^3<10^{150}+5\cdot10^{50}+1<10^{150}+3\cdot\left(10^{50}\right)^2+3\cdot10^{50}+1=\left(10^{50}+1\right)^3$$

Vậy $10^{150}+5\cdot10^{50}+1$ không là lập phương của một số tự nhiên.

BÀI 55. Chứng minh rằng tích ba số nguyên dương liên tiếp không là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải

Giả sử ba số nguyên liên tiếp là $n-1,n,n+1$. Ta có

$$(n-1)^3<(n-1)n(n+1)=n\left(n^2-1\right)=n^3-n<n^3$$

Từ đó ta thấy $(n-1)n(n+1)$ không là lập phương của một số tự nhiên.

BÀI 57. Chia 27 quả cân có khối lượng $10,20,30,\ldots,270$ gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau.

Lời giải

Trước hết ta thấy

$$n+(n+5)+(n+7)=3n+12=A$$

$$(n+1)+(n+3)+(n+8)=3n+12=A$$

$$(n+2)+(n+4)+(n+6)=n+12=A$$

Áp dụng nhận xét trên vào chia chín quả cân $10,20,30,\ldots,90$ thành ba nhóm như trên, khối lượng các nhóm đều bằng nhau. Làm tương tự cho hai nhóm $100,110,120,\ldots,1800$ và $190,200,210,\ldots$ $,270$.

BÀI 58. Chia 18 quả cân có khối lượng $1^2,2^2,3^2,\ldots,18^2$ gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau.

Lời giải

Trước hết ta thấy

$$n^2+(n+5)^2=2n^2+10n+25=A+12$$

$$(n+1)^2+(n+4)^2=2n^2+10n+17=A+4;$$

$$(n+2)^2+(n+3)^2=2n^2+10n+13=A$$

Áp dụng các đẳng thức trên: Lần thứ nhất, chia sáu quả cân $1^2,2^2,\ldots,6^2$ thành ba phần: $A+12$, $A+4,A$

Lần thứ hai, chia sáu quả cân $7^2, 8^2, \ldots, 12^2$ thành ba phần: $B, B+12, B+4$

Lần thứ ba, chia chín quả cân $13^2, 14^2, \ldots, 18^2$ thành ba phần: $C+4, C, C+12$.

Nhóm thứ nhất gồm các phần: $A+12, B, C+4$. Nhóm thứ hai gồm các phần: $A+4, B+12, C$. Nhóm thứ ba gồm các phần: $A, B+4, C+12$. Khối lượng mỗi nhóm đều bằng $A+B+C+16$. [BÀI 59. Chia 27 quả cân có khối lượng $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 27^2$ gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau.

Lời giải

Trước hết ta thấy

$$n^2+(n+5)^2+(n+7)^2=3n^2+24n+74=A+18$$

$$(n+1)^2+(n+3)^2+(n+8)^2=3n^2+24n+74=A+18$$

$$(n+2)^2+(n+4)^2+(n+6)^2=3n^2+24n+56=A$$

Áp dụng các đẳng thức trên ta chia các quả cân thành ba nhóm như sau

Nhóm thứ nhất gồm các phần: $A, B+18, C+18$. Nhóm thứ hai gồm các phần: $A+18, B, C+18$. Nhóm thứ ba gồm các phần: $A+18, B+18, C$. Khối lượng mỗi nhóm đều bằng $A+B+C+36$.

Bài 3

BÀI PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

1 Tóm tắt lý thuyết

Phương pháp

Để phân tích đa thức thành nhân tử, ta thường dùng các phương pháp

- Đặt nhân tử chung: $AB + AC = A(B+C)$.

- Dùng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

- Nhóm hạng tử: việc nhóm các hạng tử một cách thích hợp nhằm làm xuất hiện dạng hằng đẳng thức hoặc xuất hiện nhân tử chung mới.

- Tách hạng tử.

- Thêm bớt hạng tử.

- Đặt ẩn phụ.

- Phối hợp nhiều phương pháp.

Trong phạm vi bài viết này sẽ trình bày ba phương pháp đầu. Bốn phương pháp còn lại sẽ trình bày ở
nội dung sau.

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

Lời giải

Cách 1:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1$$

$$= x^2\left(x^2 + x + 1\right) + \left(x^2 + x + 1\right)$$

$$= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + 1\right).$$

Cách 2:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) + \left(x^3 + x\right)$$

$$= \left(x^2 + 1\right)^2 + x\left(x^2 + 1\right)$$

$$= \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right).$$

Ví dụ 2. Cho $a+b+c=0$. Rút gọn biểu thức $M=a^3+b^3+c\left(a^2+b^2\right)-abc.$

Lời giải

$$
\begin{aligned}
M &= a^3+b^3+c\left(a^2+b^2\right)-abc.\\
&= a^3+b^3+a^2c+b^2c-abc\\
&= \left(a^3+a^2c\right)+\left(b^3+b^2c\right)-abc\\
&= a^2\left(a+c\right)+b^2\left(b+c\right)-abc\\
&= a^2\left(-b\right)+b^2\left(-a\right)-abc\\
&= -ab\left(a+b+c\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 3.

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $a^3+b^3+c^3-3abc$

2) Phân tích đa thức sau thành nhân tử bằng cách áp dụng câu 1) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

Lời giải

1) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2+c^3-3abc$

$$
\begin{aligned}
&= \left[(a+b)^3+c^3\right]-3ab\left(a+b+c\right)\\
&= \left(a+b+c\right)\left[(a+b)^2-c\left(a+b\right)+c^2\right]-3ab\left(a+b+c\right)\\
&= \left(a+b+c\right)\left(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab\right)\\
&= \left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right).
\end{aligned}
$$

2) Đặt $a=x-y, b=y-z, c=z-x$ thì $a+b+c=0$. Do đó theo kết quả của câu 1) ta có

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$\Rightarrow (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).$$

Cần nhớ kết quả của câu 1) để vận dung vào giải toán để được kết quả nhanh nhất.

Ví dụ 4. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

1) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

2) $8(x+y+z)^3-(x+y)^3-(y+z)^3-(z+x)^3$

Lời giải

1) Áp dụng nhiều lần công thức $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, ta có

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3&=[(a+b)+c]^3-a^3-b^3-c^3\\&=(a+b)^3+c^3+3(a+b)c(a+b+c)-a^3-b^3-c^3\\&=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3(a+b)c(a+b+c)-a^3-b^3-c^3\\&=3(a+b)\left(ab+ac+bc+c^2\right)\\&=3(a+b)\left[a(b+c)+c(b+c)\right]\\&=3(a+b)(b+c)(c+a).\end{aligned}$$

2) Đặt $x+y=a, y+z=b, z+x=c$ thì $a+b+c=2(x+y+z)$. Đa thức đã cho có dạng

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$$

Áp dụng kết quả của câu 1), ta được

$$8(x+y+z)^3-(x+y)^3-(y+z)^3-(z+x)^3=3(x+2y+z)(x+y+2z)(2x+y+z).$$

Cần nhớ kết quả của câu 1) để vận dung vào giải toán để được kết quả nhanh nhất.

Ví dụ 5. Phân tích đa thức sau thành nhân tử $P=x^2y-x^2z+zy^2-xy^2+xz^2-yz^2$

Lời giải

Khai triển hai hạng tử cuối rồi dùng phương pháp nhóm các hạng tử để làm xuất hiện nhân tử chung $y-z$.

$$\begin{aligned}P&=x^2(y-z)+zy^2-xy^2+xz^2-yz^2\\&=x^2(y-z)+yz(y-z)-x\left(y^2-z^2\right)\end{aligned}$$

$$= x^2(y-z) + yz(y-z) - x(y-z)(y+z)$$
$$= (y-z)(x^2 + yz - xy - xz)$$
$$= (y-z)[x(x-y) - z(x-y)]$$
$$= (y-z)(x-y)(x-z).$$

Ví dụ 6. Xét hằng đẳng thức $(n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1$. Lần lượt cho n bằng 1, 2, 3, … rồi cộng từng vế n đẳng thức trên để tính giá trị của biểu thức:

Lời giải

Từ hằng đẳng thức đã cho, ta có

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$$
$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1$$
$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1$$
$$\ldots$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên rồi rút gọn, ta được

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

Do đó

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)$$
$$3S = (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right]$$
$$3S = (n+1)\left(n^2 + \frac{n}{2}\right)$$
$$3S = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

Vậy $S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Phân tích thành nhân tử

a) $(ab-1)^2+(a+b)^2$;

b) x^3+2x^2+2x+1;

c) $x^3-4x^2+12x-27$;

d) x^4-2x^3+2x-1;

e) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$.

Lời giải

a) $(ab-1)^2+(a+b)^2=a^2b^2-2ab+1+a^2+2ab+b^2$

$$=\left(a^2b^2+a^2\right)+\left(b^2+1\right)$$

$$=a^2\left(b^2+1\right)+\left(b^2+1\right)$$

$$=\left(b^2+1\right)\left(a^2+1\right).$$

b) $x^3+2x^2+2x+1=\left(x^3+1\right)+\left(2x^2+2x\right)=\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)+2x\left(x+1\right)=\left(x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$.

c) $x^3-4x^2+12x-27=\left(x^3-27\right)-\left(4x^2-12x\right)$

$$=\left(x-3\right)\left(x^2+3x+9\right)-4x\left(x-3\right)$$

$$=\left(x-3\right)\left(x^2+3x+9-4x\right)$$

$$=\left(x-3\right)\left(x^2-x+9\right).$$

d) $x^4-2x^3+2x-1=\left(x^4-1\right)-\left(2x^3-2x\right)$

$$=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)$$

$$=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1-2x\right)$$

$$=\left(x-1\right)\left(x+1\right)(x-1)^2$$

$$=\left(x+1\right)(x-1)^3.$$

e) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1=\left(x^4+2x^3+x^2\right)+\left(x^2+2x+1\right)$

$$=x^2\left(x^2+2x+1\right)+(x+1)^2$$

$$=x^2(x+1)^2+(x+1)^2$$

$$=(x+1)^2\left(x^2+1\right).$$

Bài 2. Phân tích thành nhân tử

a) $x^2-2x-4y^2-4y$;

b) x^4+2x^3-4x-4;

c) $x^2\left(1-x^2\right)-4-4x^2$;

d) $(1+2x)(1-2x)-x(x+2)(x-2)$;

e) $x^2+y^2-x^2y^2+xy-x-y$.

Lời giải

a) $x^2-2x-4y^2-4y=\left(x^2-4y^2\right)-\left(2x+4y\right)$

$$=\left(x+2y\right)\left(x-2y\right)-2\left(x+2y\right)$$

$$=\left(x+2y\right)\left(x-2y-2\right).$$

b) $x^4+2x^3-4x-4=\left(x^4-4\right)+\left(2x^3-4x\right)$

$$=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)+2x\left(x^2-2\right)$$

$$=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2x+2\right).$$

c) $x^2\left(1-x^2\right)-4-4x^2=x^2-x^4-4-4x^2$

$$=x^2-\left(x^2+2\right)^2$$

$$=\left(x-x^2-2\right)\left(x+x^2+2\right)$$

d) $\left(1+2x\right)\left(1-2x\right)-x\left(x+2\right)\left(x-2\right)$

$$=1-4x^2-x\left(x^2-4\right)$$

$$=1-4x^2-x^3+4x$$

$$=\left(1-x^3\right)-\left(4x^2-4x\right)$$

$$=\left(1-x\right)\left(1+x+x^2\right)+4x\left(1-x\right)$$

$$=\left(1-x\right)\left(x^2+5x+1\right).$$

e) $x^2+y^2-x^2y^2+xy-x-y=\left(x^2-x\right)+\left(y^2-x^2y^2\right)+\left(xy-y\right)$

$$=x\left(x-1\right)+y^2\left(1-x^2\right)+y\left(x-1\right)$$

$$=x\left(x-1\right)-y^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)+y\left(x-1\right)$$

$$=\left(x-1\right)\left[x-y^2\left(x+1\right)+y\right]$$

$$=\left(x-1\right)\left[\left(x-y^2x\right)-\left(y^2-y\right)\right]$$

$$=\left(x-1\right)\left[x\left(1-y^2\right)-y\left(y-1\right)\right]$$

$$=\left(x-1\right)\left[x\left(1-y\right)\left(1+y\right)+y\left(1-y\right)\right]$$

$$=\left(x-1\right)\left(1-y\right)\left(x+xy+y\right).$$

Bài 3. Chứng minh rằng 199^3-199 chia hết cho 200.

Lời giải

Ta có $199^3 - 199 = 199\cdot(199^2 - 1)$

$= 199\cdot(199+1)\cdot(199-1)$

$= 198\cdot 199\cdot 200 \vdots 200$.

Vậy $199^3 - 199$ chia hết cho 200 .

Bài 4. Tính giá trị của biểu thức sau, biết $x^3 - x = 6$

$$A = x^6 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x.$$

Lời giải

Ta có $A = x^6 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x = \left(x^6 - 2x^4 + x^2\right) + \left(x^3 - x\right)$

$$= \left(x^3 - x\right)^2 + \left(x^3 - x\right) = 6^2 + 6 = 42$$

Bài 5. Phân tích thành nhân tử

a) $a\left(b^2 + c^2 + bc\right) + b\left(c^2 + a^2 + ac\right) + c\left(a^2 + b^2 + ab\right)$;

b) $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$;

c*) $a(a+2b)^3 - b(2a+b)^3$.

Lời giải

a) $a\left(b^2 + c^2 + bc\right) + b\left(c^2 + a^2 + ac\right) + c\left(a^2 + b^2 + ab\right)$

$= ab^2 + ac^2 + abc + bc^2 + ba^2 + abc + ca^2 + cb^2 + abc$

$= \left(ab^2 + abc + ba^2\right) + \left(ac^2 + abc + ca^2\right) + \left(bc^2 + abc + cb^2\right)$

$= ab(b+c+a) + ac(c+b+a) + bc(c+a+b)$

$= (a+b+c)(ab+bc+ca)$.

b) $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$

$= (a+b)(ab+bc+ca) + c(ab+bc+ca) - abc$

$= (a+b)(ab+bc+ca) + abc + c(bc+ca) - abc$

$= (a+b)(ab+bc+ca) + c^2(a+b)$

$= (a+b)\left(ab+bc+ca+c^2\right)$

$= (a+b)\left[(ab+ac) + \left(bc+c^2\right)\right]$

$= (a+b)\left[a(b+c) + c(b+c)\right]$

$= (a+b)(b+c)(c+a)$.

c*) $a(a+2b)^3 - b(2a+b)^3$

$= a\left[(a+b)+b\right]^3 - b\left[a+(a+b)\right]^3$

$= a\left[(a+b)^3 + 3b(a+b)^2 + 3b^2(a+b) + b^3\right] - b\left[a^3 + 3a^2(a+b) + 3a(a+b)^2 + (a+b)^3\right]$

$= a(a+b)^3 + 3ab(a+b)^2 + 3ab^2(a+b) + ab^3 - ba^3 - 3ba^2(a+b) - 3ab(a+b)^2 - b(a+b)^3$

$= (a-b)(a+b)^3 + 3ab(a+b)(b-a) + ab(b-a)(b+a)$

$= (a-b)(a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab - ab\right]$

$= (a-b)(a+b)\left(a^2 - 2ab + b^2\right)$

$= (a-b)(a+b)(a-b)^2$

$= (a+b)(a-b)^3.$

Bài 6. Phân tích thành nhân tử :

a) $ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a-c)$

b) $a\left(b^2+c^2\right) + b\left(c^2+a^2\right) + c\left(a^2+b^2\right) + 2abc$;

c) $(a+b)\left(a^2-b^2\right) + (b+c)\left(b^2-c^2\right) + (c+a)\left(c^2-a^2\right)$;

d) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$.

Lời giải

a) $ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a-c) = ab(a+b) - b^2c - bc^2 + a^2c - ac^2$

$= ab(a+b) + \left(a^2c - b^2c\right) - \left(ac^2 + bc^2\right)$

$= ab(a+b) + c\left(a^2 - b^2\right) - c^2(a+b)$

$= ab(a+b) + c(a-b)(a+b) - c^2(a+b)$

$= (a+b)\left(ab + ac - bc - c^2\right)$

$= (a+b)\left[(ab - bc) + \left(ac - c^2\right)\right]$

$= (a+b)\left[b(a-c) + c(a-c)\right]$

$= (a+b)(b+c)(a-c).$

b) $a\left(b^2+c^2\right) + b\left(c^2+a^2\right) + c\left(a^2+b^2\right) + 2abc = ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + c\left(a^2 + b^2 + 2ab\right)$

$= \left(ab^2 + a^2b\right) + \left(ac^2 + bc^2\right) + c(a+b)^2$

$= ab(a+b) + c^2(a+b) + c(a+b)^2$

$= (a+b)\left(ab + c^2 + ac + bc\right)$

$$=(a+b)\left[(ab+ac)+\left(bc+c^2\right)\right]$$

$$=(a+b)\left[a(b+c)+c(b+c)\right]$$

$$=(a+b)(b+c)(c+a).$$

c) Nhận thấy $b^2-c^2=-\left[\left(a^2-b^2\right)+\left(c^2-a^2\right)\right]$ nên

$$\left(a+b\right)\left(a^2-b^2\right)+\left(b+c\right)\left(b^2-c^2\right)+\left(c+a\right)\left(c^2-a^2\right)$$

$$=(a+b)\left(a^2-b^2\right)-(b+c)\left[\left(a^2-b^2\right)+\left(c^2-a^2\right)\right]+(c+a)\left(c^2-a^2\right)$$

$$=(a+b)\left(a^2-b^2\right)-(b+c)\left(a^2-b^2\right)-(b+c)\left(c^2-a^2\right)+(c+a)\left(c^2-a^2\right)$$

$$=(a-c)\left(a^2-b^2\right)+(a-b)\left(c^2-a^2\right)$$

$$=(a-c)(a-b)(a+b)+(a-b)(c-a)(c+a)$$

$$=(a-b)\left[(a-c)(a+b)-(a-c)(c+a)\right]$$

$$=(a-b)(a-c)(b-c).$$

d) Nhận thấy $c-a=-\left[(b-c)+(a-b)\right]$ nên

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=a^3(b-c)-b^3\left[(b-c)+(a-b)\right]+c^3(a-b)$$

$$=a^3(b-c)-b^3(b-c)-b^3(a-b)+c^3(a-b)$$

$$=(b-c)\left(a^3-b^3\right)-(a-b)\left(b^3-c^3\right)$$

$$=(b-c)(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)-(a-b)(b-c)\left(b^2+bc+c^2\right)$$

$$=(b-c)(a-b)\left(a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2\right)$$

$$=(b-c)(a-b)\left[\left(a^2-c^2\right)+(ab-bc)\right]$$

$$=(b-c)(a-b)\left[(a-c)(a+c)+b(a-c)\right]$$

$$=(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c).$$

Bài 7. Phân tích thành nhân tử

a) $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$;

b) $abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1$.

Lời giải

a) Đặt $a+b-c=x, b+c-a=y, c+a-b=z$. Khi đó

$$x+y+z=a+b-c+b+c-a+c+a-b=a+b+c.$$

Áp dụng hằng đẳng thức $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$. Ta có

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3\\&=3(a+b-c+b+c-a)(b+c-a+c+a-b)(c+a-b+a+b-c)\\&=3\cdot 2b\cdot 2c\cdot 2a\\&=24abc.\end{aligned}$$

b) $abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=abc-ab-bc-ca+a+b+c-1$

$$\begin{aligned}&=abc-bc-ab+b-ca+c+a-1\\&=bc(a-1)-b(a-1)-c(a-1)+(a-1)\\&=(a-1)(bc-b-c+1)\\&=(a-1)\left[c(b-1)-(b-1)\right]\\&=(a-1)(b-1)(c-1).\end{aligned}$$

Bài 8. Chứng minh rằng trong ba số a,b,c tồn tại hai số bằng nhau, nếu

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0.$$

Lời giải

$$\begin{aligned}a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)&=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2(a-b)\\&=(a^2b-ab^2)-(a^2c-b^2c)+c^2(a-b)\\&=ab(a-b)-c(a-b)(a+b)+c^2(a-b)\\&=(a-b)\left[ab-ac-bc+c^2\right]\\&=(a-b)\left[b(a-c)-c(a-c)\right]\\&=(a-b)(a-c)(b-c)\end{aligned}$$

Theo giả thiết $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$ nên

$$(a-b)(a-c)(b-c)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-b=0\\a-c=0\\b-c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=c\\b=c\end{array}\right.$$

Vậy trong ba số a,b và c tồn tại hai số bằng nhau.

Bài 9. Chứng minh rằng nếu $a^2+b^2=2ab$ thì $a=b$.

Lời giải

Ta có $a^2+b^2=2ab\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow(a-b)^2=0\\&\Leftrightarrow a-b=0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = b.$$

Vậy nếu $a^2 + b^2 = 2ab$ thì $a = b$.

Bài 10. Chứng minh rằng nếu $m = a + b + c$ thì

$$(am + bc)(bm + ca)(cm + ab) = (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

Lời giải

Ta có $am + bc = a(a + b + c) + bc = a(a + b) + ac + bc$

$$= a(a+b) + c(a+b)$$

$$= (a+b)(a+c).$$

Tương tự $bm + ca = (b+c)(b+a)$ và $cm + ab = (c+a)(c+b)$. Khi đó

$$(am+bc)(bm+ca)(cm+ab) = (a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)$$

$$= (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

Bài 11. Cho $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0$. Chứng minh rằng $ab + cd = 0$.

Lời giải

Do $a^2 + b^2 = 1$ và $c^2 + d^2 = 1$ nên

$$ab + cd = ab \cdot 1 + cd \cdot 1 = ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2)$$

$$= abc^2 + abd^2 + cda^2 + cdb^2$$

$$= (abc^2 + cdb^2) + (abd^2 + cda^2)$$

$$= bc(ac + bd) + ad(bd + ac)$$

$$= (ac + bd)(bc + ad)$$

$$= 0(\text{ do } ac + bd = 0).$$

Bài 12. Xét hằng đẳng thức $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Lần lượt cho $x = \overline{1, n}$ rồi cộng từng vế n đẳng thức trên để tính giá trị của biểu thức

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Lời giải

Từ hằng đẳng thức đã cho, ta có

$$2^2 = (1+1)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1$$

$$3^2 = (2+1)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1$$

$$4^2 = (3+1)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$$

$$\ldots$$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2\cdot n + 1.$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên rồi rút gọn, ta được

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2(1+2+3+\cdots+n) + n$$

Do đó

$$2(1+2+3+\cdots+n) = (n+1)^2 - (n+1)$$

$$2S = (n+1)\left[(n+1)-1\right]$$

$$2S = (n+1)n$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vậy $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Bài 13. (*) Phân tích thành nhân tử:

a) $a(b+c)^2(b-c)+b(c+a)^2(c-a)+c(a+b)^2(a-b)$;

b) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$;

c) $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$

d) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-2abc-a^3-b^3-c^3$

e) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

Lời giải

a) Ta có $c-a=-\left[(b-c)+(a-b)\right]$. Khi đó

$$a(b+c)^2(b-c)+b(c+a)^2(c-a)+c(a+b)^2(a-b)$$

$$=a(b+c)^2(b-c)-b(c+a)^2\left[(b-c)+(a-b)\right]+c(a+b)^2(a-b)$$

$$=a(b+c)^2(b-c)-b(c+a)^2(b-c)-b(c+a)^2(a-b)+c(a+b)^2(a-b)$$

$$=(b-c)\left[a(b+c)^2-b(c+a)^2\right]-(a-b)\left[b(c+a)^2-c(a+b)^2\right]$$

$$=(b-c)\left[a(b^2+2bc+c^2)-b(c^2+2ac+a^2)\right]-(a-b)\left[b(c^2+2ac+a^2)-c(a^2+2ab+b^2)\right]$$

$$=(b-c)(ab^2+ac^2-bc^2-ba^2)-(a-b)(bc^2+ba^2-ca^2-cb^2)$$

$$=(b-c)\left[c^2(a-b)-ab(a-b)\right]-(a-b)\left[a^2(b-c)-bc(b-c)\right]$$

$$=(b-c)(a-b)(c^2-ab)-(a-b)(b-c)(a^2-bc)$$

$$=(b-c)(a-b)(c^2-ab-a^2+bc)$$

$=(b-c)(a-b)[(c-a)(c+a)+b(c-a)]$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(c+b+c).$

b) Ta có $c-a=-[(b-c)+(a-b)]$. Áp dụng công thức $(x+y)^3=x^3+3xy(x+y)+y^3$. Ta được:

$$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$$
$$=a(b-c)^3-b[(b-c)+(a-b)]^3+c(a-b)^3$$
$$=a(b-c)^3-b\left[(b-c)^3+3(b-c)(a-b)(a-c)+(a-b)^3\right]+c(a-b)^3$$
$$=(a-b)(b-c)^3-3b(b-c)(a-b)(a-c)-(b-c)(a-b)^3$$
$$=(a-b)(b-c)\left[(b-c)^2-3b(a-c)-(a-b)^2\right]$$
$$=(a-b)(b-c)\left[b^2-2bc+c^2-3ab+3bc-a^2+2ab-b^2\right]$$
$$=(a-b)(b-c)\left[-2bc+c^2-3ab+3bc-a^2+2ab\right]$$
$$=(a-b)(b-c)\left[(c^2-a^2)-(2bc-2ab)+(3bc-3ab)\right]$$
$$=(a-b)(b-c)\left[(c-a)(c+a)-2b(c-a)+3b(c-a)\right]$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a)(c+a-2b+3b)$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

c) Ta có $b-c=-[(a-b)+(c-a)]$. Khi đó:

$$a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$$
$$=a^2b^2(a-b)-b^2c^2[(a-b)+(c-a)]+c^2a^2(c-a)$$
$$=a^2b^2(a-b)-b^2c^2(a-b)-b^2c^2(c-a)+c^2a^2(c-a)$$
$$=(a-b)b^2(a^2-c^2)-(c-a)c^2(b^2-a^2)$$
$$=(a-b)b^2(a-c)(a+c)-(a-c)c^2(a-b)(a+b)$$
$$=(a-b)(a-c)\left[b^2a+b^2c-c^2a-c^2b\right]$$
$$=(a-b)(a-c)\left[a(b-c)(b+c)+bc(b-c)\right]$$
$$=(a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc).$$

d) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-2abc-a^3-b^3-c^3$

$$=a(b^2+c^2-2bc-a^2)+b(c^2+a^2+2ac-b^2)+c(a^2+b^2-2ab-c^2)$$

$$= a\left[(b-c)^2 - a^2\right] + b\left[(c+a)^2 - b^2\right] + c\left[(a-b)^2 - c^2\right]$$

$$= a(b-c-a)(b-c+a) + b(c+a-b)(c+a+b) + c(a-b-c)(a-b+c)$$

$$= (a-b+c)\left[-a(b-c+a) + b(a+b+c) + c(a-b-c)\right]$$

$$= (a-b+c)\left(-ab+ac-a^2+ab+b^2+bc+ac-bc-c^2\right)$$

$$= (a-b+c)\left[\left(ac+bc-c^2\right) - \left(a^2+ab-ac\right) + \left(ab+b^2-bc\right)\right]$$

$$= (a-b+c)\left[c(a+b-c) - a(a+b-c) + b(a+b-c)\right]$$

$$= (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a).$$

e) Ta có $c-a = -\left[(b-c)+(a-b)\right]$. Khi đó

$$a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$$

$$= a^4(b-c) - b^4\left[(b-c)+(a-b)\right] + c^4(a-b)$$

$$= a^4(b-c) - b^4(b-c) - b^4(a-b) + c^4(a-b)$$

$$= (b-c)\left(a^4-b^4\right) - (a-b)\left(b^4-c^4\right)$$

$$= (b-c)\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right) - (a-b)\left(b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2\right)$$

$$= (b-c)(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right) - (a-b)(b-c)(b+c)\left(b^2+c^2\right)$$

$$= (a-b)(b-c)\left[(a+b)\left(a^2+b^2\right) - (b+c)\left(b^2+c^2\right)\right]$$

$$= (a-b)(b-c)\left[a^3+ab^2+ba^2-bc^2-cb^2-c^3\right]$$

$$= (a-b)(b-c)\left[\left(a^3-c^3\right) + b^2(a-c) + b\left(a^2-c^2\right)\right]$$

$$= (a-b)(b-c)\left[(a-c)\left(a^2+ac+c^2\right) + b^2(a-c) + b(a-c)(a+c)\right]$$

$$= (a-b)(b-c)(a-c)\left(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc\right).$$

Bài 14. Chứng minh rằng nếu $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ và a,b,c là các số dương thì $a=b=c$.

Lời giải

Theo ví dụ 3 ở nội dung này. Ta có: $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$

Do đó nếu $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ thì $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right) = 0$

hay $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 0$ (do a,b,c là các số dương nên $a+b+c>0$).

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ b=c \\ c=a \end{cases}$$

Vậy nếu $a^3+b^3+c^3=3abc$ và a,b,c là các số dương thì $a=b=c$.

Bài 15. Chứng minh rằng nếu $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ và a,b,c,d là các số dương thì $a=b=c=d$.

Lời giải

$$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$$

$$\Leftrightarrow a^4-2a^2b^2+b^4+c^4-2c^2d^2+d^4+2a^2b^2-4abcd+2c^2d^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)^2+\left(c^2-d^2\right)^2+2(ab-cd)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=0 \\ c^2-d^2=0 \\ ab-cd=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm b \\ c=\pm d \\ ab=cd \end{cases}$$

$\Leftrightarrow\ a=b=c=d$ (do a,b,c,d là các số dương)

Vậy nếu $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ và a,b,c,d là các số dương thì $a=b=c=d$.

Bài 16. Bằng phương pháp tương tự ở ví dụ 6 và bài tập trên. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$S_3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

Lời giải

Từ hằng đẳng thức $(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$, ta có

$$2^4=(1+1)^4=1^4+4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$$

$$3^4=(2+1)^4=2^4+4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$$

$$4^4=(3+1)^4=3^4+4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$$

...

$$(n+1)^4=n^4+4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên rồi rút gọn, ta được

$$(n+1)^4=1^4+4\cdot\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)+6\cdot\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+4\left(1+2+\cdots+n\right)+n$$

$$=1+4S_3+6S_2+4S_1+n$$

Ta đã biết $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Do đó

$$4S_3 = (n+1)^4 - 1 - n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 4S_3 = (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right]$$

$$\Leftrightarrow 4S_3 = (n+1)\left[(n+1)^3 - (2n+1)(n+1)\right]$$

$$4S_3 = (n+1)^2\left(n^2 + 2n + 1 - 2n - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Vậy $S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Bài 4

CHIA ĐA THỨC

1 Tóm tắt lý thuyết

Với $A(x), B(x), Q(x)$ và $R(x)$ là các đa thức. Ta có

- Đa thức $A(x)$ được gọi là chia hết cho đa thức $B(x)$ khác đa thức 0 nếu tồn tại đa thức $Q(x)$ sao cho $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$

- Người ta chứng minh được rằng: Với mọi cặp đa thức $A(x)$ và $B(x)$, trong đó $B(x) \neq 0$, tồn tại duy nhất cặp đa thức $Q(x)$ và $R(x)$ sao cho $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Trong đó $R(x) = 0$ hoặc bậc của $R(x)$ nhỏ hơn bậc của $B(x)$.

- Nếu $R(x) = 0$ thì $A(x)$ chia hết cho $B(x)$.
- Nếu $R(x) \neq 0$ thì $A(x)$ không chia hết cho $B(x)$. Khi đó $Q(x)$ là thường và $R(x)$ là dư của phép chia $A(x)$ cho $B(x)$

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho đa thức và đơn thức

a) Tìm số tự nhiên để đa thức chia hết cho đơn thức .

b) Tìm thương trong trường hợp đó.

Lời giải

a) Điều kiện để đa thức A chia hết cho đơn thức B là

$$\begin{cases} n-1 \geq 3 \\ n+1 \geq 3 \\ 6 \geq n \\ 4 \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 2 \\ 4 \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 4 \\ n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow n = 4$$

Vậy với $n = 4$ thì đa thức A chia hết cho đơn thức B.

b) Với $n = 4$ thì $A = 3x^3y^6 - 5x^5y^4$ và $B = 2x^3y^4$. Khi đó

$$A:B=\left(3x^3y^6-5x^5y^4\right):\left(2x^3y^4\right)=\frac{3}{2}y^2-\frac{5}{2}x^2$$

Ví dụ 2. Xác định các số hữu tỉ và để đa thức chia hết cho đa thức

Lời giải

Cách 1: Đặt tính chia

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & x^3 & & +ax & +b & x^2 \quad +x \quad -2 \\
- & x^3 & +x^2 & -2x & & x \quad -1 \\
\hline
 & & -x^2 & +(a+2)x & +b & \\
- & & -x^2 & -x & +2 & \\
\hline
 & & & (a+3)x & +(b-2) &
\end{array}$$

Để chia hết thì đa thức dư phải bằng 0 với mọi giá trị của x nên $\begin{cases}a+3=0\\b-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}$

Vậy với $a=-3,b=2$ thì đa thức x^3+ax+b chia hết cho đa thức x^2+x-2, thương là $x-1$.

Cách 2: (Phương pháp hệ số bất định)

Đa thức bị chia có bậc ba và đa thức chia có bậc hai nên thương là một đa thức bậc nhất, hạng tử bậc nhất là $x^3:x^2=x$.

Gọi thương của phép chia là $x+c$, ta có $x^3+ax+b=\left(x^2+x-2\right)\left(x+c\right)$

$$\Leftrightarrow x^3+ax+b=x^3+\left(c+1\right)x^2+\left(c-2\right)x-2c$$

Do hai đa thức trên bằng nhau nên:

$$\begin{cases}c+1=0\\c-2=a\\-2c=b\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}c=-1\\a=-3\\b=2\end{cases}$$

Vậy với $a=-3,b=2$ thì đa thức x^3+ax+b chia hết cho đa thức x^2+x-2, thương là $x-1$.

Cách 3: (Phương pháp xét giá trị riêng)

Gọi thương khi chia đa thức x^3+ax+b cho đa thức x^2+x-2 là $Q\left(x\right)$, ta có

$$x^3+ax+b=\left(x^2+x-2\right)Q\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)Q\left(x\right)$$

Vì đẳng thức đúng với mọi x nên lần lượt cho $x=1,x=-2$, ta được

$$\begin{cases}1+a+b=0\\-8-2a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-1\\-2a+b=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}$$

Vậy với $a=-3, b=2$ thì đa thức x^3+ax+b chia hết cho đa thức x^2+x-2, thương là $x-1$

3 Bài tập tự luyện

Chia đơn thức cho đơn thức

Bài 1. Thực hiện phép tính

a) $8^{12}:4^6$ b) $27^6:9^2$ c) $\dfrac{9^{15}\cdot 25^3\cdot 4^3}{3^{10}\cdot 50^6}$

Lời giải

a) $8^{12}:4^6=\left(2^3\right)^{12}:\left(2^2\right)^6=2^{36}:2^{12}=2^{24}$

b) $27^6:9^2=\left(3^3\right)^6:\left(3^2\right)^2=3^{18}:3^4=3^{14}$

c) $\dfrac{9^{15}\cdot 25^3\cdot 4^3}{3^{10}\cdot 50^6}=\dfrac{\left(3^2\right)^{15}\cdot\left(5^2\right)^3\cdot\left(2^2\right)^3}{3^{10}\cdot\left(2\cdot 5^2\right)^6}=\dfrac{3^{30}\cdot 5^6\cdot 2^6}{3^{10}\cdot 2^6\cdot 5^{12}}=\dfrac{3^{20}\cdot 1\cdot 1}{1\cdot 1\cdot 5^6}=\dfrac{3^{20}}{5^6}$

Bài 2. Chứng minh rằng biểu thức $A=\left(-15x^3y^6\right):\left(-5xy^2\right)$ không âm với mọi giá trị của biến.

Lời giải

Ta có $A=\left(-15x^3y^6\right):\left(-5xy^2\right)=3x^2y^4$

Vì $x^2\ge 0$ với mọi số thực x và $y^4\ge 0$ với mọi số thực y nên $3x^2y^3\ge 0$ với mọi x, y.

Vậy biểu thức $A=\left(-15x^3y^6\right):\left(-5xy^2\right)$ không âm với mọi giá trị của biến.

Bài 3. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức $B=\dfrac{2}{3}x^2y^3:\left(-\dfrac{1}{3}xy\right)+2x(y-1)(y+1)$ không phụ thuộc vào giá trị của biến y $(x\ne 0; y\ne 0)$

Lời giải

Với $x\ne 0$ và, $y\ne 0$ ta có:

$$B=\frac{2}{3}x^2y^3:\left(-\frac{1}{3}xy\right)+2x(y-1)(y+1)$$
$$=-2xy^2+2x\left(y^2-1\right)$$
$$=-2xy^2+2xy^2-2x$$
$$=-2x$$

Vậy giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào giá trị của biến y.

Bài 4. Tìm số tự nhiên n để đơn thức $A=4x^{n+1}y^2$ chia hết cho đơn thức $B=3x^3y^{n-1}$.

Lời giải

Để đơn thức A chia hết cho đơn thức B thì

$$\begin{cases} n+1\ge 3 \\ 2\ge n-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\ge 2 \\ n\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le n\le 3$$

Mà $n\in\mathbb{N}$ nên $n=2$ hoặc $n=3$

Vậy với $n=2$ hoặc $n=3$ thì đơn thức A chia hết cho đơn thức B.

Chia đa thức cho đơn thức

Bài 5. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\frac{1}{2}a^2x^4+\frac{4}{3}ax^3-\frac{2}{3}ax^2\right):\left(-\frac{2}{3}ax^2\right)$ b) $4\left(\frac{3}{4}x-1\right)+\left(12x^2-3x\right):\left(-3x\right)-\left(2x+1\right)$

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{2}a^2x^4+\frac{4}{3}ax^3-\frac{2}{3}ax^2\right):\left(-\frac{2}{3}ax^2\right)=\frac{-3}{4}ax^2-2x+1$

b) $4\left(\frac{3}{4}x-1\right)+\left(12x^2-3x\right):\left(-3x\right)-\left(2x+1\right)=3x-4-4x+1-2x-1=-3x-4$

Bài 6. Thực hiện phép tính rồi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\left(9xy^2-6x^2y\right):\left(-3xy\right)+\left(6x^2y+2x^4\right):\left(2x^2\right)$$

Lời giải

$$A=\left(9xy^2-6x^2y\right):\left(-3xy\right)+\left(6x^2y+2x^4\right):\left(2x^2\right)$$

$$=-3y+2x+3y+x^2 \quad =x^2+2x$$

$$=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2 \quad =(x+1)^2-1$$

Vì $(x+1)^2\ge 0$ với mọi x nên $(x+1)^2-1\ge -1$ hay $A\ge -1$ với mọi x. Do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng -1 khi $x=-1$.

Bài 7. Tìm số tự nhiên n để đa thức $A=7x^{n-1}y^5-5x^3y^4$ chia hết cho đơn thức $B=5x^2y^n$.

Lời giải

Xét thương $A:B=\frac{7}{5}x^{n-1-2}y^{5-n}-xy^{4-n}=\frac{7}{5}x^{n-3}y^{5-n}-xy^{4-n}$

Đa thức A chia hết cho đơn thức B thì

$$\begin{cases} n-3\ge 0 \\ 5-n\ge 0 \\ 4-n\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\ge 3 \\ n\le 5 \\ n\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le n\le 4$$

Do $n\in\mathbb{N}$ nên $n=3$ hoặc $n=4$.

Vậy với $n=3$ hoặc $n=4$ thì đa thức A chia hết cho đơn thức B.

Chia đa thức cho đa thức

Bài 8. Rút gọn biểu thức $\left[\left(x^3+y^3\right)-2\left(x^2-y^2\right)+3(x+y)^2\right]:\left(x+y\right)$

Lời giải

$$\left[\left(x^3+y^3\right)-2\left(x^2-y^2\right)+3(x+y)^2\right]:\left(x+y\right)$$

$$=\left[\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)-2\left(x+y\right)\left(x-y\right)+3(x+y)^2\right]:\left(x+y\right)$$

$$=x^2-xy+y^2-2\left(x-y\right)+3\left(x+y\right)$$

$$=x^2-xy+y^2-2x+2y+3x+3y$$

$$=x^2-xy+y^2+x+5y$$

Bài 9. Chia các đa thức

a) $\left(3x^4-2x^3-2x^2+4x-8\right):\left(x^2-2\right)$ b) $\left(2x^3-26x-24\right):\left(x^2+4x+3\right)$;

c) $\left(x^3-7x+6\right):\left(x+3\right)$

Lời giải

a)

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 3x^4 & -2x^3 & -2x^2 & +4x & -8 & x^2 \quad -2 \\ \cline{7-7}
- & 3x^4 & & -6x^2 & & & 3x^2 \quad -2x \quad +4 \\ \cline{1-6}
 & & -2x^3 & +4x^2 & +4x & -8 & \\
 & - & -2x^3 & & +4x & & \\ \cline{2-6}
 & & & 4x^2 & & -8 & \\
 & & - & 4x^2 & & -8 & \\ \cline{3-6}
 & & & & 0 & &
\end{array}$$

Vậy $\left(3x^4-2x^3-2x^2+4x-8\right):\left(x^2-2\right)=3x^2-2x+4$

b)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2x^3 & & -26x & -24 & x^2 \quad +4x \quad +3 \\ \cline{6-6}
- & 2x^3 & +8x^2 & +6x & & 2x \quad -8 \\ \cline{1-5}
 & & -8x^2 & -32x & -24 & \\
 & - & -8x^2 & -32x & -24 & \\ \cline{2-5}
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Vậy $\left(2x^3-26x-24\right):\left(x^2+4x+3\right)=2x-8$

c)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & x^3 & & -7x+6 & x+3 \\
- & x^3 & +3x^2 & & \hline x^2-3x+2 \\
\hline
 & & -3x^2 & -7x+6 & \\
 & - & -3x^2 & -9x & \\
\hline
 & & & 2x+6 & \\
 & & - & 2x+6 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Vậy $\left(x^3-7x+6\right):\left(x+3\right)=x^2-3x+2$

Bài 10. Xác định hằng số a sao cho:

a) $4x^2-6x+a$ chia hết cho $x-3$;

b) $2x^2+x+a$ chia hết cho $x+3$;

c) x^3+ax^2-4 chia hết cho x^2+4x+4.

Lời giải

a) Xét phép chia:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 4x^2 & -6x & +a & x-3 \\
- & 4x^2 & -12x & & \hline 4x+6 \\
\hline
 & & 6x & +a & \\
 & - & 6x & -18 & \\
\hline
 & & & a+18 &
\end{array}
$$

Để $4x^2-6x+a$ chia hết cho $x-3$ thì $a+18=0 \Leftrightarrow a=-18$.

Vậy với $a=-18$ thì $4x^2-6x+a$ chia hết cho $x-3$.

b) Xét phép chia:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 2x^2 & +x & +a & x+3 \\
- & 2x^2 & +6x & & \hline 2x-5 \\
\hline
 & & -5x & +a & \\
 & - & -5x & -15 & \\
\hline
 & & & a+15 &
\end{array}
$$

Để $2x^2+x+a$ chia hết cho $x+3$ thì $a+15=0 \Leftrightarrow a=-15$.

Vậy với $a=-15$ thì $2x^2+x+a$ chia hết cho $x+3$

c) Giải tương tự câu a), câu b) ta được $a=3$.

Bài 11. Xác định hằng số a sao cho:

a) $10x^2-7x+a$ chia hết cho $2x-3$;

b) $2x^2+ax+1$ chia cho $x-3$ dư 4 ;

c) ax^5+5x^4-9 chia hết cho $x-1$.

Lời giải

a) Xét phép chia:

$$\begin{array}{rrr|l} 10x^2 & -7x & +a & 2x \quad -3 \\ \cline{4-4} -\ 10x^2 & -15x & & 5x \quad +4 \\ \cline{1-3} & 8x & +a & \\ & -\ 8x & -12 & \\ \cline{2-3} & & a+12 & \end{array}$$

Để $10x^2-7x+a$ chia hết cho $2x-3$ thì $a+12=0 \Leftrightarrow a=-12$.

Vậy với $a=-12$ thì $10x^2-7x+a$ chia hết cho $2x-3$.

b) Giải tương tự câu a) ta được $a=-5$.

c) Giải tương tự câu a) ta được $a=4$.

Bài 12. Xác định các hằng số a,b sao cho:

a) x^4+ax+b chia hết cho x^2-4;

b) x^4+ax^3+bx-1 chia hết cho x^2-1;

c) x^3+ax+b chia hết cho x^2+2x-2.

Lời giải

a) Xét phép chia

$$\begin{array}{rrrr|l} x^4 & & +ax & +b & x^2 \quad -4 \\ \cline{5-5} -\ x^4 & -4x^2 & & & x^2 \quad +4 \\ \cline{1-4} & 4x^2 & +ax & +b & \\ & -\ 4x^2 & & -16 & \\ \cline{2-4} & & ax & +(b+16) & \end{array}$$

Để x^4+ax+b chia hết cho x^2-4 thì đa thức dư $ax+b+16$ phải đồng nhất 0. Do đó $a=0$, $b=-16$

Vậy với $a=0,b=-16$ thì x^4+ax+b chia hết cho x^2-4

b) Giải tương tự câu a) ta được $a+b=0$ (tức là a tùy ý, $b=-a$).

c) Giải tương tự câu a) ta được $a=-6,b=4$.

Bài 13. Xác định các hằng số a,b sao cho

a) x^4+ax^2+b chia hết cho x^2-x+1;

b) $ax^3+bx^2+5x-50$ chia hết cho $x^2+3x-10$;

c) ax^4+bx^3+1 chia hết cho x^2+ax+b;

d) x^4+4 chia hết cho x^2+ax+b.

Lời giải

a) Xét phép chia

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & x^4 & & +ax^2 & & +b & x^2-x+1 \\
- & x^4 & -x^3 & +x^2 & & & \overline{x^2+x+a} \\
\hline
 & & x^3 & +(a-1)x^2 & & +b & \\
- & & x^3 & -x^2 & +x & & \\
\hline
 & & & ax^2 & -x & +b & \\
- & & & ax^2 & -ax & +a & \\
\hline
 & & & & (-1+a)x & +(b-a) &
\end{array}
$$

Để x^4+ax^2+b chia hết cho x^2-x+1 thì đa thức dư $(a-1)x+b-a$ đồng nhất đa thức 0 nên $a=1$ và $b=a=1$

Vậy với $a=b=1$ thì x^4+ax^2+b chia hết cho x^2-x+1.

b) Giải tương tự câu a) ta được $a=1, b=8$.

c) Giải tương tự câu a) ta được $a=3, b=-4$.

d) Ta có: $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$

Do đó để x^4+4 chia hết cho x^2+ax+b thì $a=\pm 2$ và $b=2$.

Bài 14. Tìm các hằng số a và b sao cho x^3+ax+b chia cho $x+1$ thì dư 7, chia cho $x-3$ thì dư -5

Lời giải

Vì x^3+ax+b chia cho $x+1$ thì dư 7 nên $x^3+ax+b=(x+1)\cdot P(x)+7$.

Với $x=-1$ thì $-1-a+b=7$ hay $a=b-8$

Tương tự x^3+ax+b chia cho $x-3$ thì dư -5, tức là $x^3+ax+b=(x-3)\cdot Q(x)-5$.

Khi đó, với $x=3$ thì $27+3a+b=-5$ hay $3a+b=-32$.

Từ (1) và (2) suy ra $a=-10, b=-2$.

Bài 15. Tìm các hằng số a,b,c sao cho ax^3+bx^2+c chia hết cho $x+2$, chia cho x^2-1 thì dư $x+5$.

Lời giải

Ta có ax^3+bx^2+c chia hết cho $x+2$ nên $ax^3+bx^2+c=(x+2)\cdot A(x)$.

Khi đó, với $x=-2$ thì $-8a+4b+c=0$.

Tương tự, ax^3+bx^2+c chia cho x^2-1 thì dư $x+5$, tức là

$$ax^3+bx^2+c=(x+1)(x-1)\cdot B(x)+x+5$$

Lần lượt cho $x=1$, $x=-14$ ta được $a+b+c=6$ và $-a+b+c=4$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $a=1$, $b=1$ và $c=4$

Chương 2 PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Bài 1

TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC, RÚT GỌN PHÂN THỨC.

1 Tóm tắt lý thuyết

Phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A và B là các đa thức, $B\neq 0$. Phân thức đại số có các tính chất cơ bản sau:

- Nếu nhân cả tử thức và mẫu thức của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

- Nếu chia cả tử thức và mẫu thức của một phân thức cho cùng một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

Muốn rút gọn một phân thức đại số, ta có thể:

- Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử;

- Chia cả tử thức và mẫu thức cho nhân tử chung.

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho phân thức: $M=\dfrac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2}{(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)}$

1. Tìm giá trị a,b,c để phân thức được xác định (tức là để mẫu khác 0).

2. Rút gọn phân thức M.

Lời giải

1. Ta có:

$$(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=0$$
$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca=0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=0$$
$$\Leftrightarrow a+b=b+c=c+a=0$$
$$\Leftrightarrow a=b=c=0$$

Với điều kiện để phân thức M được xác định là a,b,c không đồng thời bằng 0.

2. Chú ý rằng $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ac\right)$.

Do đó, ta đặt $a^2+b^2+c^2=x$, $ab+bc+ca=y$.

Khi đó $(a+b+c)^2=x+2y$. Ta có

$$M=\frac{x\left(x+2\right)+y^2}{x+2y-y}=\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}=\frac{(x+y)^2}{x+y}=x+y$$
$$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{a^2\left(b-c\right)+b^2\left(c-a\right)+c^2\left(a-b\right)}$$

Lời giải

Phân tích mẫu thức thành nhân tử:

$$a^2\left(b-c\right)+b^2\left(c-a\right)+c^2\left(a-b\right)=a^2\left(b-c\right)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$$
$$=a^2\left(b-c\right)+bc\left(b-c\right)-a\left(b^2-c^2\right)$$
$$=\left(b-c\right)\left(a^2+bc-ab-ac\right)$$
$$=\left(b-c\right)\left[a\left(a-b\right)-c\left(a-b\right)\right]$$
$$=\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(a-c\right).$$

Do đó $A=\dfrac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

Ta có nhận xét: Nếu $x+y+z=0$ thì $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Đặt $b-c=x,c-a=y,a-b=z$ thì $x+y+z=0$. Theo nhận xét trên

$$A=\frac{x^3+y^3+z^3}{-xyz}=\frac{3xyz}{-xyz}=-3$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n n thì phân số $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Để chứng minh phân số đã cho là tối giản, ta sẽ chứng tỏ rằng tử và mẫu chỉ có ước chung là ± 1.

Gọi d là ước của n^3+2n và n^4+3n^2+1.

Ta có: $n^3+2n \vdots d \Rightarrow n\left(n^3+2n\right) \vdots d \Rightarrow n^4+2n^2 \vdots d$ (1)

$$n^4+3n^2+1-\left(n^4+2n^2\right)=n^2+1 \vdots d \Rightarrow \left(n^2+1\right)^2=n^4+2n^2+1 \vdots d \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\left(n^4+2n^2+1\right)-\left(n^4+2n^2\right) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=\pm 1$

Vậy $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ là phân số tối giản.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng:

$$1+x+x^2+x^3+...+x^{31}=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \quad (1)$$

Lời giải

Gọi vế trái của đẳng thức (1) là A, vế phải là B.

Ta có: $(1-x).A=1-x^{32}$ (theo hằng đẳng thức).

$$(1-x).B=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})=1-x^{32}$$

Nếu $x \neq 1$ thì A và B đều bằng $1-x^{32}$. Do đó $A=B$

Nếu $x=1$ thì A và B đều bằng 32. Do đó $A=B$

Trong cả hai trường hợp, đẳng thức (1) đều đúng.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Tìm giá trị của x để các phân thức sau bằng 0 :

a) $\dfrac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}$;

b) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}$

Lời giải

a) Phân thức $\dfrac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}$ bằng 0 khi tử thức bằng 0 và mẫu thức khác 0 .

Ta có: $x^4+x^3+x+1=0$

$\Leftrightarrow x^3(x+1)+(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^3+1)=0$

$\Leftrightarrow x=-1$

Thay $x=-1$ vào mẫu thức ta được $(-1)^4-(-1)^3+2(-1)^2-(-1)+1\neq 0$.

Vậy $x=-1$ thỏa yêu cầu bài.

b) Phân thức $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}$ bằng 0 khi tử thức bằng 0 và mẫu thức khác 0.

Ta có: $x^4-5x^2+4=0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=0$

Với $x^2=1$ thay vào mẫu thức, ta được $1-10+9=0$ nên loại.

Với $x^2=4$ thay vào mẫu thức, ta được $(4)^2-10\cdot 4+9\neq 0$ nên $x=\pm 2$ thỏa yêu cầu bài.

Bài 2. Rút gọn các phân thức:

a) $A=\dfrac{1235\cdot 2469-1234}{1234\cdot 2469}$;

b) $B=\dfrac{4002}{1000\cdot 1002-999\cdot 1001}$

Lời giải

a) Đặt $x=1234$. Ta có $A=\dfrac{(x+1)(2x+1)-x}{x(2x+1)+x+1}$

$=\dfrac{2x^2+2x+1}{2x^2+2x+1}$

$=1$

b) Đặt $x=1000$. Ta có $B=\dfrac{4x+2}{x(x+2)-(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{2(2x+1)}{x^2+2x-(x^2-1)}$

$=\dfrac{2(2x+1)}{2x+1}$

$=2$

Bài 3. Rút gọn các phân thức:

a) $\dfrac{3x^3-7x^2+5x-1}{2x^3-x^2-4x+3}$; b) $\dfrac{(x-y)^3-3xy(x+y)+y^3}{x-6y}$; c) $\dfrac{x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz}{x^2-2xy+y^2-z^2}$

Lời giải

a) $\dfrac{3x^3-7x^2+5x-1}{2x^3-x^2-4x+3}=\dfrac{(3x-1)(x-1)^2}{(2x+3)(x-1)^2}=\dfrac{3x-1}{2x+3}$

b) $\dfrac{(x-y)^3-3xy(x+y)+y^3}{x-6}=\dfrac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-3x^2y-3xy^2+y^3}{x-6y}$

$=\dfrac{x^2(x-6y)}{x-6y}$

$=x^2$

c) $\dfrac{x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz}{x^2-2xy+y^2-z^2}=\dfrac{(x-y+z)^2}{(x-y+z)(x-y-z)}=\dfrac{x-y+z}{x-y-z}$

Bài 4. Rút gọn các phân thức với n là số tự nhiên:

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!(n+2)}$; b) $\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$; c) $\dfrac{(n+1)!-(n+2)!}{(n+1)!+(n+2)!}$.

Lời giải

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!(n+2)}=\dfrac{n!(n+1)}{n!(n+2)}=\dfrac{n+1}{n+2}$

b) $\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}=\dfrac{n!}{n!(n+1-1)}=\dfrac{1}{n}$

c) $\dfrac{(n+1)!-(n+2)!}{(n+1)!+(n+2)!}=\dfrac{(n+1)!-(n+1)!(n+2)}{(n+1)!+(n+1)!(n+2)}=\dfrac{(n+1)!(-n-1)}{(n+1)!(n+3)}=\dfrac{-n-1}{n+3}$

 Bài 5. Rút gọn các phân thức:

a) $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}$; b) $\dfrac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}$;

c) $\dfrac{x^3-y^3+z^3+3xyz}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z-x)^2}$; d) $\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$.

Lời giải

a) $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}=\dfrac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(b+c)}=\dfrac{a-c}{b+c}$;

b) $\dfrac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}=\dfrac{(x-3)^2(2x+5)}{(x-3)^2(3x-1)}=\dfrac{2x+5}{3x-1}$;

c) $\dfrac{x^3-y^3+z^3+3xyz}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z-x)^2}=\dfrac{1}{2}(x-y+z)$

d) $\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}=\dfrac{1}{2}(x+y+z)$

 Bài 6. Chứng minh rằng các phân số sau tối giản với mọi số tự nhiên n :

a) $\dfrac{3n+1}{5n+2}$; b) $\dfrac{12n+1}{30n+2}$; c) $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$; d) $\dfrac{2n+1}{2n^2-1}$.

Lời giải

a) Giả sử $(3n+1,5n+2)=d$.

Ta có: $3(5n+2)-5(3n+1)\vdots d \Rightarrow 1\vdots d \Rightarrow d=\pm1$

Vậy phân số $\dfrac{3n+1}{5n+2}$ là phân số tối giản.

b) Giả sử $(12n+1,30n+2)=d$.

Ta có $5(12n+1)-3(30n+2)\vdots d \Rightarrow -1\vdots d \Rightarrow d=\pm1$

Vậy phân số $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

c) Giả sử: $(n^4+3n^2+1,n^4+3n^2+1)=d$

Ta có $(n^4+3n^2+1)-n(n^3+2n)=n^2+1\vdots d$.

Do đó $(n^4+3n^2+1)-(n^2+1)^2=n^2\vdots d$.

Suy ra $1\vdots d \Rightarrow d=\pm1$

Vậy phân số $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ là phân số tối giản.

d) Giả sử $d\in(C)(2n+1,2n^2-1)\Rightarrow n(2n+1)-(2n^2-1)=n+1\vdots d \Rightarrow 2n+2\vdots d$

$$\Rightarrow(2n+2)-(2n+1)=1\vdots d \Rightarrow d=\pm1$$

Vậy phân số $\dfrac{2n+1}{2n^2-1}$ là phân số tối giản.

Bài 7. Chứng minh rằng phân số $\dfrac{n^7+n^2+1}{n^8+n+1}$ không tối giản với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

Ta có: $n^7+n^2+1=(n^2+n+1)(n^5-n^4+n^2-n+1)$

và $n^8+n+1=(n^6-n^5+n^3-n^2+1)(n^2+n+1)$

Tử và mẫu cùng chứa thừa số n^2+n+1 lớn hơn 1 nên phân số $\dfrac{n^7+n^2+1}{n^8+n+1}$ không tối giản với mọi số nguyên dương n.

Bài 8. Viết gọn biểu thức dưới dạng một phân thức:

$$\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^8-x^4+1\right)\left(x^{16}-x^8+1\right)\left(x^{32}-x^{16}+1\right)$$

Lời giải

Đặt $A=\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^8-x^4+1\right)\left(x^{16}-x^8+1\right)\left(x^{32}-x^{16}+1\right)$.

Nhân biểu thức A với x^2+x+1, ta được:

$$\left(x^2+x+1\right)\cdot A=\left(x^{64}+x^{32}+1\right).$$

Do $x^2+x+1\neq 0$ nên $A=\dfrac{x^{64}+x^{32}+1}{x^2+x+1}$

Bài 9. Cho biết x,y,z khác 0 và $\dfrac{(ax+by+cz)^2}{x^2+y^2+z^2}=a^2+b^2+c^2$. Chứng minh $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{(ax+by+cz)^2}{x^2+y^2+z^2}=a^2+b^2+c^2$

$\Leftrightarrow (ax)^2+(by)^2+(cz)^2+2abxy+2acxz+2bcyz=\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$\Leftrightarrow (ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2=0$

Do đó ta được: $\begin{cases} ay-bx=0 \\ az-cx=0 \\ bz-cy=0 \end{cases}$

Suy ra $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$

Bài 10. Cho biết $ax+by+cz=0$. Rút gọn $A=\dfrac{bc(y-z)^2+ca(x-z)^2+ab(x-y)^2}{ax^2+by^2+cz^2}$.

Lời giải

Ta có: $B=bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+(bz-cy)^2=0$

$$=bcy^2+bcz^2+cax^2+abx^2+aby^2-2(bcyz+acxz+abxy) \quad (1)$$

Từ giả thiết ta suy ra $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(bcyz+acxz+abxy)=0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $B=ax^2(b+c)+by^2(a+c)+cz^2(a+b)+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$

$$=ax^2(a+b+c)+by^2(a+b+c)+cz^2(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2).$$

Do đó $A=\dfrac{B}{ax^2+by^2+cz^2}=a+b+c$

Bài 11. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}$, biết rằng $x+y+z=0$.

Lời giải

Ta có: $x+y+z=0$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=-(2xy+2xz+2yz)$$

Do đó: $A=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{2x^2+2y^2+2z^2-(2xy-2xz-2yz)}$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{3(x^2+y^2+z^2)}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

Bài 12. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x-y}{x+y}$, biết $x^2-2y^2=xy\left(y\ne 0;x+y\ne 0\right)$.

Lời giải

Ta có: $x^2-xy-2y^2=0 \Leftrightarrow x^2+xy-2xy-2y^2=0$

$\Leftrightarrow x\left(x+y\right)-2y\left(x+y\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(x-2y\right)=0.$

Do $x+y\ne 0$ nên $x=2y$. Vậy $A=\dfrac{2y-y}{2y+y}=\dfrac{y}{3y}=\dfrac{1}{3}$.

Bài 13. Tính giá trị của phân thức $A=\dfrac{3x-2y}{3x+2y}$, biết rằng $9x^2+4y^2=20xy$ và $2y<3x<0$.

Lời giải

Ta có $A^2=\dfrac{9x^2+4y^2-12xy}{9x^2+4y^2+12xy}=\dfrac{20xy-12xy}{20xy+12xy}=\dfrac{8xy}{32xy}=\dfrac{1}{4}$

Do $2y<3x<0 \Rightarrow 3x-2y>0, 3x+2y<0 \Rightarrow A<0$. Vậy $A=-\dfrac{1}{2}$

Bài 14. Cho $3x-y=3z$ và $2x+y=7z$. Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{x^2-2xy}{x^2+y^2}\left(x\ne 0,y\ne 0\right)$.

Lời giải

Ta có hệ: $\begin{cases}3x-y=3z\\2x+y=7z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2z\\y=3z\end{cases}$.

Thay vào biểu thức M ta được: $M=\dfrac{4z^2-2\cdot 2z\cdot 3z}{4z^2+9z^2}=\dfrac{-8z^2}{13z^2}=-\dfrac{8}{13}$

Bài 15. . Tìm số nguyên x để phân thức sau có giá trị là số nguyên:

a) $\dfrac{3}{2x-1}$; b) $\dfrac{5}{x^2+1}$; c) $\dfrac{7}{x^2-x+1}$;

d) $\dfrac{x^2-59}{x+8}$; e) $\dfrac{x+2}{x^2+4}$.

Lời giải

a) Để $\dfrac{3}{2x-1}$ có giá trị là số nguyên thì $2x-1\in\{-3;-1;1;3\}$. Do đó $x\in\{-1;0;1;2\}$.

b) Để $\dfrac{5x-1}{x^2+1}$ có giá trị là số nguyên thì $x^2+1\in\{1;5\}$. Do đó $x\in\{-2;0;2\}$.

c) Để $\dfrac{7}{x^2-x+1}$ có giá trị là số nguyên thì $x^2-x+1\in\{-7;-1;1;7\}$. Do đó $x\in\{-2;0;1;3\}$.

d) Để $\dfrac{x^2-59}{x+8}$ có giá trị là số nguyên thì $x^2-59\,\vdots\,x+8 \Leftrightarrow x^2-64+5\,\vdots\,x+8 \Leftrightarrow 5\,\vdots\,x+8$.

Do đó $x\in\{-13;-9;-7;-3\}$.

e) Để $\dfrac{x+2}{x^2+4}$ có giá trị là số nguyên thì

$$x+2\,\vdots\,x^2+4 \Rightarrow (x+2)(x-2)\,\vdots\,x^2+4 \Rightarrow x^2+4-8\,\vdots\,x^2+4 \Rightarrow 8\,\vdots\,x^2+4$$

Xét $x^2+4=4 \Leftrightarrow x=0$ (không thỏa).

Xét $x^2+4=8 \Leftrightarrow x=\pm 2$; thử lại ta thấy $x=-2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 16. Tìm số hữu tỉ x để phân thức $\dfrac{10}{x^2+1}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Đặt $\dfrac{10}{x^2+1}=k\in\mathbb{Z}$, ta có $kx^2+k=10$ nên $x^2=\dfrac{10-k}{k}$.

Ta phải có $\dfrac{10-k}{k}\le 0$ nên có $0<k\le 10$. Ta có bảng sau:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2=\dfrac{10-k}{k}$	9	4	$\dfrac{7}{3}$	$\dfrac{3}{2}$	1	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{9}$	0
$x\in\mathbb{Q}$	± 3	± 2			± 1			$\pm\dfrac{1}{2}$	$\pm\dfrac{1}{3}$	0

Vậy $x = \pm 3; \pm 2; \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{3}; 0$.

Bài 17. Chứng minh rằng nên các chữ số a, b, c khác 0 thỏa mãn điều kiện $\overline{ab} : \overline{cbc} = a : c$ thì $\overline{abbb} : \overline{bbbc} = a : c$.

Lời giải

Ta có: $\overline{abbb} : c = (1000a + 111b)c = 1000ac + 111bc$

$= ac + 111c(9a + b).\ a\ .\ \overline{bbbc}$

$= a(1110b + c)$

$= ac + 1110ab$

Ta cần chứng minh $111c(9a + b) = 111ab$, tức là $c(9a + b) = 10ab$

Theo giả thiết ta có

$\overline{ab}.c = \overline{bc}.a \quad \Rightarrow (10a + b)c = (10b + c).a$

$\Rightarrow 10ac + bc = 10ab + ac$

$\Rightarrow 9ac + bc = 10ab$

$\Rightarrow c(9a + b) = 10ab$

Bài 18.

Điểm trung bình môn Toán của các học sinh nam và nữ hai lớp 8A và 8B được thống kê ở bảng sau:

	Lớp 8A	Lớp 8B	Cả hai lớp 8A và 8B
Nam	7,1	8,1	7,9
Nữ	7,6	9,0	
Cả lớp	7,4	8,4	

Tính điểm trung bình môn Toán của các học sinh cả hai lớp $8A$ và $8B$.

Lời giải

Gọi số học sinh nam và nữ của hai lớp 8A theo thứ tự là a a và b, số học sinh nam và nữ của lớp 8B theo thứ tự là c và d d. Ta cần tìm $\frac{7,6b+9d}{b+d}$. Ta có:

$$\frac{7,1a+7,6b}{a+b}=7,4 \qquad (1)$$

$$\frac{8,1c+9d}{c+d}=8,4 \qquad (2)$$

$$\frac{7,1a+8,1c}{a+c}=7.9 \qquad (3)$$

Từ (1) suy ra $b=1,5a$. Từ (3) suy ra $c=4a$. Từ (2) suy ra $d=0,5c$, do đó $d=2a$. Ta được:

$$\frac{7,6b+9d}{b+d}=\frac{7,6.1,5a+9a}{1,5a+2a}=8,4$$

Vậy điểm trung bình phải tìm là 8,4 .

Bài 2

CÁC PHÉP TOÁN VỀ PHÂN THỨC

1 Tóm tắt lý thuyết

Muốn cộng các phân thức, ta quy đồng mẫu thức, cộng các tử thức với nhau, giữ nguyên mẫu thức chung, rồi rút gọn phân thức vừa tìm được.

Muốn trừ đi một phân thức, ta lấy phân thức bị trừ cộng với phân thức đối của phân thức trừ. Muốn nhân các phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau, rồi rút gọn phân thức vừa tìm được.

Muốn chia cho một phân thức khác 0, ta lấy phân thức bị chia nhân với phân thức nghịch đảo của phân thức chia.

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho $a+b+c=0$ và a,b,c đều khác 0. Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{ab}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca}{c^2+a^2-b^2}$$

Lời giải

Từ $a+b+c=0$ suy ra $a+b=-c$

Bình phương hai vế, ta được $a^2+b^2+2ab=c^2$ nên $a^2+b^2-c^2=-2ab$

Tương tự, $b^2+c^2-a^2=-2bc$ và $c^2+a^2-b^2=-2ca$

Do đó, $A=\frac{ab}{-2ab}+\frac{bc}{-2bc}+\frac{ca}{-2ca}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}$$

Lời giải

Do đặc điểm của bài toán, ta không quy đồng mẫu tất cả các phân thức mà cộng lần lượt từng phân thức.

$$A=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{16}{1-x^{16}}$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức:

$$B=\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+...+\frac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}$$

Lời giải

Đương nhiên không thể quy đồng mẫu tất cả các phân thức. Ta tìm cách tách mỗi phân thức thành hiệu của hai phân thức rồi dùng phương pháp khử liên tiếp. Ta có

$$\frac{2k+1}{\left[k(k+1)\right]^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2\left(k^2+1\right)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

Do đó

$$B=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

Ví dụ 4. Xác định các số *a, b, c* sao cho:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)(x-1)}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x-1} \qquad (1)$$

Lời giải

Thực hiện phép cộng ở vế phải của (1) ta được

$$\frac{(ax+b)(x-1)+c\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)(x-1)}=\frac{ax^2-ax+bx-b+cx^2+c}{\left(x^2+1\right)(x-1)}=\frac{(a+c)x^2+(b-a)x+(c-b)}{\left(x^2+1\right)(x-1)}$$

Đồng nhất phân thức trên với phân thức $\frac{1}{\left(x^2+1\right)(x-1)}$, ta được

$$\begin{cases}a+c=0\\b-a=0\\c-b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c+b=0\\c-b=1\end{cases}\Rightarrow c=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}.$$

Do đó $a=-\frac{1}{2}$. Như vậy $\frac{1}{\left(x^2+1\right)(x-1)}=\frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}$

Ví dụ 5. Cho

$$A=\frac{1}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right)$$

$$B=\frac{1}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right)$$

$$C=\frac{1}{(x+y)^5}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$$

Thực hiện phép tính *A* + *B* + *C*.

Lời giải

Ta có

$$A=\frac{y^4-x^4}{x^4y^4(x+y)^3}=\frac{(y^2+x^2)(y^2-x^2)}{x^4y^4(x+y)^3}=\frac{(y^2+x^2)(y-x)}{x^4y^4(x+y)^2}.$$

$$B+C=\frac{2}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}+\frac{1}{x+y}\cdot\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}\right)$$

$$=\frac{2}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}+\frac{y-x}{x^2y^2}\right)=\frac{2}{(x+y)^4}\cdot\frac{y^3-x^3+xy(y-x)}{x^3y^3}$$

$$=\frac{2}{(x+y)^4}\cdot\frac{(y-x)(y^2+2yx+x^2)}{x^3y^3}=\frac{2(y-x)}{(x+y)^2x^3y^3}$$

Do đó,

$$A+B+C=\frac{(y^2+x^2)(y-x)}{x^4y^4(x+y)^2}+\frac{2(y-x)}{(x+y)^2x^3y^3}$$

$$=\frac{(y^2+x^2)(y-x)+2xy(y-x)}{x^4y^4(x+y)^2}=\frac{(y-x)(y^2+x^2+2xy)}{x^4y^4(x+y)^2}=\frac{y-x}{x^4y^4}$$

3 Bài tập tự luyện

Bài 1.

Thực hiện các phép tính

1) $\frac{x+3}{x+1}-\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-1}$

2) $\dfrac{1}{x(x+y)}+\dfrac{1}{y(x+y)}+\dfrac{1}{x(x-y)}+\dfrac{1}{y(y-x)}$

Lời giải

1) $\dfrac{x+3}{x+1}-\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{x-3}{x^2-1}=\dfrac{(x+3)(x-1)-(2x-1)(x+1)-(x-3)}{x^2-1}=\dfrac{-x^2+1}{x^2-1}=-1$

2) $\dfrac{1}{x(x+y)}+\dfrac{1}{y(x+y)}+\dfrac{1}{x(x-y)}+\dfrac{1}{y(y-x)}=\dfrac{x+y}{xy(x+y)}+\dfrac{y-x}{xy(x-y)}=\dfrac{1}{xy}-\dfrac{1}{xy}=0$

Bài 2. Thực hiện phép tính

1) $A=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$;

2) $B=\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

3) $C=\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ac}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$;

4) $D=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$;

Lời giải

1) $A=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{c-b+a-c+b-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$

2) Ta có

$$B=\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

$$=\dfrac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\dfrac{c\left(b^2-bc-a^2+ac\right)+ab(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\dfrac{c\left[(b-a)(b+a)-c(b-a)\right]+ab(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\dfrac{(a-b)\left(-cb-ca+c^2\right)+ab(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(-cb-ca+c^2+ab)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{1}{abc}$$

3) Ta có

$$C = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{c(b^2 - bc - a^2 + ac) + ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{c[(b-a)(b+a) - c(b-a)] + ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(-cb-ca+c^2) + ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(-cb-ca+c^2+ab)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 1$$

4) Ta có

$$D = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{a^2(b-c) - b^2a + b^2c + c^2a - c^2b}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(b-c)\left(a^2-ab-ac+cb\right)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(b-c)\left[a(a-b)-c(a-b)\right]}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=1$$

🗁 **Bài 3.** Cho *a*, *b*, *c*là các số nguyên khác nhau đôi một. Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị là một số nguyên:

$$P=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

Lời giải

Ta có

$$P=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

Phân tích tử thành nhân tử

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=a^3b-a^3c+b^3c-b^3a+c^3(a-b)$$

$$=\left(a^3b-b^3a\right)-\left(a^3c-b^3c\right)+c^3(a-b)$$

$$=ab(a-b)(a+b)-c(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)+c^3(a-b)$$

$$=(a-b)\left(a^2b+ab^2-ca^2-cb^2-abc+c^3\right)$$

$$=(a-b)\left[\left(c^3-cb^2\right)-\left(abc-ab^2\right)+\left(a^2b-ca^2\right)\right]$$

$$=(a-b)(b-c)\left(-cb-c^2+ab+a^2\right)$$

$$=(a-b)(b-c)\left[(ab-cb)+\left(a^2-c^2\right)\right]$$

$$=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$$

Vậy $P=a+b+c$

🗁 **Bài 4.** Cho $3y-x=6$. Tính giá trị biểu thức $A=\frac{x}{y-2}+\frac{2x-3y}{x-6}$.

Lời giải

$$A=\frac{x}{y-2}+\frac{2x-3y}{x-6}=\frac{3y-6}{y-2}+\frac{2x-x-6}{x-6}=3+1=4$$

Bài 5. Tìm x,y,z biết rằng $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=\frac{x^2+y^2+z^2}{5}$.

Lời giải

Từ $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=\frac{x^2+y^2+z^2}{5}$ suy ra $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{5}\right)+\left(\frac{y^2}{3}-\frac{y^2}{5}\right)+\left(\frac{z^2}{4}-\frac{z^2}{5}\right)=0$

Cho nên $\frac{3x^2}{10}+\frac{2y^2}{15}+\frac{z^2}{20}=0$. Do đó, $x=y=z=0$

Bài 6. Tìm x,y biết rằng $x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4$

Lời giải

Ta có

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4\Rightarrow\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(y^2-2+\frac{1}{y^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-\frac{1}{x}=0\\ y-\frac{1}{y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=1\\ y^2=1\end{cases}$$

Có bốn đáp án như bảng sau

x	1	1	-1	-1
y	1	-1	1	-1

Bài 7. Cho biết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2,$ (1)

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2 \qquad (2)$$

Chứng minh rằng: $a+b+c=abc$

Lời giải

Từ (1) suy ra: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=4$

Do (2) nên $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$ suy ra $\frac{a+b+c}{abc}=1$.

Do đó: $a+b+c=abc$

🗁 **Bài 8.** Cho : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ (1)

Và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$ (2)

Tính giá trị biểu thức $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}$.

Lời giải

Từ (1) suy ra $bcx+acy+abz=0$

Từ (2) suy ra $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}+\left(\frac{ab}{xy}+\frac{yzbc}{yz}+\frac{ca}{xz}\right)=4$

Do đó $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}=4-2\frac{abz+acy+bcx}{xyz}=4$

🗁 **Bài 9.** Cho $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$ và a, b, c khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra: $ab+bc+ca=0 \Rightarrow b+c=-\frac{bc}{a}$

Do đó $\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$, tức là $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

Suy ra $\frac{1}{a}=-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \Rightarrow \frac{1}{a^3}=-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3=-\frac{1}{b^3}-\frac{1}{c^3}-3\left(\frac{1}{bc^2}+\frac{1}{b^2c}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=-\frac{3(b+c)}{b^2c^2}=\frac{3bc}{ab^2c^2}=\frac{3}{abc}$

🗁 **Bài 10.** Cho $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}$. Chứng minh rằng trong ba số a,b,c tồn tại hai số bằng nhau.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra

$$a^2c+b^2a+c^2b=b^2c+a^2b+c^2a \quad \Rightarrow a^2(c-b)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)=0$$

$$\Rightarrow (c-b)(a^2-ac-ab+bc)=0$$

$$\Rightarrow (c-b)(a-c)(a-b)=0.$$

Tồn tại một trong các thừa số $c-b,\ a-c,\ a-b$ bằng 0. Do đó, trong ba số a,b,c tồn tại hai số bằng nhau.

Bài 11. Tìm các giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là số nguyên:

1) $A=\dfrac{2x^3-6x^2+x-8}{x-3}$

2) $B=\dfrac{x^4-2x^3-3x^2+8x-1}{x^2-2x+1}$

3) $C=\dfrac{x^4+3x^3+2x^2+6x-2}{x^2+2}$

Lời giải

1) $A=\dfrac{2x^3-6x^2+x-8}{x-3}=2x^2+1-\dfrac{5}{x-3}$

A nguyên khi x nguyên, $x-3$ nguyên và nó là ước của 5.

Suy ra $x-3=1$ hoặc $x-3=-1$ hoặc $x-3=5$ hoặc $x-3=-5$

Hay $x=4$ hoặc $x=2$ hoặc $x=8$ hoặc $x=-2$

2) $B=\dfrac{x^4-2x^3-3x^2+8x-1}{x^2-2x+1}=x^2-4+\dfrac{3}{(x-1)^2}$

B nguyên khi x nguyên, $(x-1)^2$ nguyên và nó là ước của 3

Suy ra $(x-1)^2=1$ hoặc $(x-1)^2=3$

Hay $x-1=1$ hoặc $x-1=-1$ hay $x=2$ hoặc $x=0$

3) $C=\dfrac{x^4+3x^3+2x^2+6x-2}{x^2+2}=x^2+3x-\dfrac{2}{x^2+2}$

C nguyên khi x nguyên, x^2+2 nguyên và nó là ước của 2 .

Suy ra $x^2+2=2$ hay $x=0$

Bài 12. Rút gọn biểu thức sau với $x=\dfrac{a}{3a+2}$

$$A=\frac{x+3a}{2-x}+\frac{x-3a}{2+x}-\frac{2a}{4-x^2}+a$$

Lời giải

$$A=\frac{x+3a}{2-x}+\frac{x-3a}{2+x}-\frac{2a}{4-x^2}+a=\frac{6ax+4x-2a}{4-x^2}+a=\frac{2x(3a+2)-2a}{4-x^2}+a=a$$

Bài 13. Rút gọn biểu thức

$$A=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Lời giải

Đặt $a-b=x, b-c=y, c-a=z$ thì $x+y+z=0$

Ta có: $A=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}+\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$$=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{(x+y+z)^2}{xyz}=0$$

Bài 14. Cho biết $\dfrac{a+b-c}{ab}-\dfrac{b+c-a}{bc}-\dfrac{c+a-b}{ca}=0$. Chứng minh rằng trong ba phân thức ở vế trái, có ít nhất một phân thức bằng 0 .

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a+b-c}{ab}-\frac{b+c-a}{bc}-\frac{c+a-b}{ca}=0 \Leftrightarrow c(a+b-c)-a(b+c-a)-b(c+a-b)=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab-c^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2-c^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)(a-b-c)=0$$

Vậy $a-b+c=0$ hoặc $a-b-c=0$

Bài 15. Xác định các số a,b,c sao cho:

1) $\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$;

2) $\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$;

3) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{x+2}$.

Lời giải

1) Ta có: $\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}=\dfrac{a(x^2+1)+(bx+c)x}{x(x^2+1)}=\dfrac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$

Đồng nhất với phân thức $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ ta được $\begin{cases}a+b=0\\c=1\\a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=0\end{cases}$

2) Ta có: $\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x+2)+b(x-2)}{x^2-4}=\dfrac{(a+b)x+2(a-b)}{x^2-4}$

Đồng nhất với phân thức $\dfrac{1}{x^2-4}$ ta được $\begin{cases}a+b=0\\a-b=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\b=\dfrac{-1}{4}\end{cases}$

3) Ta có $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{x+2}=\dfrac{a(x+1)(x+2)+b(x+2)+c(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)}$

$=\dfrac{(a+c)x^2+(3a+b+2c)x+a+2b+c}{(x+1)^2(x+2)}$

Đồng nhất với phân thức $\dfrac{1}{(x+1)^2(x+2)}$ ta được $\begin{cases}a+c=0\\3a+b+2c=0\\a+2b+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=1\end{cases}$

Bài 16. Rút gọn biểu thức

$$B=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

Lời giải

$$B=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$=(ab+bc+ca)\frac{bc+ca+ab}{abc}-abc\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{(bc+ca+ab)^2}{abc}-\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{abc}$$

$$=\frac{2abc(a+b+c)}{abc}$$

$= 2(a+b+c)$

Bài 17

. Cho a, b, c khác nhau đôi một và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

Rút gọn các biểu thức:

$$1)\ M=\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}$$

$$2) N=\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ac}{b^2+2ac}+\frac{ab}{c^2+2ab}$$

$$3)\ P=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra: ab + bc + ac = 0 nên:

$$a^2+2bc=a^2+bc+(-ab-ac)=a(a-b)-c(a-b)=(a-b)(a-c).$$

Tương tự: $b^2+2ac=(b-a)(b-c)$ và $c^2+2ab=(c-a)(c-b)$.

$$1) M=\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{b-c+c-a+a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)}=0.$$

$$2) N=\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ac}{b^2+2ac}+\frac{ab}{c^2+2ab}$$

$$=\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(-ac-cb+c^2+ab)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{(a-b)\left[-c(a-c)+b(a-c)\right]}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=1.$$

$3)\ P=\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}$

$=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\dfrac{ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$

$=\dfrac{(a-b)(ab-a-bc+c^2)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\dfrac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=1$

Bài 18. Cho các số a, b, c khác nhau đôi một và $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}$.

Tính giá trị biểu thức $M=\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right)$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b+b+c+c+a}{a+b+c}=\dfrac{2(a+b+c)}{a+b+c}$

Nếu $a+b+c\neq 0$ thì tỉ số trên bằng 2 . Suy ra $a+b=2c, b+c=2a$.

Do đó $a-c=2(c-a)$ nên $c=a$, trái với đề bài.

Vậy $a+b+c=0$. Ta có $M=\dfrac{a+b}{b}\cdot\dfrac{b+c}{c}\cdot\dfrac{c+a}{a}=\dfrac{-c}{b}\cdot\dfrac{-a}{c}\cdot\dfrac{-b}{a}=-1$

Bài 19. Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c\neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức $N=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$

Lời giải

Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

Do $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c\neq 0$ nên đẳng thức trên trở thành $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

Lại có

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

Như vậy từ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ suy ra $a=b=c$.

Do đó, $N=\dfrac{3a^2}{(3a)^2}=\dfrac{3a^2}{9a^2}=\dfrac{1}{3}$

Bài 20. Rút gọn biểu thức $A=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Lời giải

Ta có

$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n}\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$$

Bài 21. Rút gọn biểu thức $B=\dfrac{1^2}{2^2-1}\cdot\dfrac{3^2}{4^2-1}\cdot\dfrac{5^2}{6^2-1}\cdots\dfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2-1}$.

Lời giải

Ta có

$$=\frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdots\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2-1}=\frac{1^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{5^2}{5\cdot 7}\cdots\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n+1)^2}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n+1)^2\cdot(2n+3)}=\frac{1}{(2n+3)}$$

Bài 22. Rút gọn biểu thức $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}$

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-1}{n}$

Bài 23. Rút gọn biểu thức $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\dfrac{1}{(3n+2)(3n+5)}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{(3n+2)(3n+5)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{1}{3n+5}\right)$

Do đó

$$\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\dots+\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\dots+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+5}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+5}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3n+5-2}{2(3n+5)}=\frac{n+1}{2(3n+5)}$$

Bài 24. Rút gọn biểu thức $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\dots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$

Do đó

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\dots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)-2}{2n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$$

Bài 25. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq1$, ta luôn có

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{2}$$

Lời giải

Ta có

$$A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)$$

Suy ra $A<\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}\right)$.

Lại có $1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}$.

Do đó $A<\frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{n}\right)$, suy ra $A<\frac{1}{2}$.

Bài 26. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$, ta luôn có

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}$$

Lời giải

Ta có

$$B=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2-1}$$

Lại có

$$\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)$$

Do đó $B<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)$, suy ra $B<\frac{1}{4}$.

Bài 27. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$, ta luôn có

$$A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{2}{3}$$

Lời giải

Nhận xét, với mọi số tự nhiên $n \ge 2$ ta luôn có :

$$\frac{1}{n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Khi đó $A<2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

Lại có $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}$

Do đó $A<2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right)$, suy ra $A<\frac{2}{3}$

Bài 28. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 3$, ta luôn có

$$B=\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{12}$$

Lời giải

Với mọi số tự nhiên n ≥ 3, ta luôn có:

$$\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2}.\frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right].$$

Khi đó: $B < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + ... + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right].$

Lại có: $\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + ... + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{n(n+1)}.$

Do đó: $B < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$,suy ra $B < \frac{1}{12}$.

Bài 29. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta luôn có:

$$A = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right)...\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) < 2$$

Lời giải

Với mọi số tự nhiên n $\geq$ 1, ta có:

$$1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

Khi đó: $A = \frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.\frac{4^2}{3.5}...\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2.3.4...(n+1)}{1.2.3...n}.\frac{2.3.4...(n+1)}{3.4.5...(n+2)}$

$$= \frac{n+1}{1}.\frac{2}{n+2} = 2.\frac{n+2-1}{n+2} = 2\left(1 - \frac{1}{n+2}\right).$$

Do đó $A < 2$.

Bài 30. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta luôn có:

$$B = \left(1 - \frac{2}{6}\right)\left(1 - \frac{2}{12}\right)\left(1 - \frac{2}{20}\right)...\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) > \frac{1}{3}$$

Lời giải

Với mọi số tự nhiên n $\geq$ 2, ta có:

$$1 - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n - 2}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}.$$

Khi đó: $B = \left(1 - \frac{2}{6}\right)\left(1 - \frac{2}{12}\right)\left(1 - \frac{2}{20}\right)...\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}...\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$

$$= \frac{1.2.3...(n-1)}{2.3.4...n}.\frac{4.5.6...(n+2)}{3.4.5...(n+1)} = \frac{1}{n}.\frac{n+2}{3} = \frac{1}{3}.\left(1+\frac{2}{n}\right).$$ Do đó $B > \frac{1}{3}$.

Bài 31. Rút gọn biểu thức $A = \frac{3^2-1}{5^2-1}.\frac{7^2-1}{9^2-1}.\frac{11^2-1}{13^2-1}...\frac{43^2-1}{45^2-1}$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{3^2-1}{5^2-1}.\frac{7^2-1}{9^2-1}.\frac{11^2-1}{13^2-1}...\frac{43^2-1}{45^2-1} = \frac{2.4}{4.6}.\frac{6.8}{8.10}.\frac{10.12}{12.14}...\frac{42.44}{44.46} = \frac{2}{46} = \frac{1}{23}$

Bài 32. Chứng minh rằng $A = \frac{2^3+1}{2^3-1}.\frac{3^3+1}{3^3-1}.\frac{4^3+1}{4^3-1}...\frac{9^3+1}{9^3-1} < \frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có: $\frac{n^3+1}{n^3-1} = \frac{(n+1)\left(n^2-n+1\right)}{(n-1)\left(n^2+n+1\right)} = \frac{(n+1)\left[(n-0,5)^2+0,75\right]}{(n-1)\left[(n+0,5)^2+0,75\right]}$.

Khi đó $A = \frac{3\left(1,5^2+0,75\right)}{1\left(2,5^2+0,75\right)}.\frac{4\left(2,5^2+0,75\right)}{2\left(3,5^2+0,75\right)}.\frac{5\left(3,5^2+0,75\right)}{3\left(4,5^2+0,75\right)}...\frac{10\left(8,5^2+0,75\right)}{8\left(9,5^2+0,75\right)}$

$$= \frac{3.4.5...10}{1.2.3...8}.\frac{1,5^2+0,75}{9,5^2+0,75} = \frac{9.10}{1.2}.\frac{3}{91} = \frac{3}{2}.\frac{90}{91}.$$

Do đó $A < \frac{3}{2}$.

Bài 33. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, luôn có :

$$B = \frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}.\frac{4^3-1}{4^3+1}...\frac{n^3-1}{n^3+1} > \frac{2}{3}.$$

Lời giải

Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có : $\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{(n-1)\left(n^2+n+1\right)}{(n+1)\left(n^2-n+1\right)} = \frac{(n-1)\left[(n+0,5)^2+0,75\right]}{(n+1)\left[(n-0,5)^2+0,75\right]}$.

Khi đó $B = \frac{1.\left(2,5^2+0,75\right)}{3.\left(1,5^2+0,75\right)}.\frac{2.\left(3,5^2+0,75\right)}{4.\left(2,5^2+0,75\right)}.\frac{3.\left(4,5^2+0,75\right)}{5.\left(3,5^2+0,75\right)}...\frac{(n-1).\left[(n+0,5)^2+0,75\right]}{(n+1).\left[(n-0,5)^2+0,75\right]}$

$$=\frac{1.2.3...(n-1)}{3.4.5...(n+1)}.\frac{(n+0,5)^2+0,75}{1,5^2+0,75}=\frac{1.2}{n.(n+1)}.\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}.\frac{n^2+n+1}{n^2+n}.$$

Do đó $B>\frac{2}{3}$.

Bài 34. Rút gọn biểu thức $P=\frac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)...(21^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)...(23^4+4)}$

Lời giải

Ta có: $n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)=[(n-1)^2+1][(n+1)^2+1]$.

Khi đó:

$$P=\frac{(0^2+1)(2^2+1)}{(2^2+1)(4^2+1)}.\frac{(4^2+1)(6^2+1)}{(6^2+1)(8^2+1)}.\frac{(8^2+1)(10^2+1)}{(10^2+1)(12^2+1)}...\frac{(20^2+1)(22^2+1)}{(22^2+1)(24^2+1)}$$

$$=\frac{0^2+1}{24^2+1}=\frac{1}{577}.$$

Bài 35. Rút gọn biểu thức:

$$M=\frac{1}{a^2-5a+6}+\frac{1}{a^2-7a+12}+\frac{1}{a^2-9a+20}+\frac{1}{a^2-11a+30}.$$

Lời giải

Ta có:

$$M=\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)}+\frac{1}{(a-4)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-6)}$$

$$=\frac{1}{a-3}-\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-4}-\frac{1}{a-3}+\frac{1}{a-5}-\frac{1}{a-4}+\frac{1}{a-6}-\frac{1}{a-5}$$

$$=\frac{1}{a-6}-\frac{1}{a-2}=\frac{4}{(a-2)(a-6)}.$$

Bài 36. Rút gọn biểu thức:

$$\left(\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{3}+...+\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}\right)$$

Lời giải

Ta có: $\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{3}+...+\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}=\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{3}+...+\frac{n-(n-2)}{n-2}+\frac{n-(n-1)}{n-1}$

$$= \frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + ... + \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-1} - 1 - 1 - 1 - ... - 1 - 1$$

$$= n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + ... + \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-1} - (n-1)$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + ... + \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n}$$

$$= n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

Do đó :

$$\left(\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \frac{n-3}{3} + ... + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right) = n.$$

Bài 37. Rút gọn biểu thức:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{1.(2n-1)} + \frac{1}{3.(2n-3)} + \frac{1}{5.(2n-5)} + ... + \frac{1}{(2n-3).3} + \frac{1}{(2n-1).1}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}}$$

Lời giải

Ta có nhận xét: $\frac{1}{k.(2n-k)} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2n-k}\right).$

Khi đó: $A = \frac{1}{2n}\left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n-3}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{1}\right)\right]$

$$= \frac{1}{2n}.2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{B}{n}$$

Do đó: $\frac{A}{B} = \frac{1}{n}.$

Bài 38. Cho $abc = 1$ và $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng trong ba số a, b, c tồn tại một số bằng 1.

Lời giải

Từ đẳng thức: $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ suy ra $a + b + c = \frac{ab + bc + ca}{abc}.$

Mà $abc = 1$ nên $a + b + c = ab + bc + ca.$

Để chứng minh trong ba số a, b, c tồn tại một số bằng 1, ta cần chứng minh:

$$(a-1)(b-1)(c-1)=0.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}&(a-1)(b-1)(c-1)=(ab-a-b+1)(c-1)\\&=abc-ab-ac+a-bc+b+c-1\\&=(abc-1)+(a+b+c)-(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

Vì $abc=1$ và $a+b+c=ab+bc+ca$ nên biểu thức trên bằng 0 .

Do đó, tồn tại một trong ba thừa số $a-1, b-1, c-1$ bằng 0 .

Vậy tồn tại một trong ba số a, b, c bằng 1.

Bài 39. Chứng minh rằng nếu $x+y+z=a$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ thì tồn tại một trong ba số x, y, z bằng a.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $a\neq 0$. Khi đó:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}\ hay\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{x+y+z}.$$

Suy ra: $(xy+yz+zx)(x+y+z)-xyz=0.$

Ta có : $(xy+yz+zx)(x+y+z)-xyz=x^2y+xyz+x^2z+xy^2+xyz+y^2z+yz^2+xyz+xz^2-xyz$

$$\begin{aligned}&=x^2y+xy^2+xyz+y^2z+xyz+yz^2+x^2z+xz^2\\&=xy(x+y)+yz(x+y)+yz(x+z)+xz(x+z)\\&=y(x+y)(x+z)+z(x+z)(x+y)\\&=(x+y)(y+z)(z+x).\end{aligned}$$

Từ (1) suy ra: $(x+y)(y+z)(z+x)=0.$ Do đó: $x=-y$ hoặc $y=-z$ hoặc $z=-x$.

- Với $x=-y$ thì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ suy ra: z = a.

- Với $y=-z$ thì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ suy ra: x = a.

- Với $z=-x$ thì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ suy ra: y = a.

Vậy tồn tại một trong ba số x, y, z bằng a.

Bài 40. Các biểu thức $x+y+z$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ có thể cùng có giá trị bằng 0 được hay không?

Lời giải

Giả sử $x+y+z=0$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}$. Mà $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ nên $xy+yz+zx=0$

Từ $x+y+z=0$ suy ra $(x+y+z)^2=0$ hay $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0$.

Vì $xy+yz+zx=0$ nên $x^2+y^2+z^2=0$, suy ra $x=y=z=0$.

Điều này vô lí vì khi đó $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ không xác định.

Vậy $x+y+z$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ không thể cùng có giá trị bằng 0.

Bài 41. Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}$, biết rằng

$2a=by+cz; 2b=ax+cz; 2c=ax+by$ và $a+b+c\neq 0$

Lời giải

Cộng theo từng vế ba đẳng thức

$2a=by+cz; 2b=ax+cz; 2c=ax+by$

Ta được $a+b+c=ax+by+cz=ax+2a=a(x+2)$

Suy ra $\frac{1}{x+2}=\frac{a}{a+b+c}$

Tương tự, $\frac{1}{y+2}=\frac{b}{a+b+c}, \frac{1}{z+2}=\frac{c}{a+b+c}$.

Do đó $M=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$.

Bài 42. Cho $abc=2$. Rút gọn biểu thức $M=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{2c}{ac+2c+2}$

Lời giải

Với $abc = 2$, ta có

$$M = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{2c}{ac+2c+2} = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{ab}{abc+ab+a} + \frac{2c}{ac+2c+abc}$$

$$= \frac{a}{a+ab+2} + \frac{ab}{a+ab+2} + \frac{2}{a+ab+2} = \frac{a+ab+2}{a+ab+2} = 1$$

Bài 43. Cho $abc = 1$. Rút gọn biểu thức $N = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}$.

Lời giải

Với $abc = 1$, ta có $N = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = \frac{a}{a+ab+1} + \frac{ab}{abc+ab+a} + \frac{c}{ac+c+abc}$

$$= \frac{a}{a+ab+1} + \frac{ab}{a+ab+1} + \frac{1}{a+ab+1} = \frac{a+ab+1}{a+ab+1} = 1$$

Bài 44. Cho $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}, a \neq 0, c \neq 0, a-b \neq 0, b-c \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a-b} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{c}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $a(b-c) = c(a-b)$ (1)

Ta có $\frac{1}{c} + \frac{1}{a-b} = \frac{a-b+c}{c(a-b)}$ (2)

$\frac{1}{b-c} - \frac{1}{a} = \frac{a-b+c}{a(b-c)}$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài 45. Cho $a+b+c = 0 (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$.

Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$.

Lời giải

Ta có

$$A=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+3abc}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$$

Bài 46. Cho $a+b+c=0(a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0)$. Rút gọn biểu thức

$$B=\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2-b^2}$$

Lời giải

Từ $a+b+c=0$ suy ra $b+c=-a$. Khi đó $b^2+2bc+c^2=a^2$ hay $a^2-b^2-c^2=2bc$.

Tương tự, $b^2-c^2-a^2=2ca, c^2-a^2-b^2=2ab$.

Do đó

$$=\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ca}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}=\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+3abc}{2abc}=\frac{3abc}{2abc}=\frac{3}{2}$$

Bài 47. Cho biết $a+b+c=0$, hãy tính giá trị của biểu thức

$$A=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)$$

Lời giải

Đặt $M=\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}$

$$M\cdot\frac{c}{a-b}=1+\frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}$$

$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(a-b)(c-a-b)}{ab}=1+\frac{2c^2}{ab}=1+\frac{2c^3}{abc}$$

Tương tự, $M\cdot\frac{a}{b-c}=1+\frac{2a^3}{abc}$, $M\cdot\frac{b}{c-a}=1+\frac{2b^3}{abc}$

Do đó :

$$A=3+\frac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc}=3+\frac{2\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+6abc}{abc}$$

$$= 3 + \frac{6abc}{abc} = 3 + 6 = 9$$

Bài 48. Chứng minh rằng, nếu $\left(a^2 - bc\right)\left(b - abc\right) = \left(b^2 - ac\right)\left(a - abc\right)$ và các số $a, b, c, a - b$ khác 0

thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra

$$a^2b - a^3bc - b^2c + ab^2c^2 = ab^2 - ab^3c - a^2c + a^2bc^2$$

$$\Rightarrow ab\left(a - b\right) + c\left(a^2 - b^2\right) = abc^2\left(a - b\right) + abc\left(a^2 - b^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(a - b\right)\left(ab + ac + bc\right) = abc\left(a - b\right)\left(a + b + c\right)$$

Chia cả hai vế cho $abc\left(a - b\right) \neq 0$ ta được điều phải chứng minh.

Bài 49. Cho $a + b + c = 0, x + y + z = 0, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$

Lời giải

Từ $x + y + z = 0$ suy ra $x^2 = (y + z)^2, y^2 = (z + x)^2, z^2 = (x + y)^2$.

Do đó $ax^2 + by^2 + cz^2 = a(y + z)^2 + b(z + x)^2 + c(x + y)^2$

$$= a\left(y^2 + 2yz + z^2\right) + b\left(z^2 + 2zx + x^2\right) + c\left(x^2 + 2xy + y^2\right)$$

$$= x^2\left(b + c\right) + y^2\left(a + c\right) + z^2\left(a + b\right) + 2\left(ayz + bzx + cxy\right) \quad (1)$$

Thay $b + c = -a, a + c = -b, a + b = -c($ do $a + b + c = 0)$ và thay ayz $+bzx + cxy = 0$ (do $\left.\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0\right)$ vào (1) ta được $ax^2 + by^2 + cz^2 = -ax^2 - by^2 - cz^2$.

Cho nên $2ax^2 + 2by^2 + 2cz^2 = 0$ hay $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$.

Bài 50. Cho $\frac{xy + 1}{y} = \frac{yz + 1}{z} = \frac{zx + 1}{x}$. Chứng minh rằng $x = y = z$ hoặc $x^2y^2z^2 = 1$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$. Do đó

$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{y - z}{yz}; y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{z - x}{xz}; z - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x - y}{xy}$$

Suy ra $(x-y)(y-z)(z-x)=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^2y^2z^2}$.

Cho nên $(x-y)(y-z)(z-x)(x^2y^2z^2-1)=0$.

Vậ $x-y=0; y-z=0; z-x=0; x^2y^2z^2-1=0$ hay $x=y=z; x^2y^2z^2=1$.

Bài 51. Cho $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$.

Lời giải

Nhân cả hai vế của $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$ với $a+b+c$ ta được

$$\frac{a^2+a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2+b(c+a)}{c+a}+\frac{c^2+c(a+b)}{a+b}=a+b+c.$$

Suy ra $\dfrac{a^2}{b+c}+a+\dfrac{b^2}{c+a}+b+\dfrac{c^2}{a+b}+c=a+b+c$ hay $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0.$

Bài 52. $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0$

Lời giải

Từ $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$ suy ra $\dfrac{a}{b-c}=\dfrac{b}{a-c}+\dfrac{c}{b-a}=\dfrac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)}$.

Nhân hai vế với $\dfrac{1}{b-c}$ ta được $\dfrac{a}{(b-c)^2}=\dfrac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

Tương tự, $\dfrac{b}{(c-a)^2}=\dfrac{c^2-bc+ba-a^2}{(b-c)(c-a)(a-b)}; \dfrac{c}{(a-b)^2}=\dfrac{a^2-ca+cb-b^2}{(c-a)(a-b)(b-c)}$

Cộng từng vế ba đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 53. Cho $x+\dfrac{1}{x}=a$. Tính các biểu thức sau theo a

a) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$; b) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$; c) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$; d) $x^5+\dfrac{1}{x^5}$

Lời giải

a) Từ $x+\dfrac{1}{x}=a$, suy ra $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=a^2$ hay $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2-2$.

b) Ta có $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=a^3-3a$.

c) Ta có $x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=\left(a^2-2\right)^2-2=a^4-4a^2+2$.

d) Ta có $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)=x^5+\dfrac{1}{x}+x+\dfrac{1}{x^5}$.

Suy ra

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(a^2-2\right)\left(a^3-3a\right)-a=a^5-5a^3+5a..$$

Bài 54. Cho $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=a$. Tính giá trị của biểu thức

$M=\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right):\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$ theo a

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $a\neq 1$ và

$$\frac{x^4-1}{x^4+1}=a\Rightarrow x^4-1=ax^4+a\Rightarrow (1-a)x^4=a+1\Rightarrow x^4=\frac{a+1}{1-a}.$$

Thay vào M ta được

$$M=\left(\frac{a+1}{1-a}-\frac{1-a}{a+1}\right):\left(\frac{a+1}{1-a}+\frac{1-a}{a+1}\right)=\frac{(a+1)^2-(1-a)^2}{(a+1)^2+(1-a)^2}=\frac{4a}{2a^2+2}=\frac{2a}{a^2+1}.$$

Bài 55. Cho $x^2-4x+1=0.$ Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$.

Lời giải

Cách 1. Ta có

$$x^2-4x+1=0\Rightarrow x^2-x+1=3x\Rightarrow\frac{x^2-x+1}{x}=3$$

Mặt khác: $A=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=\frac{x^2-x+1}{x}\cdot\frac{x^2+x+1}{x}=3\cdot\frac{x^2+x+1}{x}$.

Ta thấy $\frac{x^2+x+1}{x}=\frac{x^2-x+1}{x}+\frac{2x}{x}=3+2=5$.

Vậy $A=3\cdot 5=15$.

Cách 2. Ta có $A=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=\frac{\left(x^2+1\right)^2-x}{x^2}=\frac{(4x)^2-x^2}{x^2}=15$.

Bài 56. Cho $x^2-4x+1=0.$ Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$.

Lời giải

Trường hợp 1. Với $x=0$ thì $a=0$ và $M=0$.

Trường hợp 2. Với $x\neq 0$ thì $a\neq 0$.

Ta có: $M=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{x}{x^2-x+1}\cdot\dfrac{x}{x^2+x+1}$ (1)

Lại có:

$$\frac{x^2+x+1}{x}=\frac{x^2-x+1}{x}+\frac{2x}{x}=\frac{1}{a}+2=\frac{1+2a}{a}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $M=a\cdot\dfrac{a}{1+2a}=\dfrac{a^2}{1+2a}$.

Vậy $M=\dfrac{a^2}{1+2a}$.

Bài 57. Cho $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, y=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$. Tính giá trị của biểu thức $x+y+xy$.

Lời giải

Ta xét biểu thức $x+y+xy+1=x(y+1)+(y+1)=(x+1)(y+1)$.

Từ giả thiết suy ra $x+1=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}; y+1=4bc$

Do đó, $(x+1)(y+1)=2$. Vậy $x+y+xy+1=2$, suy ra $x+y+xy=1$.

Bài 58. Tìm hai số tự nhiên a và b sao cho $a-b=\dfrac{a}{b}$

Lời giải

Đặt: $a-b=n$ (1)

$\dfrac{a}{b}=n$ (2)

trong đó $a,b,n\in\mathbb{N}, b\neq 0$.

Từ (1), (2) ta có $bn-b=n$ nên $b(n-1)=n$.

- Nếu $n=1$ thì $a=b$. Khi đó, theo (1) thì $n=0$, loại.
- Với $n\neq 1$, ta có

$b=\dfrac{n}{n-1}=1+\dfrac{1}{n-1}$.(3)

Vì $b\in\mathbb{N}$ nên $n-1$ là ước của 1, suy ra $(n-1)\in\{-1;1\}$.

Với $n-1=-1$ hay $n=0$, từ (3) suy ra $b=0$, loại

o Với $n-1=1$ hay $n=2$, từ (3), (2) suy ra $b=2, a=4$. Thử lại ta thấy $4-2=\dfrac{4}{2}$

Vậy $a=4, b=2$.

Bài 59. Tìm hai số tự nhiên a và b sao cho $a-b=\dfrac{a}{2b}$.

Lời giải

Đặt: a – b = n (1)

$\frac{a}{2b}=n$ (2)

trong đó $a,b,n\in\mathbb{N},b\neq 0$.

Từ (1), (2) ta có $2bn-b=n$ nên $b(2n-1)=n$. Suy ra $b=\frac{n}{2n-1}$ (3)

Nếu $n=0$ từ (3) suy ra $b=0$, loại.

- Với $n\geq 1$, ta thấy $n\leq n+n-1=2n-1$

Vì $b\in\mathbb{N}$ nên $\frac{n}{2n-1}\in\mathbb{N}$ suy ra $n=2n-1$, hay $n=1$.

Từ (1) và (3) suy ra $b=1$ và $a=2$

Thử lại ta thấy $2-1=\frac{2}{2.1}$

Vậy $a=2,b=1$.

Bài 60. Cho hai số nguyên dương a và b, trong đó $a>b$. Tìm số nguyên dương c khác b sao cho

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+c^3}=\frac{a+b}{a+c}.$$

Lời giải

Do $a+b\neq 0,a+c\neq 0$ nên từ $\frac{a^3+b^3}{a^3+c^3}=\frac{a+b}{a+c}$ suy ra

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=\frac{a^3+c^3}{a+c}\Leftrightarrow a^2-ab+b^2=a^2-ac+c^2$$
$$\Leftrightarrow b^2-c^2=ab-ac$$
$$\Leftrightarrow (b+c)(b-c)=a(b-c)$$

Do $b-c\neq 0$ nên $b+c=a$.
Vậy $c=a-b$.

Bài 61. Cho dãy số $a_1,a_2,a_3,\ldots$ sao cho

$$a_2=\frac{a_1-1}{a_1+1};a_3=\frac{a_2-1}{a_2+1};\ldots;a_n=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}$$

1. Chứng minh rằng $a_1=a_5$.

2. Xác định năm số đầu của dãy, biết rằng $a_{101}=3$.

Lời giải

1. Ta có: $$a_5=\left(\frac{1+a_1}{1-a_1}-1\right):\left(\frac{1+a_1}{1-a_1}+1\right)=\frac{2a_1}{1-a_1}:\frac{2}{1-a_1}=\frac{2a_1}{2}=a_1$$

$$a_4=\left(-\frac{1}{a_1}-1\right):\left(-\frac{1}{a_1}+1\right)=\frac{-1-a_1}{a_1}:\frac{a_1-1}{a_1}=\frac{1+a_1}{1-a_1}$$

$$a_5=\left(\frac{1+a_1}{1-a_1}-1\right):\left(\frac{1+a_1}{1-a_1}+1\right)=\frac{2a_1}{1-a_1}:\frac{2}{1-a_1}=\frac{2a_1}{2}=a_1$$

2. Theo câu trên ta suy ra $a_1=a_5=a_9=\cdots=a_{1001}=3$

Từ đó ta tính được $a_1=3; a_2=\frac{1}{2}; a_3=-\frac{1}{3}; a_4=-2; a_5=3$.

🗁**Bài 62.**. Tìm phân số $\frac{m}{n}$ khác 0 và số tự nhiên k, biết rằng $\frac{m}{n}=\frac{m+k}{nk}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $mnk=mn+nk$. Chia hai vế cho n, ta được $mk=m+k$. Do đó $m=k(m-1)$. Như vậy m chia hết cho $m-1$. Từ đó ta tìm được $m=0$ (loại) và $m=2$. Khi đó $k=2$. Vậy phân số phải tìm có dạng $\frac{2}{n}$ và $k=2$.

🗁**Bài 63.**.Cho hai số tự nhiên a và $b(a<b)$. Tìm tổng các phân số tối giản có mẫu bằng 7, mỗi phân
số lớn hơn a nhưng nhỏ hơn b.

Lời giải

Tổng phải tìm bằng $A-B$, trong đó

$$\mathrm{A}=\left(a+\frac{1}{7}\right)+\left(a+\frac{2}{7}\right)+\cdots+\left(b-\frac{2}{7}\right)+\left(b-\frac{1}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{7}\left[(7a+1)+(7a+2)+\cdots+(7b-2)+(7b-1)\right]$$

$$=\frac{1}{14}\left[(7a+1)+(7b-1)\right]\left[(7b-1)-(7a+1)+1\right]$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)(7b-7a-1).$$

$$B=(a+1)+(a+2)+\cdots+(b-2)+(b-1)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a+1)+(b-1)\right]\left[(b-1)-(a+1)+1\right]=\frac{1}{2}(a+b)(b-a-1).$$

Tính hiệu $A-B$ ta được $3\left(b^2-a^2\right)$

Bài 65. Mức sản xuất của một xí nghiệp năm 2001 tăng $a\%$ so với năm 2000, năm 2002 tăng $b\%$ so với năm 2001. Mức sản xuất của xí nghiệp đó năm 2002 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2000 ?.

Lời giải

Giả sử mức sản xuất của xí nghiệp năm 2000 là 1 thì mức sản xuất năm 2001 là $1+\frac{a}{100}$, mức sản xuất năm 2002 là $\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right)=1+\frac{b}{100}+\frac{a}{100}+\frac{ab}{10000}$

tăng so với năm 2000 là $\frac{a+b}{100}+\frac{ab}{10000}$ hay $\left(a+b+\frac{ab}{100}\right)\%$

Bài 65.. Một số a tăng $m\%$, sau đó lại giảm đi $n\%(a,m,n$ là các số dương) thì được số b. Tìm liên hệ giữa m và n để $b>a$.

Lời giải

Ta có $b=a\left(1+\frac{m}{100}\right)\left(1-\frac{n}{100}\right)$ nên $b-a=a\left[\left(1+\frac{m}{100}\right)\left(1-\frac{n}{100}\right)-1\right]$.

Điều kiện để $b>a$ là $\left(1+\frac{m}{100}\right)\left(1-\frac{n}{100}\right)>1$.

Rút gọn điều kiện trên ta được $100(m-n)>mn$

Bài 66. Chứng minh tổng sau không là số nguyên với mọi số tự nhiên $n\geq 2$

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Lời giải

Gọi k là số nguyên lớn nhất sao cho $2^k\leq n$. Chọn mẫu chung là 2^kP trong đó P là tích các số lẻ không vượt quá n. Chỉ có duy nhất một thừa số phụ (của phân số $\frac{1}{2^k}$) là số lẻ, còn mọi thừa số phụ khác đều chẵn. Như vậy, sau khi quy đồng mẫu, mẫu là số chẵn, tử là số lẻ. Do đó A không là số nguyên.

Bài 67. Chứng minh tổng sau không là số nguyên với mọi số tự nhiên $n\geq 1$

$$B=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$$

Lời giải

Gọi k là số nguyên lớn nhất sao cho $3^k\leq 2n+1$. Chọn mẫu chung là 3^kP trong đó P là tích các thừa số nguyên tố lẻ không vượt quá $2n+1$. Chỉ có duy nhất một thừa số phụ (của phân số $\frac{1}{3^k}$) không chia hết cho 3, còn mọi thừa số phụ khác đều chia hết cho 3. Như vậy, sau khi quy đồng mẫu, mẫu là số chia hết cho 3, tử là số không chia hết cho 3. Do đó B không là số nguyên.

Bài 3

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH

A. PHƯƠNG PHÁP TÁCH MỘT HẠNG TỬ THÀNH NHIỀU HẠNG TỬ

VÍ DỤ 1 . Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$3x^2-8x+4$$

Lời giải

Đa thức trên không chứa nhân tử chung, không có dạng một hằng đẳng thức đáng nhớ nào, cũng không thể nhóm các hạng tử. Ta biến đổi đa thức ấy thành đa thức có nhiều hạng tử hơn.

Cách 1. (Tách hạng tử thứ hai)

$$3x^2-8x+4=3x^2-6x-2x+4=3x(x-2)-2(x-2)=(x-2)(3x-2)$$

Cách 2. (Tách hạng tử thứ nhất)

$$3x^2-8x+4=4x^2-8x+4-x^2=(2x-2)^2-x^2$$

$$=(2x-2+x)(2x-2-x)=(3x-2)(x-2).$$

Nhận xét. Trong cách 1, hạng tử $-8x$ được tách thành hai hạng tử $-6x$ và $-2x$. Trong đa thức $3x^2-6x-2x+4$, hệ số của các hạng tử là $3,-6,-2,4$. Các hệ số thứ hai và thứ tư đều gấp -2 lần hệ số liền trước, nhờ đó mà xuất hiện nhân tử chung $x-2$.

Một cách tổng quát, để phân tích tam thức bậc hai ax^2+bx+c thành nhân tử, ta tách hạng tử bx thành b_1x+b_2x sao cho $\frac{b_1}{a}=\frac{c}{b_2}$, tức là $b_1b_2=ac$.

Trong thực hành ta làm như sau:
Bước 1: Tính tích ac

Bước 2: Phân tích ac ra tích của hai thừa số nguyên bằng mọi cách.

Bước 3: Chọn hai thừa số mà tổng bằng b.

Trong ví dụ trên, đa thức $3x^2-8x+4$ có $a=3,b=-8,c=4$. Tích $ac=3\cdot4=12$. Phân tích 12 ra tích của hai thừa số, hai thừa số này cùng dấu (vì tích của chúng bằng 12), và cùng âm (để tổng của chúng bằng -8) : $(-1)(-12),(-2)(-6),(-3)(-4)$. Chọn hai thừa số mà tổng bằng -8, đó là -2 và 6.

VÍ DỤ 2 Phân tích đa thức thành nhân tử:

$4x^2-4x-3$

Lời giải

Cách 1. (Tách hạng tử thứ hai)

$4x^2-4x-3=4x^2+2x-6x-3=2x(2x+1)-3(2x+1)=(2x+1)(2x-3)$

Cách 2. (Tách hạng tử thứ ba)

$$4x^2-4x-3=4x^2-4x+1-4=(2x-1)^2-2^2=(2x+1)(2x-3)$$

Nhận xét. *Qua hai ví dụ trên, ta thấy việc tách một hang tử thành nhiều hang tử khác thường nhằm muc đích:*

- *Làm xuất hiện các hệ số tỉ lệ, nhờ đó mà xuất hiện nhân tử chung (cách 1);*
- *Làm xuất hiện hiệu của hai bình phương (cách 2).*

Với các đa thức có bậc từ bậc ba trở lên, để dễ dàng làm xuất hiện các hệ tỉ lệ, người ta thường dùng cách tìm nghiệm của đa thức.

Ta nhắc lại khái niệm nghiệm của đa thức: số a được gọi là nghiệm của đa thức $f(x)$ nếu $f(a)=0$. Như vậy, nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm $x=a$ thì nó chứa nhân tử $x-a$.

Ta chứng minh được rằng nghiệm của đa thức(nếu có) phải là ước của hệ số tự do.

Ta chứng minh được rằng nghiệm nguyên của đa thức, nếu có, phải là ước của hệ số tự do.

Thật vậy, giả sử đa thức $a_0x^n+a_1a^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ với các hệ số $a_0,a_1,\ldots,a_n$ nguyên, có nghiệm $x=a(x\in\mathbb{Z})$. Thế thì

$$a_0x^n+a_1a^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=(x-a)\left(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}\right)$$

trong đó $b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}$ nguyên. Hạng tử có bậc thấp nhất của tích ở vế phải bằng $-ab_{n-1}$, hạng tử có bậc thấp nhất của vế trái bằng a_n. Do đó $-ab_{n-1}=a_n$, tức a là ước của a_n.

bằng $-8):(-1)(-12),(-2)(-6),(-3)(-4)$. Chọn hai thừa số mà tổng bằng -8, đó là -2 và 6.

VÍ DỤ 3 . Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$f(x)=x^3-x^2-4$$

Lời giải

Lần lượt kiểm tra với $x = \pm1, \pm2, \pm4$, ta thấy $f(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 0$. Đa thức có nghiệm $x = 2$, do đó chứa nhân tử $x - 2$. Ta tách các hạng tử như sau:

Cách 1 . $x^3 - x^2 - 4 = x^2 - 2x^2 + x^2 - 2x + 2x - 4$

$$= x^2(x-2) + x(x-2) + 2(x-2) = (x-2)(x^2 + x + 2).$$

Cách 2 . $x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 8 - x^2 + 4$

$$= (x-2)(x^2 + 2x + 4) - (x+2)(x-2)$$

$$= (x-2)(x^2 + 2x + 4 - x - 2) = (x-2)(x^2 + x + 2)$$

Nhận xét. Khi xét nghiệm nguyên của đa thức, nên nhớ hai đinh lí sau:

1) Nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì 1 là nghiệm của đa thức, do đó đa thức chứa nhân tử $x - 1$. Chẳng hạn, đa thức $x^2 - 5x^2 + 8x - 4$ có $1 - 5 + 8 - 4 = 0$ nên 1 là nghiệm của đa thức, đa thức chứa nhân tử $x - 1$.

2) Nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số của hạng tử bậc chẳng bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ thì -1 là nghiệm của đa thức, đa thức chứa nhân tử $x + 1$.

Chẳng hạn, đa thức $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ có $9 - 5 = 3 + 1$ nên -1 là nghiêm của đa thức, đa thức chứa nhân tử $x + 1$.

Nhận xét. *Để nhanh chóng loai trừ các ước của hệ số tự do không là nghiệm của đa thức, có thể dùng nhận xét sau:*

Nếu x là nghiệm nguyên của đa thức $f(x)$ và $f(1), f(-1)$ khác 0 thì $\dfrac{f(1)}{a-1}$ và $\dfrac{f(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên.

Lời giải

Số a là nghiệm của $f(x)$ nên $f(x) = (x-a) \cdot Q(x)$

Thay $x = 1$ vào (1), ta có $f(1) = (1-a)Q(1)$.

Do $f(1) \neq 0$ nên $a \neq 1$, vì thế $Q(1) = \dfrac{f(1)}{1-a}$, túc là $\dfrac{f(1)}{a-1}$ là số nguyên.

Lấy một ví dụ: $f(x) = 4x^3 - 13x^2 + 9x - 18$.

Các ước của 18 là $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18$.

$$f(1) = 4 - 13 + 9 - 18 = -18,\ f(-1) = -4 - 13 - 9 - 18 = -44$$

Hiển nhiên ±1 không là nghiệm của $f(x)$. Ta thấy $\dfrac{-18}{-3-1}, \dfrac{-18}{\pm6-1}, \dfrac{-18}{\pm9-1}, \dfrac{-18}{\pm18-1}$ không nguyên nên

$-3; \pm6; \pm9; \pm18$ không là nghiệm nghiệm của $f(x)$.

Ta thấy $\frac{-44}{2+1}$ không nguyên nên 2 không là nghiệm của $f(x)$. Chỉ còn -2 và 3. Kiểm tra thấy 3 là nghiệm nghiệm của $f(x)$. Do đó, ta tách các hạng tử như sau:

$$4x^3-13x^2+9x-18=4x^3-12x^2-x^2+3x+6x-18$$
$$=\ 4x^2(x-3)-x(x-3)+6(x-3)=(x-3)(4x^2-x+6).$$

VÍ DỤ 4 . (Triệu Minh Hà, dự án EX-C2-L8). [8D1K9] Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$3x^2-7x^2+17x-5$$

Lời giải

Các số $\pm1,\pm5$ không là nghiệm của đa thức. Như vậy, đa thức không có nghiệm nguyên. Tuy vậy, đa thức có thể có nghiệm hữu tỉ khác. Ta chứng minh được rằng trong đa thức có các hệ số nguyên, nghiệm hữu tỉ (nếu có) phải có dạng $\frac{p}{q}$ trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số

cao nhất.

Xét các số $\pm\frac{1}{3},\pm\frac{5}{3}$, ta thấy $\frac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức, do đó đa thức chứa thừa số $3x-1$. Ta tách các hạng tử như sau: $3x^3-7x^2+17x-5=3x^2-x^2-6x^2+2x+15x-5$

$$=x^2(3x-1)-2x(3x-1)+5(2x-1)=(3x-1)(x^2-2x+5).$$

B. PHƯƠNG PHÁP THÊM VÀ BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ

1. Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện hiệu của hai bình phương.

Ví dụ 5. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$4x^4+81$$

Lời giải

Thêm và bớt $36x^2$:

$$4x^4+81=4x^4+36x^2+81-36x^2=(2x^2+9)^2-(6x)^2=(2x^2+9+6x)(2x^2+9-6x)$$

Ví dụ 6. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$64x^4+y^4$$

Lời giải

Thêm và bớt $16x^2y^2$:

$$64x^4+y^4=64x^4+16x^2y^2+y^4-16x^2yy^2=\left(8x^2+y^2\right)^2-(4xy)^2=\left(8x^2+y^2+4xy\right)\left(8x^2+y^2-4xy\right)$$

2. Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện nhân tử chung

Ví dụ 7. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$x^5+x-1$$

Lời giải

Cách 1 .

$$x^5+x-1=x^5-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x-1$$
$$=x^3\left(x^2-x+1\right)+x^2\left(x^2-x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)$$
$$=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$$

Cách 2. Thêm và bớt x^2 :

$$x^5+x-1=x^5+x^2-x^2+x-1=x^2\left(x^3+1\right)-\left(x^2-x+1\right)$$
$$=\left(x^2-x+1\right)\left[x^2\left(x+1\right)-1\right]=\left(x^2-x+1\right)\left(x^3+x^2-1\right)$$

Ví dụ 8. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$x\left(x+4\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)+128$$

Lời giải

Đặt $x^2+10x+12=y$, đa thức đã cho có dạng:

$$\left(y-12\right)\left(y+12\right)+128=y^2-16=\left(y+4\right)\left(y-4\right)$$
$$=\left(x^2+10x+16\right)\left(x^2+10x+8\right)=\left(x+2\right)\left(x+8\right)\left(x^2+10x+8\right)$$

Nhận xét. *Trong ví dụ trên, nhờ phương pháp đổi biến, ta đưa đa thức bậc bốn với x thành đa thức bậc hai đối với y.*

Ví dụ 9. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$A=x^4+6x^3+7x^2-6x+1$$

Lời giải

Giả sử $x\neq 0$. Ta viết đa thức dưới dạng:

$$A = x^2\left(x^2+6x+7-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right) = x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7\right]$$

Đặt $x-\frac{1}{x}=y$ thì $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$. Do đó

$$A = x^2\left(y^2+2+6y+7\right) = x^2(y+3)^2 = (xy+3x)^2 = \left[x\left(x-\frac{1}{x}\right)+3x\right]^2 = \left(x^2+3x-1\right)^2$$

C. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

Ví dụ 10. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$x^4-6x^3+12x^2-14x+3$$

Lời giải

Các số $\pm1,\pm3$ không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên, cũng không có nghiệm hữu tỉ. Như vậy nếu đa thức trên phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng $\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$. Phép nhân này cho kết quả $x^4+\left(a+c\right)x^3+\left(ac+b+d\right)x^2+\left(ad+bc\right)x+bd$. Đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho, ta được hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac+b+d=12 \\ ad+bc=-14 \\ bd=3 \end{cases}$$

Xét $bd=3$ với $b,d\in\mathbb{Z}, b\in\left\{\pm1,\pm3\right\}$. Với $b=3$ thì $d=1$, hệ điều kiện trên trở thành:

$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac=8 \\ a+3c=-14 \end{cases}$$

Suy ra $2c=-14-\left(-6\right)=-8.$ Do đó $c=-4, a=-2$

Vậy đa thức đã cho phân tích thành $\left(x^2-2x+3\right)\left(x^2-4x+1\right)$.

Ta trình bày lời giải của ví dụ trên như sau:

$$x^4-6x^3+12x^2-14x+3 = x^4-4x^3+x^2-2x^2+8x^2-2x+3x^2-12x+3$$
$$= x^2\left(x^2-4x+1\right)-2x\left(x^2-4x+1\right)+3\left(x^2-4x+1\right) = \left(x^2-4x+1\right)\left(x^2-2x+3\right)$$

D. PHƯƠNG PHÁP XÉT GIÁ TRỊ RIÊNG

Trong phương pháp này, trước hết ta xác định các nhân tử chứa biến của đa thức, rồi gán cho các biến các giá trị cụ thể để xác định nhân tử còn lại.

Ví dụ 11. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$P = x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$

Lời giải

Thử thay x bởi y thì $P = y^2(y-z)+z^2(z-y)=0$. Như vậy P chia hết cho $x-y$.

Ta lại thấy nếu thay x bởi y, thay y bởi z, thay z với x thì P không đổi (ta nói đa thức P có thể hoán vị vòng quanh $x \to y \to z \to x$). Do đó, nếu P đã chia hết cho $x-y$ thì cũng chia hết cho $y-z$ và $z-x$. Vậy P có dạng

$$k(x-y)(y-z)(z-x)$$

Ta thấy k phải là hằng số (không chứa biến) vì P có bậc ba đối với tập hợp các biến x, y, z còn tích $(x-y)(y-z)(z-x)$ cũng có bậc ba đối với các biến x, y, z

Vì đẳng thức $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)$ đúng với mọi x, y, x nên ta gán cho các biến x, y, z các giá trị riêng, chẳng hạn $x=2, y=1, z=0$, ta được:

$$4\cdot 1+1\cdot(-2)+0=k\cdot 1\cdot 1\cdot(-2) \Leftrightarrow k=-1$$

Vậy $P=-(x-y)(y-z)(z-x)=(x-y)(y-z)(x-z)$.

3 Bài tập tự luyện:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

Bài 1. (1) $6x^2-11x+3$

(2) $2x^2+3x-27$.

(3) $2x^2-5xy-3y^2$.

Lời giải

(1) $(3x-1)(2x-3)$.

(2) $(2x+9)(x-3)$.

(3) $(x-3y)(2x+y)$.

🗁 **Bài 2.** (1) x^3+2x-3

(2) x^3-7x+6.

(3) x^3+5x^2+8x+4.

(4) $x^3-9x^2+6x+16$.

(5) x^3-x^2-x-2.

(6) x^3+x^2-x+2

Lời giải

(1) $(x-1)(x^2+x+3)$.

(2) $(x-1)(x-2)(x+3)$.

(3) $(x+1)(x+2)^2$.

(4) $(x+1)(x-2)(x-8)$.

(5) Viết đa thức dưới dạng $x^3-1-(x^2+x+1)=(x-2)(x^2+x+1)$.

(6) -2 là nghiệm. Đáp số: $(x+2)(x^2-x+1)$.

(7) 2 là nghiệm. Đáp số: $(x+2)(x-3)(x-5)$.

🗁 **Bài 3.** x^3-7x-6 bằng nhiều cách.

Lời giải

Đáp số: $(x+1)(x+2)(x+3)$

(1) $x^3-7x-6=x^3+1-7x-7$.

(2) $x^3-7x-6=x^3-x-6x-6$.

(3) $x^3-7x-6=x^3-x^2+x^2-x-6x-6$.

(4) $x^3-7x-6=7x^3-7x-6x^3-6$. Chú ý rằng -2 là một nghiệm, ta có các cách biến đổi:

(5) $x^3-7x-6=x^3-4x-3x-6$.

(6) $x^3-7x-6=x^3+8-7x-14$.

(7) $x^3-7x-6=x^3-9x+2x-6$.

(8) $x^3-7x-6=x^3-27-7x+21$.

Bài 4. (1) $27x^3-27x^2+18x-4$.

(2) $2x^3-x^2+5x+3$.

(3) $(x^2-3)^2+16$.

Lời giải

(1) $\frac{1}{3}$ là một nghiệm. Biến đổi: $27x^3-1-27x^2+18x-3=(3x-1)(9x^2-6x-4)$.

(2) $\frac{-1}{2}$ là một nghiệm. Đáp số: $(2x+1)(x^2-x+3)$.

(3) $(x^2-3)^2+16=x^4-6x^2+9+16=(x^2+4x+5)(x^2-4x+5)$.

Bài 5. (1) $\left(x^2+2\right)^2-2\left(x^2+x\right)-15$.

(2) $x^2+2xy+y^2-x-y-12$

(3) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)-12$

(4) $\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)\left(x+5\right)-24$

Lời giải

(1) Đặt $x^2+x=y$. Đáp số: $\left(x^2+x-5\right)\left(x^2+x+3\right)$.

(2) Đặt $x+y=a$. Đáp số: $\left(x+y+3\right)\left(x+y-4\right)$.

(3) Đặt $x^2+x+1=y$. Đáp số: $\left(x^2+x+5\right)\left(x+2\right)\left(x-1\right)$.

(4) Biến đổi: $\left(x^2+7x+10\right)\left(x^2+7x+12\right)-24$.

Đặt $x^2+7x+11=y$. Đáp số: $\left(x^2+7x+16\right)\left(x+1\right)\left(x+6\right)$.

Bài 6. (1) $\left(x+a\right)\left(x+2a\right)\left(x+3a\right)\left(x+4a\right)+a^4$;

(2) $\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$;

(3) $2\left(x^4+y^4+z^4\right)-\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$.

Lời giải

(1) Đặt $x^2+5ax+5a^2=y$. Đáp số: $\left(x^2+5ax+5a^2\right)^2$.

(2) $A=\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$.

Đặt $x^2+y^2+z^2=a, xy+yz+zx=b$

$A=a\left(a+2b\right)+b^2=(a+b)^2=\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)^2$

(3) $M=2\left(x^4+y^4+z^4\right)-\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$

Để ý rằng các biểu thức $x+y+z, x^2+y^2+z^2$ xuất hiện nhiều lần trong biểu thức M

Ta đặt $x^4+y^4+z^4=a, x^2+y^2+z^2=b, x+y+z=c$

Ta có $M=2a-b^2-2bc^2+c^4=2a-2b^2+b^2-2bc^2+c^4=2\left(a-b^2\right)+\left(b-c^2\right)^2$.

Ta có $a-b^2=-2\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right), b-c^2=-2\left(xy+yz+zx\right)$. Do đó

$$\begin{aligned} M &= -4\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)+4(xy+xz+yz)^2 \\ &= 8x^2yz+8xy^2z+8xyz^2=8xyz\left(x+y+z\right) \end{aligned}$$

Bài 7. $(a+b+c)^3-4\left(a^3+b^3+c^3\right)-12abc$ bằng cách đổi biến: đặt $a+b=m, a-b=n$.

Lời giải

Đặt $a+b=m, a-b=n$ thì $4ab=m^2-n^2$,

$$a^3+b^3=\left(a+b\right)\left[(a-b)^2+ab\right]=m\left(n^2+\frac{m^2-n^2}{4}\right)$$

Ta có

$$A=(m+c)^3-4\frac{m^3+3mn^2}{4}-4c^3-3c\left(m^2-n^2\right)$$

Biến đổi dấu ngoặc thành $\left(m-c\right)\left(c+n\right)\left(c-n\right)$.

Vậy $A=3\left(a+b-c\right)\left(c+a-b\right)\left(c+b-a\right)$.

🗁 **Bài 8.** (1) $4x^4-32x^2+1$.

(2) x^6+27.

(3) $3(x^4+x^2+1)-(x^2+x+1)^2$

(4) $(2x^2-4)^2+9$

Lời giải

(1) $(2x^2+6x+1)(2x^2-6x+1)$.

(2) $(x^2+2)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$.

(3) $2(x-1)^2(x^2+x+1)$.

(4) $(2x^2+6x+5)(2x^2-6x+5)$.

🗁 **Bài 9.** (1) $4x^4+1$

(2) $4x^4+y^4$

(3) x^4+324

Lời giải

(1) Thêm và bớt $4x^2$. Đáp số $(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$.

(2) Thêm và bớt $4x^2y^2$.Đáp số $(2x^2+2xy+y^2)(2x^2-2xy+y^2)$.

(3) Thêm và bớt $36x^2$. Đáp số: $\left(x^2+6x+18\right)\left(x^2-6x+18\right)$.

🗁 **Bài 10.** (1) x^5+x^4+1.

(2) x^5+x+1.

(3) x^8+x^7+1.

(4) x^5-x^4-1.

(5) x^7+x^5+1.

(6) x^8+x^4+1.

Lời giải

(1) Thêm và bớt x^3.

$$x^5+x^4+1=x^5+x^4+x^3-x^3+1=x^3\left(x^2+x+1\right)-(x-1)\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x+1\right)$$

(2) Thêm và bớt x^2. Đáp số: $\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)$.

(3) Thêm và bớt x^2+x. Đáp số: $\left(x^2+x+1\right)\left(x^6-x^4+x^3-x+1\right)$.

(4) Thêm và bớt x^2+x. Đáp số: $(x^2-x+1)(x^3-x-1)$

(5) Thêm và bớt x^2+x. Đáp số $\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^3-x+1\right)$

(6) Thêm và bớt x^4. Đáp số: $\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$.

Bài 11. (1) x^8+14x^4+1.

(2) x^8+98x^4+1.

Lời giải

(1) Thêm và bớt $4x^2\left(x^4+1\right)$ được

$A=(x^4+2x^2+1)^2-4x^2(x^2-1)^2=(x^4+2x^3+2x^2-2x+1)(x^4-2x^3+2x^2+2x+1)$

(2) $x^8+98x^4+1=\left(x^4+1\right)^2+96x^4$

$$=\left(x^4+1\right)^2+16x^2\left(x^4+1\right)+64x^4-16x^2\left(x^4+1\right)+32x^4$$
$$=\left(x^4+4x^3+8x^2-4x+1\right)\left(x^4-4x^3+8x^2+4x+1\right)$$

Bài 12. Dùng phương pháp xét giá trị riêng:

$$M=a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$$
$$\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)$$

Lời giải

Kiểm tra với $a=0$ thì $M=0$. Do vai trò bình đẳng của a,b,c nên M có nhân tử abc, nhân tử còn lại là hằng số k.

Cho $a=b=c=1$ được $k=4$. Vậy $M=4abc$.

Bài 13. Chứng minh rằng tích bốn số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là một số chính phương.

Lời giải

Biến đổi $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$.

Bài 14. Chứng minh rằng số $A=(n+1)^4+n^4+1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (n+1)^4+n^4+1=\left(n^2+2n+1\right)^2-n^2+\left(n^4+n^2+1\right) \\ &= \left(n^2+3n+1\right)\left(n^2+n+1\right)+\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right) \\ &= \left(n^2+n+1\right)\left(2n^2+2n+2\right)=2\left(n^2+n+1\right)^2 \end{aligned}$$

Bài 15. Cho $A=a^2+b^2+c^2$, trong đó a và b là hai số tự nhiên liên tiếp, $c=ab$. Chứng minh rằng $\sqrt{A}$ là một số tự nhiên lẻ.

Lời giải

$$A=a^2+b^2+c^2=a^2+(a+1)^2+a^2(a+1)^2=2a^2+2a+1+a^2(a+1)^2$$

$$=a^2(a+1)^2+2a(a+1)+1=[a(a+1)+1]^2$$

Ta có $\sqrt{A}=a(a+1)+1$, là số lẻ.

Bài 4

TÍNH CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN.

1 Tóm tắt lý thuyết

Tính chia hết đối với số nguyên đã được trình bày ở cuốn Nâng cao và phát triển Toán 6 , Nâng cao và phát triển Toán 7 . Nhờ sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ và phân tích đa thức thành nhân tử ở lớp 8 ta có khả năng giải quyết nhiều bài toán về chia hết phức tạp hơn ở các lớp dưới.

A. CHỨNG MINH QUAN HỆ CHIA HẾT

Gọi $A(n)$ là một biểu thức phụ thuộc vào $n(n \in \mathbb{N}$ hoăc $n \in \mathbb{Z})$.

Để chứng minh biểu thức $A(n)$ chia hết cho một số m, ta thường phân tích biểu thức $A(n)$ thành thùa số, trong đó có một thùa số là m. Nếu m là hợp số, ta phân tích nó thành một tích các thùa số đôi một nguyên tố cùng nhau, rồi chứng minh $A(n)$ chia hết cho tất cả các số đó. Nên lưu ý nhận xét: Trong k số nguyên liên tiếp, bao giờ cũng tồn tai một bội số của k.

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $A = n^3(n^2-7)^2 - 36n$ chia hết cho 5040 với mọi số tự nhiên n.

Lời giải

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Phân tích $A = n\left[n^2(n^2-7)^2 - 36\right] = n\left[(n^3-7n)^2 - 6^2\right] = n(n^3-7n-6)(n^3-7n+6)$

Ta lại có:

$$n^3 - 7n - 6 = (n+1)(n+2)(n-3)$$
$$n^3 - 7n + 6 = (n-1)(n-2)(n+3)$$

Do đó $A = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Đây là tích của bảy số nguyên liên tiếp. Trong bảy số nguyên liên tiếp:

- Tồn tại một bội số của 5 (nên A chia hết cho 5);
- Tồn tại một bội số của 7 (nên A chia hết cho 7);
- Tồn tại một bội số của 3 (nên A chia hết cho 9) ;
- Tồn tại một bội số của 2 , trong đó có một bội số của 4 (nên A chia hết cho 16).

A chia hết cho các số $5,7,9,16$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên A chia hết cho $5\cdot7\cdot9\cdot16=5040$.

Khi chứng minh $A(n)$ chia hết cho m, ta có thể xét moi trường hợp về số du khi chia n cho m.

> 🕮 **Ví dụ 2.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì
>
> a) a^2-a chia hết cho 2
>
> b) a^3-a chia hết cho 3.
>
> c) a^5-a chia hết cho 5.
>
> d) a^7-a chia hết cho 7.

Lời giải

(1) $a^2-a=a(a-1)$, chia hết cho 2 .

(2) $a^3-a=a(a^2-1)=(a-1)a(a+1)$, tích này chia hết cho 3 vì tồn tại một bội của 3 .

(3) $A=a^5-a=a(a^2+1)(a^2-1)$.

Nếu $a=5k\,(k\in\mathbb{Z})$ thì a chia hết cho 5 .

Nếu $a=5k\pm1\,(k\in\mathbb{Z})$ thì a^2-1 chia hết cho 5 .

Nếu $a=5k\pm2\,(k\in\mathbb{Z})$ thì a^2+1 chia hết cho 5 .

Trường hợp nào cũng có một thừa số của A chia hết cho 5 .

Cách 2: Phân tích a^5-a thành một tổng của hai số hạng chia hết cho 5: Một số hạng là tích của năm số nguyên liên tiếp, một số hạng chứa thừa số 5 .

$$a^5-a=a(a^2-1)(a^2+1)=a(a^2-1)(a^2-4+5)=a(a^2-1)(a^2-4)+5a(a^2-1)$$
$$=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5a(a^2-1).$$

Số hạng thứ nhất là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 5 , số hạng thứ hai cũng chia hết cho 5 . Do đó a^5-a chia hết cho 5 .

Cách 3: Giải tương tự như cách 2 : Xét hiệu giữa a^5-a và tích năm số nguyên liên tiếp $(a-2)$ $(a-1)a(a+1)(a+2)$, được $5a(a^2-1)$. Do đó a^5-a chia hết cho 5 .

(4) $A=a^7-a=a(a^3+1)(a^3-1)$.

Nếu $a=7k\,(k\in\mathbb{Z})$ thì a chia hết cho 7 .

Nếu $a=7k+1\,(k\in\mathbb{Z})$ thì a^3-1 chia hết cho 7 .

Nếu $a = 7k - 1\left(k \in \mathbb{Z}\right)$ thì $a^3 + 1$ chia hết cho 7 .

Nếu $a = 7k + 2\left(k \in \mathbb{Z}\right)$ thì $a^3 - 1$ chia hết cho 7 .

Nếu $a = 7k - 2\left(k \in \mathbb{Z}\right)$ thì $a^3 + 1$ chia hết cho 7 .

Nếu $a = 7k + 3\left(k \in \mathbb{Z}\right)$ thì $a^3 + 1$ chia hết cho 7 .

Nếu $a = 7k - 3\left(k \in \mathbb{Z}\right)$ thì $a^3 - 1$ chia hết cho 7 .

Trường hợp nào cũng có một thừa số của A chia hết cho 7 .

Vậy $a^7 - a$ chia hết cho 7 .

Ví dụ 3. Chứng minh rằng một số chính phương chia cho 3 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1.

Lời giải

Gọi A là số chính phương $A = n^2\left(n \in \mathbb{N}\right)$. Xét các trường hợp

$-n = 3k\left(k \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow A = 9k^2$, chia hết cho 3

$-n = 3k \pm 1\left(k \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow A = 9k^2 \pm 6k + 1$, chia cho 3 dư 1.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng một số chính phương chia cho 4 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1.

Lời giải

Gọi A là số chính phương $A = n^2\left(n \in \mathbb{N}\right)$. Xét các trường hợp

$-n = 2k\left(k \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow A = 4k^2$, chia hết cho 4

$-n = 2k + 1\left(k \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow A = 4k^2 + 4k + 1 = 4k\left(k + 1\right) + 1$, chia cho 4 dư 1

Vậy số chính phương chia cho 4 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1 .

Từ bài toán trên ta thấy

- *Số chính phương chẵn thì chia hết cho 4 .*

- *Số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 (hơn nữa, chia cho 8 cũng dư 1).*

Ví dụ 5. Các số sau có là số chính phương không?

$M = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2$

$N = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2$

$P = 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100}$

Lời giải

Các số $1993^2, 1994^2$ là các số chính phương không chia hết cho 3 nên chia cho 3 dư 1 , còn 1992^2 chia hết cho 3 . Số M là số chia cho 3 dư 2 , không là số chính phương.

Các số $1992^2, 1994^2$ là số chính phương chan nên chia hết cho 4. Các số $1993^2, 1995^2$ là các số chính phương lẻ nên chia cho 4 dư 1 . Số N là số chia cho 4 dư 2 , không là số chính phương. Các số $94^{100}, 1994^{100}$ là số chính phương chan nên chia hết cho 4. Còn 9^{100} là số chính phương lẻ nên chia cho 4 dư 1. Số P là số chia cho 4 dư 2 , không là số chính phương.

Ví dụ 6. Trong dãy số sau có tồn tại số nào là số chính phương không?

11, 111, 1111, 11111, …

Lời giải

Mọi số của dãy đều tận cùng bởi 11 nên là số chia cho 4 dư 3. Mặt khác, số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 .

Vậy không có số nào của dãy là số chính phương.

Khi chứng minh về tính chất chia hết của các lũy thừa, ta còn sử dụng đến các hằng đẳng thức 8, 9 ở bài 2 và công thức Niu-ton sau đây:

$$(a+b)^n = a^n + c_1 a^{n-1} b + c_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + c_{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Trong công thức trên, vế phải là một đa thức có $n+1$ hang tử, bậc của mỗi hang tử đối với tập hợp các biến a, b là n (phần biến số của mỗi hang tử có dạng $a^i b^k$, trong đó $i + k = n$ với $0 \le i \le n, 0 \le k \le n$). Các hệ số $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ được xác định bởi tam giác Pa-xcan:

Trong hình 1 , các số dọc theo một canh góc vuông bằng 1 , các số dọc theo cạnh huyền bằng 1. Cộng mỗi số với số liền sau bên phải thì được số đứng ở hàng dưới của số liền sau ấy, chẳng hạn ở hình 2.

Áp dung các hằng đang thức đó vào tính chia hết, ta có với moi số nguyên a, b và số tự nhiên :

$$a^n - b^n \text{ chia hết cho } a - b\left(a \neq b\right)$$
$$a^{2n+1} - b^{2n+1} \text{ chia hết cho } a + b\left(a \neq -b\right)$$
$$(a+b)^n = BSa + b^n\left(BSa \text{ là bội của } a\right) .$$

Đặc biệt nên lưu ý đến:

$$(a+1)^n = BSa + 1;$$
$$(a-1)^{2n} = BSa + 1;$$
$$(a-1)^{2n+1} = BSa - 1.$$

> 📖 **Ví dụ 7**. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, biểu thức $16^n - 1$ chia hết cho 17 khi và chỉ khi n là số chẳn.

Lời giải

Nếu n chẵn $\left(n = 2k, k \in \mathbb{N}\right)$ thì $A = 16^{2k} - 1 = \left(16^2\right)^k - 1$ chia hết cho $16^2 - 1$ theo hằng đẳng thức 8, mà $16^2 - 1 = 255$, chia hết cho 17 . Vậy A chia hết cho 17 .

Nếu n lẻ thì $A = 16^n + 1 - 2$, mà $16^n + 1$ chia hết cho 17 theo hằng đẳng thức 9, nên A không chia hết cho 17 .

Vậy A chia hết cho 17 khi và chỉ khi n chẵn.

Cách 2: $A = 16^n - 1 = (17-1)^n - 1 = BS17 + (-1)^n - 1$ (theo công thức Niu-tơn).

Nếu n chẵn thì $A = BS17 + 1 - 1 = BS17$.

Nếu n lẻ thì $A = BS17 - 1 - 1$ không chia hết cho 17 .

(1) Người ta còn dùng phương pháp phản chứng, nguyên lí Di-rích-lê để chứng minh quan hệ chia hết.

> 📖 **Ví dụ 8**. Chứng minh rằng tồn tại một bội của 2003 có dạng $20042004...2004$

Lời giải

Xét 2004 số:

$a_1 = 2004$

$a_2 = 20042004$

…

$a_{2004} = 20042004\ldots2004$ (nhóm 2004 có mặt 2004 lần)

Theo nguyên lí Đi-rích-lê, tồn tại hai số có cùng số dư khi phép chia cho 2003 .

Gọi hai số đó là a_m và $a_n (1 \leq n < m \leq 2004)$ thì $a_m - a_n \vdots 2003$. Ta có

$$a_m - a_n = 2004...20040000...0000 = \underbrace{2004...2004}_{m-n \text{ nhóm } 2004}.10^{4n}$$

Do 10^{4n} và 2003 nguyên tố cùng nhau nên $\underbrace{2004...2004}_{m-n \text{ nhóm } 2004}$ chia hết cho 2003

B. TÌM SỐ DƯ

Ví dụ 9. Tìm số dư khi chia 2^{100}

a) cho 9 b) Cho 25 c) Cho 125

Lời giải

1. Lũy thừa của 2 sát với bội số của 9 là $2^3 = 8 = 9 - 1$.

Ta có $2^{100} = 2\left(2^3\right)^{33} = 2(9-1)^{33} = 2\left(BS9 - 1\right) = BS9 - 2 = BS9 + 7$

Số dư khi chia 2^{100} cho 9 là 7 .

2. Lũy thừa của 2 sát với bội số của 25 là $2^{10} = 1024 = BS25 - 1$.

Ta có $2^{100} = \left(2^{10}\right)^{10} = (BS25 - 1)^{10} = BS25 + 1$

Số dư khi chia 2^{100} cho 25 là 1 .

3. Dùng công thức Niu-tơn:

$$2^{100} = (5-1)^{50} = 5^{50} - 50 \cdot 5^{49} + \cdots + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 5^2 - 50 \cdot 5 + 1$$

Không kể phần hệ số của khai triển Niu-tơn thì 48 số hạng đầu đã chứa lũy thừa của 5 với số mũ lớn hơn hoặc bằng 3 nên chia hết cho 125. Hai số hạng tiếp theo cũng chia hết cho 125, số hạng cuối cùng là 1 . Vậy $2^{100} = BS125 + 1$.

** Tổng quát hơn, ta chứng minh được rằng nếu một số tự nhiên n không chia hết cho 5 thì chia n^{100} cho 125 ta được số dư là 1 .*

Thật vậy, n có dang $5k \pm 1$ hoăc $5k \pm 2$. Ta có

$$(5k \pm 1)^{100} = (5k)^{100} \pm \cdots + \frac{100 \cdot 99}{2}(5k)^2 \pm 100 \cdot 5k + 1 = BS125 + 1$$

$$(5k \pm 2)^{100} = (5k)^{100} \pm \cdots + \frac{100 \cdot 99}{2}(5k)^2 \cdot 2^{98} \pm 100 \cdot 5k \cdot 2^{99} + 2^{100} = BS125 + 2^{100}$$

Ta lại có $2^{100} = BS125 + 1\left(caâc\right)$. *Do đó* $(5k \pm 2)^{100} = BS125 + 1$.

Ví dụ 10. Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} khi viết trong hệ thập phân

Lời giải

Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} là tìm số dư khi chia 2^{100} cho 1000 . Trước hết tìm số dư khi chia 2^{100} cho 125 . Theo ví dụ trên ta có $2^{100} = BS125 + 1$, mà 2^{100} là số chẵn, nên ba chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là 126, 376, 626 hoặc 876 .

Hiển nhiên 2^{100} chia hết cho 8 nên ba chữ số tận cùng của nó phải chia hết cho 8 . Trong bốn số trên chỉ có 376 thỏa mãn điều kiện này.

Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{100} là 376 .

* Ban doc tự chứng minh rằng nếu n là số chẵn không chia hết cho 5 thì ba chũ số tận cùng của n^{100} là 376

Ví dụ 11. Tìm bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} khi viết trong hệ thập phân

Lời giải

$5^4=625.$ Ta thấy số tận cùng bằng 0625 nâng lên lũy thừa nguyên dương bất kì vẫn tận cùng bằng 0625 (chỉ cần kiểm tra: ... $0625\times\ldots0625=\ldots0625$).

Do đó

$$5^{1994}=5^{4k+2}=25\left(5^4\right)^k=25(0625)^k=25(\ldots0625)=\ldots5625$$

Cách khác: Tìm số dư khi chia 5^{1994} cho $10000=2^4\cdot5^4$.

Nhận xét: $5^{4k}-1$ chia hết cho $5^4-1=\left(5^2+1\right)\left(5^2-1\right)$ nên chia hết cho 16 .

Ta có $5^{1994}=5^6\left(5^{1988}-1\right)+5^6$

Do 5^6 chia hết cho 5^4, còn $5^{1988}-1$ chia hết cho 16 (theo nhận xét trên) nên $5^6\left(5^{1988}-1\right)$ chia hết cho 10000 . Tính 5^6, ta được 15625 . Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} là 5625 .

* *Nếu viết* $5^{1994}=5^2\left(5^{1992}-1\right)+5^2$ *thì ta có* $5^{1992}-1$ *chia hết cho 16, nhưng* 5^2 *không chia hết cho* 5^4 *Như thế trong bài toán này, ta cần viết* 5^{1994} *dưới dang* $5^n\left(5^{1994-n}-1\right)+5^n$ *sao cho* $n\geq4$ *và* $1994-n$ *chia hết cho 4* .

C. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CHIA HẾT

Ví dụ 12. Tìm số nguyên x để giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B

A= x^3+2x^2-3x+2 $\qquad B=x^2-x$

Lời giải

Đặt tính chia

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-3x+2 & x^2-x \\ \hline -x^3+x^2 & x+3 \\ 3x^2-3x+2 & \\ -3x^2+3x & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Muốn chia hết, ta phải có 2 chia hết cho $n(n-1)$, do đó 2 chia hết cho n.

Ta có

n	1	-1	2	-2
$n-1$	0	-2	1	-3
$n(n-1)$	0	2	2	6
	loại			loại

Vậy $n=-1; n=2$.

* Chú ý :

1. Không thể nói đa thức A chia hết cho đa thức B. Ở đây chỉ tồn tai những giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B.

2. Có thể thay việc đặt phép chia bằng cách biến đổi:

$$x^3+2x^2-3x+2=x\left(x^2-x\right)+3\left(x^2-x\right)+2$$

Ví dụ 13. Tìm số nguyên dương n để n^5+1 chia hết cho n^3+1.

Lời giải

Biến đổi

$$\begin{aligned} n^5+1 \vdots n^3+1 &\Leftrightarrow n^2\left(n^3+1\right)-\left(n^2-1\right) \vdots n^3+1 \\ &\Leftrightarrow (n+1)(n-1) \vdots (n+1)\left(n^2-n+1\right) \\ &\Leftrightarrow n-1 \vdots n^2-n+1 \left(\text{ vì } n+1 \neq 0\right) \end{aligned}$$

Nếu $n=1$ thì ta được 0 chia hết cho 1 .

Nếu $n>1$ thì $n-1<n(n-1)+1=n^2-n+1$, do đó $n-1$ không thể chia hết cho n^2-n+1. Vậy giá trị duy nhất của n tìm được là 1 .

Ví dụ 14. Tìm số nguyên n để n^5+1 chia hết cho n^3+1.

Lời giải

Biến đổi

$n^5+1 \vdots n^3+1 \Leftrightarrow n^2\left(n^3+1\right)-\left(n^2-1\right) \vdots n^3+1$

$\Leftrightarrow (n+1)(n-1) \vdots (n+1)\left(n^2-n+1\right)$

$\Leftrightarrow n-1 \vdots n^2-n+1$

$n-1 \vdots n^2-n+1 \Rightarrow n(n-1) \vdots n^2-n+1 \Rightarrow n^2-n \vdots n^2-n+1$

$\Rightarrow \left(n^2-n+1\right)-1 \vdots n^2-n+1 \Rightarrow 1 \vdots n^2-n+1$

Có hai trường hợp:

$-n^2-n+1=1 \Leftrightarrow n(n-1)=0 \Leftrightarrow n=0; n=1$. Các giá trị thỏa mãn đề bài.

$-n^2-n+1=-1 \Leftrightarrow n^2-n+2=0$, voâ nghieäm.

Vậy $n=0; n=1$ là hai số phải tìm.

(1) Từ $n-1 \vdots n^2-n+1$ suy ra $n(n-1) \vdots n^2-n+1$ là phép kéo theo chứ không là phép biến đổi tương đương. Do đó sau khi tìm được $n=0, n=1$, ta phải thử lại.

Ví dụ 15. Tìm số tự nhiên n sao cho 2^n-1 chia hết cho 7

Lời giải

Nếu $n=3k\left(k \in \mathbb{N}\right)$ thì $2^n-1=2^{3k}-1=8^k-1$ chia hết cho 7 .

Nếu $n=3k+1\left(k \in \mathbb{N}\right)$ thì $2^n-1=2^{3k+1}-1=2\left(2^{3k}-1\right)+1=BS7+1$

Nếu $n=3k+2\left(k \in \mathbb{N}\right)$ thì $2^n-1=2^{3k+2}-1=4\left(2^{3k}-1\right)+3=BS7+3$

Vậy 2^n-1 chia hết cho $7 \Leftrightarrow n=3k\left(k \in \mathbb{N}\right)$.

3 Bài tập tự luyện:

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có:

1. n^3+3n^2+2n chia hết cho 6 .

2. $\left(n^2+n-1\right)^2-1$ chia hết cho 24 .

Lời giải

1. Biến đổi $n^3+3n^2+2n=n(n+1)(n+2)$, đây là tích của ba số nguyên liên tiếp.

Do đó n^3+3n^2+2n chia hết cho 6 với mọi nguyên n .

Suy ra điều phải chứng minh.

2. Biểu đổi $\left(n^2+n+1\right)^2-1=(n-1)n(n+1)(n+2)$

Đây là tích của 4 số nguyên liên tiếp, do đó: $\left(n^2+n-1\right)^2-1$ chia hết cho 24.

Bài 2. Chứng minh rằng:

1. n^3+6n^2+8n chia hết cho 48 với mọi số chẵn n.

2 n^4-10n^2+9 chia hết cho 384 với mọi số lẻ n.

Lời giải

1 Biến đổi $n^3+6n^2+8n=n(n+2)(n+4)$.

Vì n là số chẵn nên ta thay $n=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$, ta có:

$n^3+6n^2+8n=2k(2k+2)(2k+4)=8k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 48

Suy ra điều phải chứng minh.

2 Đặt $A=n^4-10n^2+9$.

$\Rightarrow A=n^4-10n^2+9=\left(n^2-1\right)\left(n^2-9\right)=(n-1)(n+1)(n-3)(n+3)$

Vì n là số lẻ suy ra $n=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$, thay vào biểu thức ta có:

$A=(n-1)(n+1)(n-3)(n+3)$

$=(2k+1-1)(2k+1+1)(2k+1-3)(2k+1+3)$

$=(2k-2)2k(2k+2)(2k+4)$

$=2(k-1)\cdot 2k\cdot 2(k+1)\cdot 2(k+2)$

$=8(k-1)k(k+1)(k+2)$

Vì $(k-1)k(k+1)(k+2)$ là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên $(k-1)k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 24

Suy ra A chia hết cho 384.

Bài 3. Chứng minh rằng $n^6+n^4-2n^2$ chia hết cho 72 với mọi số nguyên n.

Lời giải

Đặt $A=n^6+n^4-2n^2$, ta có:

$A=n^6+n^4-2n^2$

$=n^2\left(n^4+n^2-2\right)$

$=n^2\left(n^2-1\right)\left(n^2+2\right)$

$=n^2(n-1)(n+1)\left(n^2-4\right)+6n^2(n-1)(n+1)$

$=n.n.(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+6n.n(n-1)(n+1)$

$=(n-2)(n-1)n.n(n+1)(n+2)+6n.n(n-1)(n+1)$

$(n-2)(n-1)n$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp suy ra $(n-2)(n-1)n$ chia hết cho 3.

$n(n+1)(n+2)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp suy ra $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow (n-2)(n-1)n\cdot n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 9 .

Mà trong 5 số tự nhiên liên tiếp có ít nhất 1 số chia hết cho 2 và 1 số chia hết cho 4 suy ra:
$(n-2)(n-1)n\cdot n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 8 .

Suy ra $(n-2)(n-1)n\cdot n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 72 .

Dễ dàng chứng minh được $6n\cdot n(n-1)(n+1)$ chia hết cho 72 .

Suy ra A chia hết cho 72 .

🗁 **Bài 4**. Chứng minh rằng $3^{2n}-9$ chia hết cho 72 với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

Biến đổi $B=3^{2n}-9=9^n-9$, nên $B\vdots 9$.

Đề chứng minh $B\vdots 8$ ta viết B dưới dạng:

$$B=\left(3^n\right)^2-1-8=\left(3^n-1\right)\left(3^n+1\right)-8$$

Vì 3^n-1 và 3^n+1 là 2 số chan liên tiếp nên $\left(3^n-1\right)\left(3^n+1\right)$ chia hết cho 8 .

Suy ra: B chia hết cho 8 .

Vậy $3^{2n}-9$ chia hết cho 72 với mọi số nguyên dương n .

🗁 **Bài 5**. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên a và n thì:

1) 7^n và 7^{n+4} có hai chữ số tận cùng như nhau.

2) a và a^5 có chữ số tận cùng như nhau.

3) a^n và a^{n+4} có chữ số tận cùng như nhau $(n\geq 1)$

Lời giải

1. Xét hiệu $A=7^{n+4}-7^n$ ta có:

$A=7^{n+4}-7^n=7^n\left(7^4-1\right)$

$=7^n\cdot 2400$

$\Rightarrow A\vdots 100$

Vậy 2 số 7^n và 7^{n+4} có hai chữ số tận cùng như nhau.

2. Xét hiệu $B=a^5-a=a\left(a^2+1\right)\left(a^2-1\right)$.

Dễ dàng chứng minh $B\vdots 2$ và $B\vdots 5$ suy ra $B\vdots 10$.

Vậy a và a^5 có chữ số tận cùng như nhau

3 Xét hiệu $C=a^{n+4}-a^n=a^n\left(a^2+1\right)\left(a^2-1\right)$.

Dễ dàng chứng minh $C\vdots 2$ và $C\vdots 5$ suy ra $C:10$.

Vậy a^n và a^{n+4} có chữ số tận cùng như nhau.

🗁 **Bài 6**. Tìm điều kiện của số tự nhiên a để a^2+3a+2 chia hết cho 6 .

Lời giải

$a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$ luôn chia hết cho 2

$a^2+3a+2 \vdots 3 \Leftrightarrow a^2$ chia 3 dư $1 \Leftrightarrow a$ không chia hết cho 3 .

Vậy nếu a không chia hết cho 3 thì a^2+3a+2 chia hết cho 6 .

Bài 7. 1 Cho a là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng a^2-1 chia hết cho 24 .

2. Chứng minh rằng nếu a và b là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì a^2-b^2 chia hết cho 24 .

3. Tìm điều kiện của số tự nhiên a để a^4-1 chia hết cho 240 .

Lời giải

1. Ta có a^2 là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư $1, a^2$ là số chính phương không chia hết cho 3 nên chia cho 3 dư 1 .

Suy ra a^2-1 chia hết cho 8, chia hết cho 3 , do đó chia hết cho 24 .

2. Áp dụng ý a) ta có nếu a và b là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì:

a^2-1 chia hết cho 3 và b^2-1 chia hết cho 3 .

$\Leftrightarrow (a^2-1)-(b^2-1) \vdots 3 \Leftrightarrow a^2-b^2 \vdots 3$

Suy ra điều phải chứng minh.

3. Ta có: $240=2^4\cdot 3\cdot 5$

Vì $A \vdots 240 \Rightarrow a^4-1 \vdots 2$; $a^4-1 \vdots 3$; $a^4-1 \vdots 5$

Dễ thấy $a^4-1 \vdots 2 \Leftrightarrow a$ là số lẻ.

Dễ thấy $a^4-1 \vdots 3 \Leftrightarrow a$ không chia hết cho 3.

Dễ thấy $a^4-1 \vdots 5 \Leftrightarrow a$ không chia hết cho 5.

Ta sẽ chứng minh nếu a không chia hết cho 2,3 và 5 thì a^4-1 chia hết cho 240 .

Thật vậy:

$A=a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)$

$=(a-1)(a+1)(a^2+1)$

Nếu a lẻ thì $a=2k+1$ với $(k \in \mathbb{N})$.

Khi đó ta có:

$A=(a-1)(a+1)(a^2+1)$

$=(2k+1-1)(2k+1+1)\cdot\left[(2k+1)^2+1\right]$

$=2k(2k+2)(4k^2+4k+2)$

$=8k(k+1)(2k^2+2k+1)$

$\Rightarrow A \vdots 16$

Nếu a không chia hết cho 3 thì $a = 3k \pm 1$ với $(k \in \mathbb{N})$.

Khi đó ta có $a^2 - 1 \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 3$

Nếu a không chia hết cho 5 thì $a = 5k \pm 1$ hoặc $a = 5k \pm 2$ với $(k \in \mathbb{N})$.

Suy ra $a^2 - 1 \vdots 5$ hoặc $a^2 + 1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$.

$\Rightarrow A : 240$

Vậy nếu a không chia hết cho 2,3 và 5 thì $a^4 - 1$ chia hết cho 240 .

Bài 8. Tìm ba số nguyên tố liên tiếp a,b,c sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ cũng là một số nguyên tố.

Lời giải

Xét 2 trường hợp:

1. Trong a,b,c có một số bằng 3 .

Khi đó: $2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$, là hợp số, loại.

Còn $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ là một số nguyên tố, thỏa mãn.

2. Cả a,b,c đều lớn hơn 3 .

Khi đó a^2, b^2, c^2 đều chia cho 3 dư 1 nên $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 3 , là hợp số, loại.

Vậy ba số nguyên tố liên tiếp a,b,c là $3,5,7$ thì $a^2 + b^2 + c^2$ cũng là một số nguyên tố.

Bài 9. Cho bốn số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Chứng minh rằng $a+b+c+d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(c^2 + d^2) \vdots 2$.

Xét:

$A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a+b+c+d)$

$= (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d)$

$= a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1)$

Vì $a(a-1) \vdots 2; b(b-1) \vdots 2; c(c-1) \vdots 2; d(d-1) \vdots 2$.

$\Rightarrow A \vdots 2 \Leftrightarrow a+b+c+d \vdots 2$.

Mà a,b,c,d là các số nguyên dương suy ra $a+b+c+d > 2 \Rightarrow a+b+c+d$ là hợp số (điều phải chứng minh).

Bài 10. Cho bốn số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ là hợp số.

Lời giải

Gọi $\text{UCLN}(a,c) = k$, ta có: $a = ka_1, c = kc_1$ và $(a_1, c_1) = 1$.

Thay vào $ab = cd$ được $ka_1b = kc_1d$ nên: $a_1b = c_1d$

Bài 11. Cho các số tự nhiên a và b. Chứng minh rằng:

1. Nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì a và b chia hết cho 3 .
2. Nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 7 thì a và b chia hết cho 7 .

Lời giải

1. Một số chính phương chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1 .

Xét các trường hợp tổng của 2 số dư: $0+0; 0+1; 1+1$ thì chỉ có $0+0$ là chia hết cho 3 . Do đó để $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì $a^2 \vdots 3$ và $b^2 \vdots 3$

$\Rightarrow a \vdots 3$ và $b \vdots 3 \Rightarrow a + b \vdots 3$

Suy ra điều phải chứng minh.

2. Nhận xét: Một số chính phương khi chia cho 7 chỉ có thể dư là $0; 1; 2; 4$.

Ta có: $a^2 + b^2$ chia hết cho 7 nên chỉ có trường hợp 2 số dư là $0+0$ thỏa mãn.

$\Rightarrow a^2 \vdots 7$ và $b^2 \vdots 7 \Rightarrow a \vdots 7$ và $b \vdots 7$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 12. Cho các số nguyên a, b, c. Chứng minh rằng:

1. Nếu $a + b + c$ chia hết cho 6 thì $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6 .

2. Nếu $a + b + c$ chia hết cho 30 thì $a^5 + b^5 + c^5$ chia hết cho 30 .

Lời giải

1 Xét hiệu:

$A = \left(a^3 + b^3 + c^3\right) - \left(a + b + c\right)$

$= \left(a^3 - a\right) + \left(b^3 - b\right) + \left(c^3 - c\right)$

$= \left(a-1\right)a\left(a+1\right) + \left(b-1\right)b\left(b+1\right) + \left(c-1\right)c\left(c+1\right)$

$\Rightarrow A \vdots 6$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \vdots 6$

Suy ra điều phải chứng minh.

Xét hiệu:

$A = (a^5 + b^5 + c^5) - (a + b + c)$

$= (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c)$

$= a(a^4 - 1) + b(b^4 - 1) + c(c^4 - 1)$

$= a(a^2 - 1)(a^2 + 1) + b(b^2 - 1)(b^2 + 1) + c(c^2 - 1)(c^2 + 1)$

$= a(a-1)(a+1)(a^2 + 1) + b(b-1)(b+1)(b^2 + 1) + c(c-1)(c+1)(c^2 + 1)$

$= a(a-1)(a+1)(a^2 - 4) + 5a(a-1)(a+1) + b(b-1)(b+1)(b^2 - 4) + 5b(b-1)(b+1) + c(c-1)(c+1)(c^2 - 4) + 5c(c-1)(c+1)$

$= a(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)+5a(a-1)(a+1)+b(b-1)(b+1)(b-2)(b+2)+5b(b-1)(b+1)$

$+c(c-1)(c+1)(c-2)(c+2)+5c(c-1)(c+1)$

$=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5(a-1)a(a+1)+(b-2)(b-1)b(b+1)(b+2)$

$+5(b-1)b(b+1)+(c-2)(c-1)c(c+1)(c+2)+5(c-1)c(c+1))$

Nhận xét: $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp

$\Rightarrow (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) \vdots 30$

Mà dễ thấy $5(a-1)a(a+1) \vdots 30 \Rightarrow (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5(a-1)a(a+1) \vdots 30$.

Tương tự ta có: $(b-2)(b-1)b(b+1)(b+2)+5(b-1)b(b+1) \vdots 30$

và $(c-2)(c-1)c(c+1)(c+2)+5(c-1)c(c+1) \vdots 30. \Rightarrow A \vdots 30$.

Mà $a+b+c$ chia hết cho 30 suy ra $a^5+b^5+c^5$ chia hết cho 30 .

Suy ra điều phải chứng minh.

🗁 **Bài 13**. Cho các số nguyên a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng:

1. $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho $3abc$;
2. $a^5+b^5+c^5$ chia hết cho $5abc$.

Lời giải

(1) $a+b+c=0 \Rightarrow c=-(a+b)$.

Do đó: $a^3+b^3+c^3 = a^3+b^3+-(a+b)^3 = -3ab(a+b) = 3abc \vdots 3abc.$

Hay $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho $3abc$ (điều phải chứng minh).

(2) $a+b+c=0 \Rightarrow c=-(a+b)$.

Do đó:

$a^5+b^5+c^5 = a^5+b^5-(a+b)^5$

$=-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4$

$=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$

$=-5ab[(a^3+b^3)+(2a^2b+2ab^2)]$

$=-5ab[(a+b)(a^2-ab+b^2)+2ab(a+b)]$

$=-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$

$=5abc(a^2+ab+b^2)$

$\Rightarrow a^5+b^5+c^5 \vdots 5abc$, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 5

TÍNH CHẤT CHIA HẾT ĐỐI VỚI ĐA THỨC

1 TÌM DƯ CỦA PHÉP CHIA MÀ KHÔNG THỰC HIỆN PHÉP CHIA

1. Đa thức chia có dạng x - a (a là hằng).

Ví dụ 1. Chứng minh rằng số dư khi chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x-a$ bằng giá trị của đa
thức $f(x)$ tại $x=a$
Định lí Bê-du(Bézout, 1730-1783, nhà toán học Pháp)

Lời giải

Do đa thức chia $x-a$ có bậc nhất nên số dư khi chia $f(x) cho\, x-a$ là hằng số r

Ta có: $f(x)=(x-a)\cdot Q(x)+r$

Đẳng thức trên đúng với mọi x nên với $x=a$, ta có

$$f(a)=0\cdot Q(x)+r \text{ hay } f(a)=r$$

Từ đinh lí $B\hat{e}-du$ ta suy ra

Đa thức $f(x)$ chia hết cho $x-a$ khi và chi khi $f(a)=0$ (túc là khi a là nghiệm của da thức).

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức ấy chia hết cho $x-1$

Lời giải

Gọi $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$

Theo giả thuyết, $a_0+a_1+\ldots+a_n=0$

Theo định lý Bê-du, số dư khi chia $f(x)$ cho $x-1$ là

$$r=f(1)=a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

Từ (1) và (2), suy ra $r=0$.

Vậy $f(x)$ chia hết cho $x-1$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì đa thức ấy chia hết cho $x+1$

Lời giải

Gọi $f(x)=a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+\ldots+a_{2n-2}x^2+a_{2n-1}x+a_{2n}$, trong đó, a_0 có thể bằng 0. Theo giả thuyết, $a_0+a_2+..+a_{2n}=a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}$ nên

$$(a_0+a_2+\ldots+a_{2n})-(a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1})=0$$

Theo định lí Bê-du, số dư khi chia $f(x)$ cho $x+1$ bằng

$$\begin{aligned} r &= f(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+a_{2n-2}-a_{2n-a}+a_{2n} \\ &=(a_0+a_2+\ldots+a_{2n})-(a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra $r=0$.

Vậy $f(x)$ chia hết cho $x+1$.

1. **Đa thức có bậc tử từ bậc hai trở lên**

Ví dụ 4. Tìm dư khi chia $x^7+x^5+x^3+1$ cho x^2-1

Lời giải

Để tìm dư trong trường hợp này, ta thường dùng các cách sau:

Cách 1. (Tách ra ở đa thức bị chia nhưng đa thức chia hết cho đa thức chia).

Ta biết rằng x^n-1 chia hết cho $x-1$ với mọi số tự nhiên n nên $x^{2n}-1$ chia hết cho x^2-1.

Do đó $x^4-1, x^6-1,\ldots$ chia hết cho x^2-1.

Ta có:

$$\begin{aligned} x^7+x^5+x^3+1 &= x^7-x+x^5-x+x^3-x+3x+1 \\ &= x(x^6-1)+x(x^4-1)+x(x^2-1)+(3x+1) \end{aligned}$$

Dư khi chia $x^7+x^5+x^3+1$ cho x^2-1 là $3x+1$.

Cách 2. (Xét giá trị riêng).

Gọi thương là $Q(x)$, dư là $ax+b$. Ta có

$$x^7+x^5+x^3+1=(x+1)(x-1)\cdot Q(x)+ax+b, \forall x$$

Đẳng thức đúng với mọi x nên với $x=1$, ta được $4=a+b$. (1)

Với $x=-1$ ta được $-2=-a+b$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $a=3,b=1$.

Dư phải tìm là $3x+1$.

Để tách ra các đa thức chia hết cho x^2-1 hoăc x^2+1, cần nhớ lai các hằng đẳng thức 8 và 9 :

$$a^n-b^n \vdots a-b\left(a\neq b\right);$$

$$a^n+b^n \vdots a+b\left(a\neq -b\right),\ n \text{ lẻ}$$

2 SƠ ĐỒ HOÓC-NE

1. Các ví dụ

Ví dụ 5: Chia các đa thức

$a)\left(x^3-5x^2+8x-4\right):\left(x-2\right)$ $\quad b)\left(x^3-9x^2+6x+10\right):\left(x+1\right)$

$c)\left(x^3-7x+6\right):\left(x+3\right)$

Lời giải

1. Thương là x^2-3x+2.

2. Thương là $x^2-10x+16$, dư là -6

3 . Thương là x^2-3x+2.

2. Sơ đồ Hoóc-ne

Ta có thể tìm được kết quả khi chia đa thức $f\left(x\right)$ cho nhị thức $x-a(a$ là hằng số) bằng một cách khác.

Trở lại câu a) ở ví dụ trên $\left(x^3-5x^2+8x-4\right):\left(x-2\right)$. Các hệ số của đa thức bị chia thứ tự là 1 , $-5,8,-4$; hằng số a trong ví dụ này bằng 2 .

1. Đặt các hệ số của đa thức bị chia theo thứ tự vào các cột của dòng trên

	1	-5	8	-4
$a-2$				

2. Trong 4 cột để trống ở dòng dưới, ba cột đầu cho ta các hệ số của đa thức thương, cột cuối cùng cho ta số dư.

- Số ở cột thứ nhất của dòng dưới bằng số tương ứng ở dòng trên.

	1	-5	8	-4
$a-2$	1			

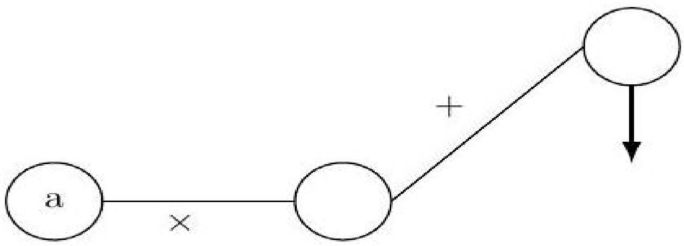
- Kể từ dòng thứ hai, mỗi số ở dòng dưới được xác định bằng cách lấy a nhân với số cùng dòng liền trước, rồi cộng với số cùng cột ở dòng trên.

	1	-5	8	-4
$a-2$	1	$2.1+(-5)=-3$		

	1	-5	8	-4
$a-2$	1	$2.1+(-5)=-3$	$2.(-3)+8=2$	

	1	-5	8	-4
$a-2$	1	$2.1+(-5)=-3$	$2.(-3)+8=2$	$2.2+(-4)=0$

Sơ đồ



Ta có thương bằng x^2-3x+2, số dư bằng 0.

Sơ đồ của thuật toán trên được gọi là sở đồ Hoóc-ne.

Bạn đọc hãy dùng sơ đồ trên để kiểm tra lại kết quả của các câu b) và c).

Như vậy nếu đa thức bị chia là $a_ox^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, đa thức chia là $x-a$, ta được thương $b_0x^2+b_1x+b_2$, dư r. Theo sơ đồ Hoóc-ne, ta có

	a_0	a_1	a_2	a_3
a	$b_0=a_0$	$b_1=ab_0+a_1$	$b_2=ab_1+a_2$	$r=ab_2+a_3$

3. Sơ đồ Hoóc-ne

Tổng quát với đa thức bị chia là $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, đa thức chia là $x-a$ thương là $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, dư r. Ta cần chứng minh rằng

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= ab_0 + a_1 \\
b_2 &= ab_1 + a_2 \\
&\ldots \\
b_{n-1} &= ab_{n-2} + a_{n-1} \\
r &= ab_{n-1} + a_n.
\end{aligned}$$

Thật vậy, thực hiện phép tính

$$(x-1)\left(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}\right)+r$$

rồi rút gọn, ta được: $b_0x^n+(b_1-ab_0)x^{n-1}+\ldots+(b_{n-1}-ab_{n-2})x-ab_{n-1}+r$

Đồng nhất đa thức này với đa thức bị chia, ta được

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0 \\
b_1 - ab_0 &= a_1 \\
b_2 - ab_1 &= a_2 \\
&\ldots \\
b_{n-1} - ab_{n-2} &= a_{n-1} \\
r - ab_{n-1} &= a_n.
\end{aligned}$$

Từ đó, suy ra điều phải chứng minh.

4. Áp dụng sơ đồ Hoóc-ne để tính giá trị của đa thức $f(x)$ tại $4x=a$

Sơ đồ Ho óc-ne cho ta thương và dư khi chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x-a$. Chú ý rằng theo định lí Bê-du, số dư khi chia $f(x)$ cho $x-a$ bằng $f(a)$. Do đó, dùng sơ đồ Hoóc-ne ta cũng tính được giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x=a$.

📖 **Ví dụ 6.** Tính giá trị của đa thức $f(x)=x^3+3x^2-4$ tại $x=37$.

Lời giải

Theo định lý Bê-du, $f(37)$ là số dư khi chia $f(x)$ cho $x-37$. Ta lập sơ đồ Hoóc-ne

	1	3	0	-4
$a=37$	1	$37.1+3=40$	$37.40+0=1480$	$37.1480-4=54756$

Vậy $f(37)=54756$.

3 CHỨNG MINH MỘT ĐA THỨC CHIA HẾT CHO MỘT ĐA THỨC KHÁC

Ta chỉ xét các đa thức một biến, thường có các cách sau:

1. Cách 1.

Phân tích đa thức bị chia thành nhân tử, trong đó có một nhân tử là đa thức chia.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng $x^{8n}+x^{4n}+1$ chia hết cho $x^{2n}+x^{n}+1$, với mọi số tự nhiên n.

Lời giải

Ta có

$$x^{8n}+x^{4n}+1=x^{8n}+2x^{4n}+1-x^{4n}=\left(x^{4n}+1\right)^2-\left(x^{2n}\right)^2$$

$$=\left(x^{4n}+1\right)\left(x^{4n}-x^{2n}+1\right)$$

Tiếp tục phân tích

$$x^{4n}+x^{2n}+1=x^{4n}+2x^{2n}+1-x^{2n}=\left(x^{2n}+1\right)^2-\left(x^{n}\right)^2$$
$$=\left(x^{2n}+x^{n}+1\right)\left(x^{2n}-x^{n}+1\right)$$

Vậy $x^{8n}+x^{4n}+1$ chia hết cho $x^{2n}+x^{n}+1$, với mọi số tự nhiên n.

2. Cách 2

Biến đổi đa thức bị chia thành một tổng các đa thức chia.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng $x^{3m+1}+x^{3n+2}+1$ chia hết cho x^2+x+1 với mọi số tự nhiên m,n.

Lời giải

Ta có

$$x^{3m+1}+x^{3n+2}+1=x^{3m+1}-x+x^{3n+2}-x^2+x^2+x+1$$

$$=x\left(x^{3m}-1\right)+x^2\left(x^{3n}-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$$

Ta thấy $x^{3m}-1$ và $x^{3n}-1$ chia hết cho x^3-1, do đó chia hết cho x^2+x+1.

Vậy $x^{3m+1}+x^{3n+2}+1$ chia hết cho x^2+x+1 với mọi số tự nhiên m,n.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m,n thì

$$x^{6m+4}+x^{6n+2}+1 \text{ chia hết cho } x^2-x+1.$$

Lời giải

$x^{6m+4}+x^{6n+2}+1=x^{6m+4}-x^4+x^{6n+2}-x^2+x^4+x^2+1$

$=x^4\left(x^{6m}-1\right)+x^2\left(x^{6n}-1\right)+\left(x^4+x^2+1\right)$

Do $x^{6m}-1\,\vdots\,x^6-1, x^{6n}-1\,\vdots\,x^6-1$ và

$x^6-1=\left(x^3+1\right)\left(x^3-1\right)\vdots\,x^2-x+1$

$x^4+x^2+1=\left(x^2+1\right)^2-x^2\,\vdots\,x^2-x+1$

Nên suy ra điều cần chứng minh.

3. Cách 3

Sử dụng các biến đổi tương đương, chẳng hạn để chứng minh $f(x)\,\vdots\,g(x)$, có thể chứng minh $f(x)+g(x)\,\vdots\,g(x)$ hoặc $f(x)-g(x)\,\vdots\,g(x)$.

Xem bài tập 268 .

4. Cách 4 .

Chứng tỏ rằng mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia (ta công nhận rằng điều này dẫn dến đa thức bị chia chia hết cho đa thức chia).

Ví dụ 10. Cho $f(x)=\left(x^2+x-1\right)^{10}+\left(x^2-x+1\right)^{10}-2$. Chứng minh rằng $f(x)$ chia hết cho x^2-x.

Lời giải

Đa thức chia có hai nghiệm $x=0$ và $x=1$. Ta sẽ chứng tỏ rằng $x=0$ và $x=1$ cũng là nghiệm của đa thức bị chia.

Ta có $f(0)=1+1-2=0$ nên $f(x)$ chia hết cho x. Ta lại có $f(1)=1+1-2=0$ nên $f(x)$ chia hết cho $x-1$. Các nhân tử x và $x-1$ không chứa nhân tử chung.

Do đó $f(x)$ chia hết cho $x(x-1)$.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Không đặt tính chia đa thức, hãy xét xem đa thức $x^3-9x^2+6x+16$ có hay không chia hết cho

a) $x+1$; b) $x-3$.

Lời giải

a) Có; b) Không.

Bài 2. Tìm dư khi chia các đa thức sau

a) $x^{41}:(x^2+1)$ b) $x^{43}:(x^2+1)$

Lời giải

a, $x^{41}=x^{41}-x+x=x(x^{40}-1)+x$. Ta thấy $x^{40}-1=(x^4)^{10}-1$ nên chia hết cho x^4-1, do đó chia hết cho x^2+1.

b, Dư $-x$.

Bài 3. Tìm dư khi chia $x+x^3+x^9+x^{27}$ cho

a) $x-1$; b) x^2+1;

Lời giải

a) Dư 4; b) Dư $4x$

Bài 4. Tìm dư khi chia $x^{99}+x^{55}+x^{11}+x+7$ cho

a) $x+1$; b) x^2+1

Lời giải

a, $r=f(-1)=-1-1-1+7=3$. Dư 3.

b, $x^{99}+x^{55}+x^{11}+x+7=x(x^{98}+1)+x(x^{54}+1)+x(x^{10}+1)-2x+7$.

Chú ý rằng $\left(x^2\right)^{49}+1,\left(x^2\right)^{27}+1,\left(x^2\right)^{25}+1$ chia hết cho x^2+1 (theo hằng đẳng thức 9). Như vậy dư cần tìm là $-2x+7$.

Bài 5. Tìm dư khi chia đa thức $f(x)=x^{50}+x^{49}+\ldots+x^2+x+1$ cho x^2-1.

Lời giải

Gọi thương khi chia $f(x)$ cho x^2-1 là $Q(x)$, dư là $ax+b$. Ta có

$$f(x)=\left(x^2-1\right)\cdot Q(x)+ax+b$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x. Lần lượt cho $x=1$ và $x=-1$.

Đáp: Dư khi chia $f(x)$ cho x^2-1 là $25x+26$.

Bài 6. Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x-3$ thì dư 7, $f(x)$ chia cho $x-2$ thì dư 5, $f(x)$ chia cho $(x-2)(x-3)$ thì được thương là $3x$ và còn dư.

Lời giải

Trước hết ta tìm dư khi chia $f(x)$ cho $(x-2)(x-3)$. Xét

$$f(x)=(x-3)\cdot A(x)+7 \qquad (1)$$

$$f(x)=(x-2)\cdot B(x)+5 \qquad (2)$$

Cách 1. Xét

$$f(x)=3x(x-2)(x-3)+ax+b \qquad (3)$$

Từ $(1),(2),(3)$ bằng cách cho $x=2, x=3$ ta tìm được $a=2, b=1$. Dư của phép chia $f(x)$ cho $(x-2)(x-3)$ là $2x+1$.

Do đó $f(x)=3x(x-2)(x-3)+2x+1=3x^3-15x^2+20x+1$.

Cách 2. Từ (1) suy ra

$$(x-2)f(x)=(x-2)(x-3)\cdot A(x)+7(x-2). \qquad (4)$$

Từ (2) suy ra

$$(x-3)f(x)=(x-2)(x-3)\cdot B(x)+5(x-3) \qquad (5)$$

Lấy (4) trừ (5) được $f(x)=(x-2)(x-3)\left[A(x)-B(x)\right]+2x+1$.

Dư khi chia $f(x)$ cho $(x-2)(x-3)$ là $2x+1$. Giải tiếp như cách 1 .

Bài 7. Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x-3$ thì dư 2, $f(x)$ chia cho $x+4$ thì dư 9, còn $f(x)$ chia cho x^2+x-12 thì được thương là x^2+3 và còn dư.

Lời giải

Đáp số: $x^4+x^3-9x^2+2x-31$.

Bài 8. Khi chia đơn thức x^8 cho $x+\frac{1}{2}$ thì được thương là $B(x)$ và dư là số r_1. Khi chia $B(x)$ cho $x+\frac{1}{2}$, ta được thương là $C(x)$ và dư là số r_2. Tính r_2.

Lời giải

Đặt $-\frac{1}{2}=a$, ta có $x^8=(x-a)\cdot B(x)+r_1$.

Cho $x=a$ thì $r_1=a^8$, do đó

$$x^8-a^8=(x-a)\cdot B(x)$$

nên

$$B(x)=\frac{x^8-a^8}{x-a}=\left(x^4+a^4\right)\left(x^2+a^2\right)(x+a)$$

Ta có

$$\left(x^4+a^4\right)\left(x^2+a^2\right)(x+a)=(x-a)\cdot C(x)+r_2$$

Cho $x=a$, ta được $2a^4\cdot 2a^2.2a=r_2$ nên $r_2=8a^7$

Thay $a=-\frac{1}{2}$, ta được $r_2=-\frac{1}{16}$.

Bài 9. Chứng minh rằng

1, $x^{50}+x^{10}+1$ chia hết cho $x^{20}+x^{10}+1$;

2, $x^2-x^9-x^{1945}$ chia hết cho x^2-x+1;

3, $x^{10}-10x+9$ chia hết cho $(x-1)^2$;

4, $8x^9-9x^8+1$ chia hết cho $(x-1)^2$.

Lời giải

1, Thêm bớt x^{20} vào đa thức bị chia.

2, Biến đổi $x^2-x^9-x^{1945}=\left(x^2-x+1\right)-\left(x^9+1\right)-\left(x^{1945}-x\right)$.

3, $x^{10}-10x+9=\left(x^{10}-1\right)-10(x-1)=(x-1)\left(x^9+x^8+x^7+\ldots+x+1-10\right)$

Biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai bằng $\left(x^9-1\right)+\left(x^8-1\right)+\ldots+\left(x-1\right)$, chia hết cho $x-1$.

4, Ta có

$$8x^9-9x^8+1=8\left(x^9-1\right)-9\left(x^8-1\right)$$

$$=(x-1)\left[8\left(x^8+x^7+\ldots+x+1\right)-9\left(x^7+x^6+\ldots+x+1\right)\right].$$

Biểu thức trong dấu ngoặc vuông bằng

$$8x^8-x^7-x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1,$$

chia hết cho $x-1$ vì tổng các hệ số bằng 0 .

Bài 10. Chứng minh rằng $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ với

$$f(x)=x^{99}+x^{88}+x^{77}+\ldots+x^{11}+1;$$

$$g(x)=x^9+x^8+x^7+\ldots+x+1$$

Lời giải

Trước hết chứng minh rằng $f(x)-g(x)$ chia hết cho $g(x)$. Ta có

$$f(x)-g(x)=x^{99}-x^9+x^{88}-x^8+\ldots+x^{11}-x$$

$$=x^9\left(x^{90}-1\right)+x^8\left(x^{80}-1\right)+\ldots+x\left(x^{10}-1\right)$$

Các biểu thức trong dấu ngoặc đều chia hết cho $x^{10}-1$ mà $x^{10}-1$ chia hết cho $g(x)$.

Bài 11. Chứng minh rằng đa thức $(x+y)^6+(x-y)^6$ chia hết cho đa thức x^2+y^2 .

Lời giải

$(x+y)^6+(x-y)^6=\left[(x+y)^2\right]^3+\left[(x-y)^2\right]^3$ chia hết cho $(x+y)^2+(x-y)^2$, tức là chia hết cho $2\left(x^2+y^2\right)$, do đó chia hết cho x^2+y^2 .

Bài 12. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n

1, $(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$ chia hết cho $x(x+1)(2x+1)$;

2, $x^{4n+2}+2x^{2n+1}+1$ chia hết cho $(x+1)^2$;

3, $(x+1)^{4n+2}+(x-1)^{4n+2}$ chia hết cho x^2+1.

Lời giải

1, Chứng minh rằng mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia.

2, Đa thức chia bằng $\left(x^{2n+1}+1\right)^2$, chia hết cho $(x+1)^2$.

3, $(x+1)^{4n+2}+(x-1)^{4n+2}=\left[(x+1)^2\right]^{2n+1}+\left[(x-1)^2\right]^{2n+1}$ chia hết cho $(x+1)^2+(x-1)^2$, tức là chia hết cho $2\left(x^2+1\right)$.

Bài 13. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $\left(x^n-1\right)\left(x^{n+1}-1\right)$ chia hết cho $\left(x+1\right)(x-1)^2$.

Lời giải

Vì n và $n+1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên có một số chẵn và một số lẻ. Đa thức bị chia có dạng

$$\left(x^{2k}-1\right)\left(x^{2k+1}-1\right)=\left(x^2-1\right)\cdot A\left(x\right)\cdot\left(x-1\right)\cdot B\left(x\right)$$

$$=\left(x+1\right)(x-1)^2\cdot A\left(x\right)\cdot B\left(x\right)$$

Bài 14. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m,n thì $x^{6m+4}+x^{6n+2}+1$ chia hết cho x^4+x^2+1.

Lời giải

Trước hết, ta chứng minh $x^{6m+4}+x^{6n+2}+1$ chia hết cho x^2+x+1. Giải tương tự như ví dụ 58 .

Đa thức $x^{6m+4}+x^{6n+2}+1$ chia hết cho x^2+x+1 và chia hết cho x^2-x+1, hai đa thức này không có nhân tử chung bậc nhất. Do đó $x^{6m+4}+x^{6n+2}+1$ chia hết cho tích $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$, tức là chia hết cho x^4+x^2+1

Bài 15. Tìm số tự nhiên n sao cho $x^{2n}+x^n+1$ chia hết cho x^2+x+1.

Lời giải

Xét $n=3k, n=3k+1$ và $n=3k+2$. Trong trường hợp đầu, số dư phép chia bằng 3 . Trong hai trường hợp sau, số dư phép chia bằng 0 . Vậy số cần tìm n không chia hết cho 3 .

Bài 16. Xác định số k để đa thức $A=x^3+y^3+z^3+kxyz$ chia hết cho đa thức $x+y+z$.

Lời giải

Gọi thương khi chia đa thức A cho $x+y+z$ là Q, ta có

$$x^3+y^3+z^3+kxyz=\left(x+y+z\right)\cdot Q$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x,y,z nên với $x=1, y=1, z=-2$ ta có

$$1+1+(-2)^3+k(-2)=(1+1-2)\cdot Q \Rightarrow -6-2k=0 \Rightarrow k=-3$$

Với $k=-3$, ta có $x^3+y^3+z^3-3xyz$ chia hết cho $x+y+z$ (thương bằng $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ Vậy $k=-3$.

Bài 17. Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên. Biết rằng $f(0), f(1)$ là các số lẻ. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải

Giả sử a là nghiệm nguyên của $f(x)$. Với mọi x, ta có $f(x)=(x-a)\cdot Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên, do đó

$$f(0)=-a\cdot Q(0); f(1)=(1-a)\cdot Q(1)$$

Do $f(0)$ là số lẻ nên a là số lẻ, do $f(1)$ là số lẻ nên $1-a$ là số lẻ, mâu thuẫn với nhau.

Chương 3 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 1 ẨN

Bài 1
Khái niệm về phương trình. Phương trình bậc nhất.

1 Tóm tắt lý thuyết

1, Ta gọi hệ thức dạng $A(x)=B(x)$ là phương trình với ẩn x. Giải phương trình $A(x)=B(x)$ là tìm mọi giá trị của x để các giá trị tương ứng của hai biểu thức $A(x)$ và $B(x)$ bằng nhau.

Tập hợp các giá trị đó gọi là tập nghiệm của phương trình đã cho, và thường được ký hiệu là S .

2. Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

3. Khi giải một phương trình, ta có thể

- Chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
- Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số khác 0 .

Khi đó phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

4. Phương trình bậc nhất là phương trình có dạng $ax+b=0$ trong đó x là ẩn số, a và b là các số đã cho, $a\neq 0$

Khi giải phương trình có hệ số chữ trong mục này, ta cũng xét các phương trình có dạng $ax+b=0$ trong đó $a=0$.

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Giải phương trình sau, với a là hằng số (ta còn gọi a là tham số)

$$a(ax+1)=x(a+2)+2.$$

Lời giải

Biến đổi phương trình đã cho thành

$$a^2x - ax - 2x = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow x\left(a^2 - s - 2\right) = 2 - a$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-2)x = 2 - a \qquad (1)$$

Ký hiệu S là tập nghiệm của phương trình đã cho, ta có

Nếu $a \neq -1, a \neq 2$ thì $S = \left\{-\dfrac{1}{a+1}\right\}$.

Nếu $a = -1$ thì (1) có dạng $0x = 3$, vô nghiệm, $S = \varnothing$.

Nếu $a = 2$ thì (1) có dạng $0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x, S = R$.

Ví dụ 2. Giải phương trình với a là tham số

$$\frac{x-a}{3} = \frac{a+3}{a} - 2. \qquad (1)$$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $a \neq 0$.

Biến đổi phương trình

$$(1) \Leftrightarrow a(x-a) = 3(x+3) - 6a$$

$$\Leftrightarrow ax - a^2 = 3x + 9 - 6a$$

$$\Leftrightarrow ax - 3x = a^2 - 6a + 9$$

$$\Leftrightarrow (a-3)x = (a-3)^2 \qquad (2)$$

Nếu $a \neq 3$, phương trình có nghiệm $x = a - 3$.

Nếu $a = 3$ thì (2) có dạng $0x = 0$, suy ra với mọi x đều là nghiệm.

Kết luận

Nếu $a \neq 0; a \neq 3$ thì (1) có một nghiệm $x = a - 3$.

Nếu $a = 3$ thì (1) nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $a = 0$ thì (1) vô nghiệm.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng tồn tại các hằng số a, b, c để phương trình sau vô nghiệm

$$\frac{x-ab}{a+b}=\frac{x-ac}{a+c}=\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c. \qquad (1)$$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình

$$a+b\neq 0; a+c\neq 0; b+c\neq 0$$

Khi đó,

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{x-ab}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-ac}{a+c}-b\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-ac-ab-bc}{a+c}+\frac{x-bc-ab-ac}{b+c}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-ab-ac-bc)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=0$$

(1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=0$. (2)

Chẳng hạn ta chọn $a=1; b=1$, để (2) xảy ra ta chọn c sao cho

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+c}=0\Leftrightarrow\frac{2}{1+c}=\frac{-1}{2}\Rightarrow c=-5$$

Như vậy (1) có vô số nghiệm, chẳng hạn khi $a=1; b=1; c=-5$.

Ví dụ 4; Giải phương trình

$$\frac{x-a}{a+b}+\frac{x-b}{a-b}=\frac{2ab}{b^2-a^2}.$$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $a\neq\pm b$.

Biến đổi phương trình

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(a+b)=-2ab$$

$$\Leftrightarrow ax-bx-a^2+ab+ax+bx-ab-b^2=-2ab$$

$\Leftrightarrow 2ax = a^2 + b^2 - 2ab$

$\Leftrightarrow 2ax = (a-b)^2$ (1)

Nếu $a \neq 0$ thì $x = \dfrac{(a-b)^2}{2a}$.

Nếu $a = 0$ thì (1) có dạng $0x = b^2$. Do $a \neq b$ nên $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Kết luận

Nếu $a \neq 0, a \neq \pm b$ thì $S = \left\{ \dfrac{(a-b)^2}{2a} \right\}$.

Còn lại, $S = \varnothing$.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Giải các phương trình

1. $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 12x(x-1) - 8$;

2. $(x+5)(x+2) - 3(4x-3) = (5-x)^2$;

3. $(3x-1)^2 - 5(2x+1)^2 + (6x-3)(2x+1) = (x-1)^2$.

Lời giải

1. $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 12x(x-1) - 8 \Leftrightarrow 12x^2 + 16 = 12x^2 - 12x - 8 \Leftrightarrow x = -2$

2. $2(x+5)(x+2) - 3(4x-3) = (5-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 19 = x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{5}$

3. $(3x-1)^2 - 5(2x+1)^2 + (6x-3)(2x+1) = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 26x - 7 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{3}$.

Bài 2. Giải các phương trình

1. $\dfrac{x-5}{100} + \dfrac{x-4}{101} + \dfrac{x-3}{102} = \dfrac{x-100}{5} + \dfrac{x-101}{25} + \dfrac{x-102}{3}$

2. $\dfrac{29-x}{21} + \dfrac{27-x}{23} + \dfrac{25-x}{25} + \dfrac{23-x}{27} + \dfrac{21-x}{29} = -5$

Lời giải

1. Ta có

$$\frac{x-5}{100}-1+\frac{x-4}{101}-1+\frac{x-3}{102}-1=\frac{x-100}{5}-1+\frac{x-101}{4}-1+\frac{x-102}{3}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-105}{100}+\frac{x-105}{101}+\frac{x-105}{102}=\frac{x-105}{5}+\frac{x-105}{4}+\frac{x-105}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x-105)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=105$.

2. Ta có

$$\frac{29-x}{21}+1+\frac{27-x}{23}+1+\frac{25-x}{25}+1+\frac{23-x}{27}+1+\frac{21-x}{29}+1=-5+5$$

$$\frac{29-x}{21}+1+\frac{27-x}{23}+1+\frac{25-x}{25}+1+\frac{23-x}{27}+1+\frac{21-x}{29}+1=-5+5$$

$$\Leftrightarrow (50-x)\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{29}\right)=0$$

Vậy $x=50$.

🗁**Bài 3.** Giải các phương trình với tham số a,b

a) $a(ax+b)=b^2(x-1)$; b) $a^2x-ab=b^2(x-1)$;

Lời giải

$a(ax+b)=b^2(x-1)$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)x=-b(a+b)$

Nếu $a\neq \pm b$ thì $x=\dfrac{b}{b-a}$.

Nếu $a=b$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi x (nếu $b=0$) hoặc vô nghiệm (nếu $b\neq 0$).

Nếu $a=-b$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi x.

2 $a^2x-ab=b^2(x-1)$;

Biến đổi phương trình thành $(a^2-b^2)x=b(a-b)$ rồi giải tương tự như câu a.

🗁**Bài 4**. Giải các phương trình với tham số a,b

1. $\dfrac{x-a}{a+1}+\dfrac{x-1}{a-1}=\dfrac{2a}{1-a^2}$

2. $\dfrac{x+a-1}{a+2}+\dfrac{x-a}{a-2}+\dfrac{x-a}{4-a^2}=0$

3. $3x+\dfrac{x}{a}-\dfrac{3a}{a+1}=\dfrac{4ax}{(a+1)^2}+\dfrac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}-\dfrac{3a^2}{(a+1)^3}$

Lời giải

1. $\dfrac{x-a}{a+1}+\dfrac{x-1}{a-1}=\dfrac{2a}{1-a^2}$

Điều kiện là $a\neq\pm1$. Biến đổi phương trình thành $2ax=(a-1)^2$.

Nếu $a\neq0$ và $a\neq\pm1$ thì $S=\left\{\dfrac{(a-1)^2}{2a}\right\}$.

Nếu $a=0$ thì $S=\varnothing$

2. $\dfrac{x+a-1}{a+2}+\dfrac{x-a}{a-2}+\dfrac{x-a}{4-a^2}=0$

Điều kiện là $a\neq\pm2$.

Biến đổi phương trình thành $(2a-1)x=2(2a-1)$. Nếu $a\neq\dfrac{1}{2}$ thì $x=2$.

Nếu $a=\dfrac{1}{2}$ thì $0x=0$, vô số nghiệm.

3. $3x+\dfrac{x}{a}-\dfrac{3a}{a+1}=\dfrac{4ax}{(a+1)^2}+\dfrac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}-\dfrac{3a^2}{(a+1)^3}$.

Điều kiện là $a\neq0; a\neq-1$.

Biến đổi phương trình thành

$$\frac{3a\left(a^2-a+1\right)}{a(a+1)^2}x=\frac{3a\left(a^2-a+1\right)}{(a+1)^3}$$

Do $a\neq0, a\neq-1, a^2-a+1\neq0$ (chứng minh dễ dàng) nên $x=\dfrac{a}{a+1}$.

🕮 **BÀI 5.** Giải phương trình với các tham số a,b,c

1) $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=3$

2) $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=\dfrac{3x}{a+b+c}$

3) $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{a+c-x}{b}+\dfrac{b+c-x}{a}=1-\dfrac{4x}{a+b+c}$.

4) $\dfrac{2a+b+c-3x}{a}+\dfrac{a+2b+c-3x}{b}+\dfrac{a+b+2c-3x}{c}=6-\dfrac{9x}{a+b+c}$

Lời giải

1) Ta có

$$\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-a}{b+c}-1+\frac{x-b}{c+a}-1+\frac{x-c}{a+b}-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)=0$$

Nếu $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}\neq 0$, phương trình có một nghiệm $x=a+b+c$. .

Nếu $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}=0$, phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

2) $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=\dfrac{3x}{a+b+c}$;

Tương tự câu 1) ta có

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}-\frac{3}{a+b+c}\right)=0$$

Nếu $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{3}{a+b+c}\neq 0$, phương trình có một nghiệm $x=a+b+c$.

Nếu $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{3}{a+b+c}=0$, phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

3) $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{a+c-x}{b}+\dfrac{b+c-x}{a}=1-\dfrac{4x}{a+b+c}$

Làm tương tự câu 1), ta có

$$(a+b+c-x)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0$$

4) $\dfrac{2a+b+c-3x}{a}+\dfrac{a+2b+c-3x}{b}+\dfrac{a+b+2c-3x}{c}=6-\dfrac{9x}{a+b+c}$.

Điều kiện $a;b;c;a+b+c\neq 0$. Khi đó

$$\frac{2a+b+c-3x}{a}+\frac{a+2b+c-3x}{b}+\frac{a+b+2c-3x}{c}=6-\frac{9x}{a+b+c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2a+b+c-3x}{a}-1+\frac{a+2b+c-3x}{b}-1+\frac{a+b+2c-3x}{c}-1=6-\frac{9x}{a+b+c}-3$$

$\Leftrightarrow (a+b+c-3x)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{3}{a+b+c}\right)=0$

Nếu $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{3}{a+b+c}\neq 0$, phương trình có một nghiệm $x=\frac{a+b+c}{3}$

Nếu $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{3}{a+b+c}=0$, phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Bài 2

Phương trình tích

1 Tóm tắt lý thuyết

Phương trình tích (một ẩn) là phương trình dạng có dạng

$$A(x)B(x)\ldots=0 \quad (1)$$

trong đó $A(x),B(x),\ldots,$ là các đa thức.

Để giải (1), ta chỉ cần giải từng phương trình $A(x)=0;B(x)=0,\ldots$ rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử chung có vai trò quan trọng trong việc đưa một phương trình về dạng tích rồi phân tích. Cách đặt ẩn phụ cũng thường được sử dụng để trình bày lời giải được gọn gàng.

2 Bài tập và các dạng toán

Bài tập mẫu

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$(x+3)^3-(x+1)^3=56$$

Lời giải

Cách 1 .

$(x+3)^3-(x+1)^3=56$

$\Leftrightarrow x^3+9x^2+27x+27-x^3-3x^2-3x-1=56$

$\Leftrightarrow 6x^2+24x+26=56$

$\Leftrightarrow 6\left(x^2+4x-5\right)=0$

$\Leftrightarrow 6\left(x^2-x+5x-5\right)=0$

$\Leftrightarrow x\left(x-1\right)+5\left(x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+5)=0$

Kết luận $S=\{1;-5\}$.

Cách 2. Chú ý rằng $x+2$ là trung bình cộng của $x+3$ và $x+1$, ta đặt $x+2=y$, phương trình trở thành

$$(y+1)^3-(y-1)^3=56$$
$$\Leftrightarrow y^3+3y^2+3y+1-y^3+3y^2-3y+1=56$$
$$\Leftrightarrow 6y^2+2=56$$
$$\Leftrightarrow y^2=9$$
$$\Leftrightarrow y=\pm 3$$

Với $y=3$ thì $x=1$. Với $y=-3$ thì $x=-5$.

Kết luận $S=\{1;-5\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$x^3+(x-1)^3=(2x-1)^3$$

Lời giải

Ta thấy $x+(x-1)=2x-1$. Đặt $x-1=y$ thì phương trình có dạng

$$x^3+y^3=(x+y)^3$$
$$\Leftrightarrow x^3+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$
$$\Leftrightarrow xy(x+y)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-1=0 \\ 2x-1=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-1=0 \\ 2x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy $S=\left\{0;\dfrac{1}{2};1\right\}$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12$$

Lời giải

Rút gọn vế trái của phương trình, ta được

$$2x^3+10x=12$$
$$\Leftrightarrow x^3+5x-6=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^3-1\right)+5(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+6\right)=0$$

Dễ dàng chứng minh được $x^2+x+6\neq 0$. Do đó $S=1$.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\left(x^2-1\right)\left(x^2+4x+3\right)=192$$

Lời giải

Biến đổi phương trình thành

$$\left(x^2-1\right)(x+1)(x+3)=192 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2(x+3)=192$$

Đặt $x+1=y$, phương trình trở thành

$$(y-2)y^2(y+2)=192 \Leftrightarrow y^2\left(y^2-4\right)=192$$

Đặt $y^2-2=z$ thì $z+2\geq 0$, phương trình trở thành

$$(z+2)(z-2)=192 \Leftrightarrow z^2=196 \Leftrightarrow z=\pm 14$$

Loại $z=-14$ vì trái với điều kiện $z+2\geq 0$.

Với $z=14$ thì $y^2=16$, do đó $y=\pm 4$

Với $y=4$ thì $x+1=4$ nên $x=3$

Với $y=-4$ thì $x+1=-4$ nên $x=-5$

Vậy $S=\{-5;3\}$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$(x-6)^4+(x-8)^4=16$$

Lời giải

Đặt $x-7=y$, phương trình trở thành

$(y+1)^2+(y-1)^4=16$

Rút ngọn ta được

$$2y^4+12y^2+2=16$$
$$\Leftrightarrow y^4+6y^2+1=8$$
$$\Leftrightarrow y^4+6y^2-7=0.$$

Đặt $y^2=z\geq 0$, ta có $z^2+6z-7=0\Leftrightarrow z_1=1; z_2=-7$ (loại).

Với $z=1$, ta có $y^2=1$ nên $y=\pm 1$

Từ đó $x_1=8; x_2=6$

Chú ý: Khi giải phương trình bậc 4 dạng $(x+a)^4+(x+b)^2=c$, ta thường đặt ẩn phụ $y=x+\dfrac{a+b}{2}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$x^4+3x^2+4x^2+3x+1=0$ (1)

$x^5-x^4+3x^3+3x^2-x+1=0$ (2)

Lời giải

1) $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$ (1).

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình (1). Chia hai vế của (1) cho $x^2\neq 0$, ta được

$$x^2+3x+4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=y$ thì $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$, ta được $y^2+3y+2=0$

Do đó $y_1=-1; y_2=-2$

Với $y=-1$, ta có $x+\dfrac{1}{x}=-1$ nên $x^2+x+1=0$, vô nghiệm.

Với $y=-2$, ta có $x+\dfrac{1}{x}=-2$ nên $(x+1)^2=0$, do đó $x=-1$. Kết luận $S=\{-1\}$.

Chú ý: Cũng có thể giải phương trình (1) bằng cách biến đổi vế trái thành

$$(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)$$

2) $x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$ (2).

Ta thấy $x = -1$ là một ngiệm của phương trình (2) vì tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ. Biến đổi phương trình (2) thành

$$(x+1)\left(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1\right) = 0$$

Giải phương trình

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (3)$$

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm không là nghiệm của (3). Chia 2 vế của (3) cho $x^2 \neq 0$, ta được

$$x^2 - 2x + 5 - \frac{2}{5} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ta được $y^2 - 2y + 3 = 0$, vô nghiệm. Kết luận $S = \{-1\}$.

(1) Ta gọi các phương trình (1) và (2) là phương trình đối xứng: các hệ số của đa thức ở 2 vế trái có tính chất đối xứng qua hạng tử đứng giữa.

Phương trình (1) là phương trình đối xứng bậc chẵn, phương trình (2) là phương trình đối xứng bậc lẻ. Phương trình đối xứng bậc lẻ bao giờ cũng nhận $x = -1$ làm một nghiệm, do đó bằng cách chia hai vế cho $x + 1$, ta thu được phương trình đối xứng bậc chẵn $2n$.

Phương trình đối xứng bậc chẵn $2n$ đối với x đưa được về phương trình bậc n đối với y bằng cách đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$.

Ta có nhận xét sau để kiểm tra lại nghiệm của phương trình đối xứng: Nếu a là nghiệm phương trình thì $\frac{1}{a}$ cũng là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm

$x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$ (1)

$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ (2)

Lời giải

1) $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$

Biến đổi phương trình (1) thành

$(x^2 + 1)^2 - x(x^2 + 1) = 0$

Cả hai nhân tử ở vế đều dương.

Kết luận $S = \varnothing$.

2)

Cách 1. Nhân hai vế của (2) với $x-1$, ta được

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

$\Leftrightarrow x^5-1=0$

$\Leftrightarrow x^5=1$ (3)

Phương trình (3) có nghiệm $x=1$, nhưng giá trị này không thỏa mãn phương trình (2).

Kết luận $S = \varnothing$.

Cách 2. Chứng minh $x^4+x^3+x^2+x+1>0$

Chú ý: trình (1) và (2) cũng là phương trình đối xúng. Do đó cũng có thể giải chúng bằng cách đặt ẩn phụ $y = x + \dfrac{1}{x}$.

3 Bài tập về nhà

BÀI 1. Giải các phương trình sau

a) $x^3+2x^2+x+2=0$

b) $x^3+2x^2-x-2=0$.

c) $x^3-x^2-21x+45=0$.

d) $x^3+3x^2+4x+2=0$

e) $x^4+x^2+6x-8=0$

f) $(x^2+1)^2=4(2x-1)$

g) $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$

h) $6x^4-x^3-7x^2+x+1=0$

Lời giải

a) $x^3+2x^2+x+2=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+1)=0$. Nghiệm $x=-2$

b) $x^3+2x^2-x-2 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-1)$. Nghiệm $x=-2;-1;1$

c) $x^3-x^2-21x+45 \Leftrightarrow (x-3)^2(x+5)=0$. Nghiệm $x=-5;3$

d) $x^3+3x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow (x=1)(x^2+2x+2)=0$. Nghiệm $x=-1$

e) $x^2+x^2+6x-8=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2-x+4)=0$. Nghiệm $x=-2;1$

f) $(x^2+1)^2=4(2x-1) \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+2x+5)=0$. Nghiệm $x=1$

g) $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$. Nghiệm $x=-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{2};3$

h) $6x^4-x^3-7x^2+x+1=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(2x-1)(3x+1)=0$. Nghiệm $x=-1;-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2};1$.

BÀI 2. Giải các phương trình sau

a) $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$

b) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)=24$

c) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$.

d) $(x^2+x-2)(x^2+x-3)=12$

e) $x(x+1)(x^2+x+1)=42$.

f) $(x^2+x+1)^2=3(x^4+x^2+1)$.

Lời giải

a) $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$.

Đặt $y=x^2-5x$. Ta được $y^2+10y+24=0$, từ đó $y_1=-6; y_2=-4$.

Với $y=-6$ ta được $x_1=2; x_2=3$.

Với $y=-4$ ta được $x_3=1; x_4=4$.

b) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)=24$.

Nghiệm $x=-6;-4;-1;1$.

c) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$.

Đặt $y=x^2+x+1$. Ta được $y^2+y-12=0$, từ đó $y_1=3; y_2=-4$.

Với $y=3$ ta được $x_1=1; x_2=-4$.

Với $y=-4$ Phương trình vô nghiệm.

d) $(x^2+x-2)(x^2+x-3)=12$.

Nghiệm $x=-3;2$.

e) $x\left(x+1\right)\left(x^2+x+1\right)=42$

Nghiệm $x=-3;2$.

f) $\left(x^2+x+1\right)^2=3\left(x^4+x^2+1\right)$.

Chú ý rằng $x^4+x^2+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$.

Phương trình có dạng $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-2x+1\right)=0$.

Nghiệm $x=1$.

BÀI 3. Giải các phương trình sau

a) $x\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x+2\right)=24$.

b) $\left(x-4\right)\left(x-5\right)\left(x-6\right)\left(x-7\right)=1680$.

c) $\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x-5\right)\left(x-6\right)=180$.

d) $2x(8x-1)^2\left(4x-1\right)=9$.

e) $(12x+7)^2\left(3x+2\right)\left(2x+1\right)=3$

f) $\left(2x+1\right)(x+1)^2\left(2x+3\right)=18$.

Lời giải

a) $x\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x+2\right)=24$

Nghiệm $x=-3;2$.

b) $\left(x-4\right)\left(x-5\right)\left(x-6\right)\left(x-7\right)=1680.$

Nghiệm $x=-1;12$.

c) Ta có

$\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x-5\right)\left(x-6\right)=180$

$\Leftrightarrow\left(x^2-3x-10\right)\left(x^2-3x-18\right)=180$

Đặt $y=x^2-3x-14$. Tìm được $y=\pm14$.

Với $y=14$ ta được $x_1=7;x_2=-4$

Với $y=-14$ ta được $x_3=0; x_4=3$.

d) $2x(8x-1)^2(4x-1)=9$.

Nhân 8 vào hai vế, ta được $8x(8x-1)^2(8x-2)=72$.

Đặt $y=8x-1$ ta được $(y+1)y^2(y-1)=72 \Leftrightarrow (y^2-9)(y^2+8=0) \Leftrightarrow y^2=9$.

Trường hợp $y=3$ suy ra $x=\frac{1}{2}$. Trường hợp $y=-3$ suy ra $x=-\frac{1}{4}$

e) $(12x+7)^2(3x+2)(2x+1)=3$.

Nhân 24 vào hai vế, ta được $(12x+7)^2(12x+8)(12x+6)=72$.

Đặt $y=12x+7$ ta được $x=-\frac{1}{3};-\frac{5}{6}$.

f) $(2x+1)(x+1)^2(2x+3)=18$

Nhân 24 vào hai vế, rồi đặt $y=2x+2$, ta được $x=\frac{1}{2};-\frac{5}{2}$.

🗁**BÀI 4.** Giải các phương trình sau

a) $(x^2-6x+9)^2-15(x^2-6x+10)=1$.

b) $(x^2+1)^2+3x(x^2+1)+2x^2=0$.

c) $(x^2-9)^2=12x+1$.

Lời giải

a) $(x^2-6x+9)^2-15(x^2-6x+10)=1$

Đặt $y=x^2-6x+9\geq 0$, ta được $y_1=-1($ loại $); y_2=16$..

Nghiệm $x=-1;7$.

b) $(x^2+1)^2+3x(x^2+1)+2x^2=0$.

Đặt $y=x^2+1$ ta được $y^2+3xy+2x^2=0 \Leftrightarrow (y+x)(y+2x)=0$.

Nghiệm $x=-1$.

c) $(x^2-9)^2=12x+1$.

Thêm $+36x^2$ vào hai vế.

Đáp số $x=-4;2$.

BÀI 5. Giải các phương trình sau

a) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

b) $(x-2)^4+(x-3)^4=1$.

c) $(x+1)^4+(x-3)^4=82$.

d) $(x-2,5)^4+(x-1,5)^4=1$.

Lời giải

a) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

Đặt $y=x+4$, khi đó phương trình tương đương $(y-1)^4+(y+1)^4=16$, ta được $y=\pm 1$.

Với $y=1$ thì $x=-3$.

Với $y=-1$ thì $x=-5$.

b) $(x-2)^4+(x-3)^4=1$.

Đặt $y=x-\dfrac{5}{2}$.

Nghiệm $x=2;3$.

c) $(x+1)^4+(x-3)^4=82$

Nghiệm $x=2;0$.

d) $(x-2,5)^4+(x-1,5)^4=1$

Nghiệm $x=\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}$.

BÀI 6. Giải các phương trình sau

a) $(4-x)^5+(x-2)^5=32$.

b) $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.

Lời giải

a) $(4-x)^5+(x-2)^5=32$.

Đặt $y=x-3$ rồi rút gọn được $y^4+2y^2-3=0$.

Nghiệm $x=2;4$.

b) $(x-1)^5+(x+3)^5=242\left(x+1\right)$.

Đặt $y=x+1$.

Nghiệm $x=-2;-1;0$.

BÀI 7. Giải các phương trình sau

a) $(x+1)^3+(x-2)^3=(2x-1)^3$.

b) $(x-7)^4+(x-8)^4=(15-2x)^4$.

Lời giải

a) $(x+1)^3+(x-2)^3=(2x-1)^3 \Leftrightarrow (x+1)^3+(x-2)^3+(1-2x)^3=0$.

Đặt $a=x+1;b=x-2;c=1-2x$ thì $a+b+c=0$.

Do đó $a^3+b^3+c^3=3abc$. Vậy $abc=0$.

Nghiệm $x=-1;\dfrac{1}{2};2$.

b) $(x-7)^4+(x-8)^4=(15-2x)^4$.

Đặt $a=x-7;b=x-8$ ta được

$$a^4+b^4-(a+b)^4=0 \Leftrightarrow 4ab\left(a^2+\frac{3}{2}ab+b^2\right)=0$$

Xét $a^2+\dfrac{3}{2}ab+b^2=\left(a+\dfrac{3}{4}b\right)^2+\dfrac{7}{16}\geq 0$ nhưng dấu bằng không xảy ra.

Nghiệm $x=7;8$.

BÀI 8. Giải các phương trình sau

a) $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$.

b) $3x^4-13x^3+16x^2-13x+3=0$.

c) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$

d) $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1=0$.

Lời giải

a) $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$.

Đặt $y=x+\dfrac{1}{x}$, ta được $y^2-3y+2=0$.

Nghiệm $x=1$

b) $3x^4-13x^3+16x^2-13x+3=0$.

Đặt $y=x+\frac{1}{x}$, ta được $(y-1)(3y-10)=0$.

3) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6$

Đặt $y=x+\frac{1}{x}$, ta được $y_1=\frac{5}{2}; y_2=-\frac{10}{3}$.

Nghiệm $x=-3;-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};2$

4) $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1=0$

Nghiệm $x=-1$

5) $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$

Đặt $y=x-\frac{1}{x}$.

Nghiệm $x=-3;-\frac{1}{2};\frac{1}{3};2$

6) $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$

Chia hai vế cho x^2 .

Nghiệm $x=1;\frac{1}{2};2$

BÀI 9. Giải các phương trình sau $x^5=x^4+x^3+x^2+x+2$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
& x^5=x^4+x^3+x^2+x+2 \\
\Leftrightarrow & \left(x^5-1\right)-\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)=0 \\
\Leftrightarrow & (x-2)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)=0 \\
\Leftrightarrow & x=2
\end{aligned}$$

Vì phương trình $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm $x=2$.

BÀI 10. Chứng minh các phương trình sau vô nghiệm

a) $x^4-2x^3+4x^2-3x+2=0$

b) $x^6+x^5+x^3+x^2+x+1=0$.

Lời giải

1) $x^4-2x^3+4x^2-3x+2=0$

Đưa phương trình về dạng $\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)=0$

2) $x^6+x^5+x^3+x^2+x+1=0$.

Đưa phương trình về dạng $x^7-1=0$.

Bài 3
PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

1 Tóm tắt lý thuyết

Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức:

- Tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình.
- Quy đồng mẫu thức ở hai vế của phương trình rồi khử mẫu thức.
- Giải phương trình vừa nhận được.
- Nghiệm của phương trình là các giá trị tìm được của ẩn thỏa mãn điều kiện xác định.

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Giải phương trình:

$$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+3}{x-4}=\frac{2}{(x-2)(4-x)} \quad (1)$$

Lời giải

ĐKXĐ của phương trình là $x\neq 2, x\neq 4$

Biến đổi phương trình (1):

$$(x-1)(x-4)+(x+3)(x-2)=-2$$

Thu gọn phương trình, ta được

$$2x(x-2)=0\ \ (2)$$

Nghiệm của (2) là $x_1=0, x_2=2$. Trong đó, $x_1=0$ thỏa mãn DKXD, $x_2=2$ không thỏa mãn ĐKXĐ. Kết luận: $S=\{0\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình với các tham số a, b

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}\ \ (1)$$

Lời giải

ĐKXĐ của phương trình là: $a\neq 0, b\neq 0, x\neq 0, x\neq -a-b$.

Biến đổi phương trình (1):

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}=\frac{a+b}{ab}\Leftrightarrow\frac{a+b}{-x(a+b+x)}=\frac{a+b}{ab}$$

Nếu $a+b=0$ thì (1) có vô số nghiệm: x bất kỳ khác 0.

Nếu $a+b\neq 0$ thì

$$\begin{aligned}&-x(a+b+x)=ab\\ &\Leftrightarrow ab+ax+bx+x^2=0\\ &\Leftrightarrow (x+a)(x+b)=0\\ &\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-a\\ x=-b\end{array}\right.\end{aligned}$$

Để $-a$ thỏa mãn ĐKXĐ, ta phải có:

$$\begin{cases}-a\neq 0\\ -a\neq -a-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ b\neq 0\end{cases}$$

Các điều kiện này đã có.

Để $-b$ thỏa mãn ĐKXĐ, tương tự ta phải có: $a\neq 0, b\neq 0$.

Kết luận:

Nếu $a\neq 0, b\neq 0, a+b=0$ thì (1) có vô số nghiệm: x bất kỳ khác 0.

Nếu $a\neq 0, b\neq 0, a+b\neq 0$ thì (1) có nghiệm: $x=-a$ và $x=-b$.

Ví dụ 3. Giải phương trình với các tham số a, b

$$\frac{x+a}{x+3}+\frac{x-3}{x-a}=2\ \ (1)$$

Lời giải

ĐKXĐ của phương trình là $x \neq -3, x \neq a$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$2(a-3)x = (a-3)^2 \quad (2)$$

- Nếu $a \neq 3$ thì $x = \dfrac{a-3}{2}$. Giá trị này là nghiệm của phương trình đã cho nếu

$$\begin{cases} \dfrac{a-3}{2} \neq -3 \ (3) \\ \dfrac{a-3}{2} \neq a \ \ (4) \end{cases}$$

Giải điều kiện (3), ta được $a \neq -3$. Giải điều kiện (4), ta cũng được $a \neq -3$.

Vậy nếu $a \neq -3$ thì $x = \dfrac{a-3}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- Nếu $a = 3$ thì (2) có dạng $0x = 0$, nghiệm đúng với mọi x thỏa mãn điều kiện (1), tức là $x \neq -3$ và $x \neq a$ (do $a = 3$ nên điều kiện này là $x \neq 3$).

Kết luận:

Nếu $a \neq \pm 3$ thì $S = \left\{ \dfrac{a-3}{2} \right\}$

Nếu $a = 3$ thì $S = \{x \mid x \neq \pm 3\}$.

Nếu $a = -3$ thì $S = \varnothing$

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Giải các phương trình:

1) $\dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{3}{x^2-x-2} + 1$

2) $\dfrac{x+6}{x-5} + \dfrac{x-5}{x+6} = \dfrac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$

3) $\dfrac{6}{x-5} + \dfrac{x+2}{x-8} = \dfrac{18}{(x-5)(8-x)} - 1$

4) $\dfrac{x-4}{x-1} + \dfrac{x+4}{x+1} = 2$

5) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{9}{(x+1)(2-x)}$

6) $\dfrac{x^2-x}{x+3}-\dfrac{x^2}{x-3}=\dfrac{7x^2-3x}{9-x^2}$

Lời giải

1) ĐKXĐ của phương trình là: $x \neq -1, x \neq 2$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$(x+2)(x-2)+3(x+1)=3+(x+1)(x-2)$$
$$\Leftrightarrow 4x=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

2) ĐKXĐ của phương trình là: $x \neq -6, x \neq 5$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$(x+6)^2+(x-5)^2=2x^2+23x+61$$
$$\Leftrightarrow 2x=23x$$
$$\Leftrightarrow x=0$$

Vậy $S=\{0\}$

3) ĐKXĐ của phương trình là: $x \neq 8, x \neq 5$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$6(x-8)+(x+2)(x-5)=-18-(x-5)(x-8)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-10x=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}\right.$$

Vì $x=5$ bị loại nên $S=\{0\}$.

4) ĐKXĐ của phương trình là: $x \neq \pm 1$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$(x-4)(x+1)+(x+4)(x-1)=2x^2-2$$
$$\Leftrightarrow -2=0$$

Vậy $S=\varnothing$

5) ĐKXĐ của phương trình là: $x \neq -1, x \neq 2$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$3(x-2)-(x+1)=-9$$
$$\Leftrightarrow 2x=-2$$
$$\Leftrightarrow x=-1$$

Vậy $S=\varnothing$

6) ĐKXĐ của phương trình là: $x\neq\pm 3$. Biến đổi phương trình, ta được

$$\left(x^2-x\right)(x-3)-x^2(x+3)=-7x^2+3x$$
$$\Leftrightarrow 0=0$$

Vậy phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác ± 3.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$1)\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}=\frac{3}{x\left(x^4+x^2+1\right)}$$

$$2)\frac{x+2}{x^2+2x+4}-\frac{x-2}{x^2-2x+4}=\frac{6}{x\left(x^4+4x^2+16\right)}$$

Lời giải

1) ĐKXĐ của phương trình là $x\neq 0$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$(x+1)x\left(x^2-x+1\right)-(x-1)x\left(x^2+x+1\right)=3$$
$$\Leftrightarrow 2x=3$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

Vậy $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

2) ĐKXĐ của phương trình: $x\neq 0$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$x(x+2)\left(x^2-2x+4\right)-x(x-2)\left(x^2+2x+4\right)=6$$
$$\Leftrightarrow 16x=6$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{8}$$

Vậy $S=\left\{\frac{3}{8}\right\}$.

Bài 3. Giải phương trình sau: $\dfrac{1+a}{1-x}=1-a$ trong đó a là hằng số.

Lời giải

ĐKXĐ của phương trình: $x\neq 1$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$1+a=(1-a)(1-x)$$
$$\Leftrightarrow ax-x=2a$$
$$\Leftrightarrow x(a-1)=2a$$

Nếu $a=1$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $a\neq 1$ thì $x=\dfrac{2a}{a-1}$

Giá trị này là nghiệm của phương trình đã cho nếu:

$$\frac{2a}{a-1}\neq 1$$
$$\Leftrightarrow 2a\neq a-1$$
$$\Leftrightarrow a\neq -1$$

Kết luận:

Nếu $a=\pm 1$ thì $S=\varnothing$

Nếu $a\neq \pm 1$ thì $S=\left\{\dfrac{2a}{a-1}\right\}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

1) $\dfrac{x}{2a+x}+\dfrac{2a+x}{2a-x}=\dfrac{8a^2}{x^2-4a^2}$

2) $\dfrac{2a-3b}{x-2a}+\dfrac{3b-2a}{x-3b}=0$

trong đó a,b là các hằng số.

Lời giải

1) ĐKXĐ của phương trình là: $x\neq \pm 2a$.

Biến đồi phương trình, ta được

$$x(2a-x)+(2a+x)^2=-8a^2$$
$$\Leftrightarrow 12a^2+6ax=0$$
$$\Leftrightarrow 6ax=-12a^2$$

Nếu $a=0$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác 0.

Nếu $a\neq 0$ thì $x=\dfrac{-12a^2}{6a}=-2a$ (loại). Suy ra phương trình vô nghiệm.

2) ĐKXĐ của phương trình là: $x\neq 2a, x\neq 3b$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&(2a-3b)(x-3b)-(2a-3b)(x-2a)=0\\ \Leftrightarrow\ &(2a-3b)(x-3b)=(2a-3b)(x-2a)\end{aligned}$$

Nếu $2a=3b$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác $2a$.

Nếu $2a\neq 3b$ thì $x-3b=x-2a\Leftrightarrow 3b=2a$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

🗁 **Bài 5.** Giải các phương trình sau:

1) $\dfrac{x-a+1}{x-a}-\dfrac{x-b+1}{x-b}=\dfrac{a}{(x-a)(x-b)}$;

2) $\dfrac{a}{x+a}=\dfrac{a-1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$.

trong đó a,b là các hằng số.

Lời giải

1) ĐKXĐ của phương trình là $x\neq a, x\neq b$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&(x-a+1)(x-b)-(x-b+1)(x-a)=a\\ \Leftrightarrow\ &-b+a=a\\ \Leftrightarrow\ &b=0\end{aligned}$$

Kết luận: Nếu $b=0$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác a và 0.

Nếu $b\neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2) ĐKXD của phương trình là $x\neq -a, x\neq \pm 1$. Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&a\left(x^2-1\right)=(a-1)(x+1)(x+a)+(x+a)(x-1)\\ \Leftrightarrow\ &a^2x+a^2-2x+ax-a=0\\ \Leftrightarrow\ &x(a-1)(a+2)=a(1-a)\\ \Leftrightarrow\ &x(a-1)(a+2)=(a-1)(-a)\end{aligned}$$

Nếu $a=1$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác ± 1.

Nếu $a=-2$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $a \neq 1$ và $a \neq -2$ thì $x(a+2) = -a \Leftrightarrow x = \frac{-a}{a+2}$.

Để $x = \frac{-a}{a+2}$ là nghiệm của phương trình thì

$$\begin{cases} \frac{-a}{a+2} \neq 1 \\ \frac{-a}{a+2} \neq -1 \\ \frac{-a}{a+2} \neq -a \end{cases}$$

Giải ra ta được $a \neq -1, a \neq 0$

Kết luân: Nếu $a = 1$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác ± 1.

Nếu $a = -2, a = -1$ hoăc $a = 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $a \neq 1, a \neq -2, a \neq -1, a \neq 0$ thì $S = \left\{ \frac{-a}{a+2} \right\}$.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

1) $\frac{1}{a+b-r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{r}$;

2) $\frac{2}{a(b-x)} - \frac{2}{b(b-x)} = \frac{1}{a(c-x)} - \frac{1}{b(c-x)}$.

trong đó a, b, c là các hằng số, $a \neq 0, b \neq 0$.

Lời giải

1) ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 0, x \neq a+b$. Biến đổi phương trình, ta được

$$abx = bx(a+b-x) + ax(a+b-x) - ab(a+b-x)$$
$$\Leftrightarrow (-a-b)x^2 + (a^2 + 2ab + b^2)x = a^2b + ab^2$$
$$\Leftrightarrow (-a-b)x^2 + (-a-b)^2 x = -ab(a-b)$$

Nếu $-a-b = 0 \Leftrightarrow a = -b$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác 0 .

Nếu $-a-b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -b$ thì phương trình trở thành

$$x^2 + (-a-b)x = -ab$$
$$\Leftrightarrow (x-a)(x-b) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array} \right.$$

Để $x = a$ là nghiệm của phương trình thì $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

Tương tự, để $x = b$ là nghiệm của phương trình thì $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

Kết luận: Nếu $a=-b$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác 0.

Nếu $a=0$ hoặc $b=0$ thì $S=\varnothing$

Nếu $a\neq -b, a\neq 0, b\neq 0$ thì $S=\{a,b\}$.

2) ĐKXĐ của phương trình là $x\neq b, x\neq c$. Biến đổi phương trình, ta được

$$2b(c-x)-2a(c-x)=b(b-x)-a(b-x)$$
$$\Leftrightarrow 2(b-a)(c-x)=(b-a)(b-x)$$

Nếu $b-a=0\Leftrightarrow a=b$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác b,c.

Nếu $b-a\neq 0\Leftrightarrow a\neq b$ thì phương trình trở thành

$$2(c-x)=b-x\Leftrightarrow x=2c-b$$

Để $x=2c-b$ là nghiệm của phương trình thì $\begin{cases}2c-b\neq b\\ 2c-b\neq c\end{cases}\Leftrightarrow c\neq b$

Kết luận: Nếu $a=b$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác b,c.

Nếu $c=b$ thì $S=\varnothing$

Nếu $a\neq b$ và $c\neq b$ thì $S=\{2c-b\}$.

Bài 7. Giải phương trình sau:

$$\frac{1}{(x+a)^2-1}+\frac{1}{(x+1)^2-a^2}=\frac{1}{x^2-(a+1)^2}+\frac{1}{x^2-(a-1)^2}$$

trong đó a là hằng số.

Lời giải

ĐKXĐ của phương trình là $x\neq \pm(a-1), x\neq \pm(a+1)$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\frac{1}{(x+a+1)(x+a-1)}+\frac{1}{(x+1-a)(x+1+a)}=\frac{1}{(x+a+1)(x-a-1)}+\frac{1}{(x-a+1)(x+a-1)}$$
$$\Leftrightarrow (x+a-1)(x-a-1)+(x+a-1)(x-a-1)=(x+a-1)(x-a+1)+(x+a+1)(x-a-1)$$
$$\Leftrightarrow -2ax-2x=-2a^2-2$$
$$\Leftrightarrow x(a+1)=a^2+1$$

Nếu $a=-1$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $a\neq -1$ thì $x=\dfrac{a^2+1}{a+1}$

Để $x=\dfrac{a^2+1}{a+1}$ là nghiệm của phương trình thì

$$\begin{cases} \dfrac{a^2+1}{a+1} \neq -a-1 \\ \dfrac{a^2+1}{a+1} \neq a+1 \\ \dfrac{a^2+1}{a+1} \neq -a+1 \\ \dfrac{a^2+1}{a+1} \neq a-1 \end{cases}$$

Giải ra ta được $a \neq 0$.

Kết luận: Nếu $a=-1$ hoặc $a=0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $a \neq -1$ và $a \neq 0$ thì $S=\left\{\dfrac{a^2+1}{a+1}\right\}$.

Bài 8. Chứng minh phương trình sau có ba nghiệm phân biệt:

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}$$

trong đó a,b là hằng số, $a \neq 0, b \neq 0, a+b \neq 0$.

Lời giải

ĐKXĐ của phương trình là $x \neq a, x \neq b$ Biến đổi phương trình, ta được

$$\frac{x-a}{b}-\frac{b}{x-a}+\frac{x-b}{a}-\frac{a}{x-b}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-a)^2-b^2}{bx-ba}+\frac{(x-b)^2-a^2}{ax-ab}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a-b)\left(\frac{x-a+b}{bx-ab}+\frac{x-b+a}{ax-ab}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a+b \\ (a+b)x^2-(a^2+b^2x=0) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a+b \\ x=0 \\ x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm phân biệt là $S=\left\{a+b;0;\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right\}$.

Bài 9. Giải phương trình sau:

$$\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1$$

trong đó a,b,c là các hằng số và khác nhau đôi một.

Lời giải

Ta có $x=c$ không phải là nghiệm của phương trình, do đó xét $x\neq c$.

$$\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-c}{b-a}\left(\frac{x-a}{b-c}-\frac{x-b}{a+c}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-a}{b-c}-\frac{x-b}{a-c}=\frac{b-a}{x-c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-a)(a-c)-(x-b)(b-c)}{(b-c)(a-c)}=\frac{b-a}{x-c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-(a+b)+c}{(b-c)(a-c)}=\frac{-1}{x-c}$$

$$\Leftrightarrow (x-a-b+c)(x-c)=-(b-c)(a-c)$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x-b)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \end{array}\right.$$

Kết luận: $S=\{a;b\}$.

Bài 4

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

1 Tóm tắt lý thuyết

Bước 1. Lập phương trình

- Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị sự tương quan của các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Chọn kết quả thích hợp và trả lời.

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Vào thế kỷ thứ III trước công nguyên, vua xứ Xi-ra-cút giao cho Ac-si-met kiểm tra xem chiếc mũ bằng vàng của mình có pha thêm bạc hay không. Chiếc mũ có trọng lượng 5 niutơn (theo đơn vị hiện nay), khi nhúng ngập trong nước thì trọng lượng giảm đi 0,3 niutơn. Biết rằng khi cân trong nước, vàng giảm $\frac{1}{20}$ trọng lượng, bạc giảm $\frac{1}{10}$ trọng lượng. Hỏi chiếc mũ chứa bao nhiêu gam bạc? (vật có khối lượng 100 gam thì trọng lượng bằng 1 niutơn).

Lời giải

Gọi trọng lượng bạc trong mũ là x (niutơn) $(0 < x < 5)$. Trọng lượng vàng trong mũ là $5 - x$ (niutơn). Khi nhúng ngập trong nước, trọng lượng bạc giảm $\frac{x}{10}$ (niutơn), trọng lượng vàng giảm $\frac{5-x}{10}$ (niutơn). Ta có phương trình

$$\begin{aligned}\frac{x}{10}+\frac{5-x}{20}&=0,3\\ x&=1\end{aligned}$$

Trọng lượng bạc trong mũ là 1 niutơn. Chiếc mũ chứa 100 gam bạc.

* Khi giải toán bằng cách lập phương trình, ngoài ẩn đã chọn, đôi khi người ta còn biểu thị những đại lượng chưa biết khác bằng chữ. Điều lý thú là các chữ đó tuy tham gia vào quá trình giải bài toán nhưng chúng lại không có mặt trong đáp số của bài toán. Ta xét ví dụ dưới đây:

Ví dụ 2. Một người đi một nửa quãng đường AB với vận tốc $20\ km/h$, và đi phần còn lại với vận tốc $30\ km/h$. Tính vận tốc trung bình của người đó trên toàn bộ quãng đường.

Lời giải

Gọi vận tốc trung bình phải tìm là $x\ (km/h)\ (x>0)$. Ta biểu thị một nửa quãng đường AB là $a\ km\ \ (a>0)$. Thời gian người đó đi nửa đầu của quãng đường là $\frac{a}{20}$ giờ, thời gian đi nửa quãng đường là $\frac{a}{30}$ giờ.

Ta có phương trình

$$\frac{a}{20}+\frac{a}{30}=\frac{2a}{x}$$

Giải phương trình trên, ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{20}+\frac{1}{30}&=\frac{2}{x}\\ x&=24\end{aligned}$$

Vận tốc trung bình là $24\ \mathrm{km/h}$.

Lưu ý:

- Nếu vận tốc trên nửa đầu của quãng đường là $a\ km/h$, vận tốc trên nửa sau là $b\ \mathrm{km/h}$ thì vận tốc trung bình trên cả quãng đường bằng $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ \mathrm{km/h}$.

  Đại lượng này được gọi là trung bình điều hòa của a và b.

- Trung bình điều hòa của hai số dương a và b nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của hai số ấy. Thật vậy

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}\le\frac{a+b}{2}\ \text{vì}\ 4ab\le(a+b)^2$$

3 Bài tập tự luyện

🗁 **Bài 1.** Hỡi khách qua đường, cho hay Đi-ô-phăng thọ bao nhiêu tuổi?

Biết thời thơ ấu của ông chiếm $\frac{1}{6}$ cuộc đời.

$\frac{1}{12}$ cuộc đời tiếp theo là thời thanh niên sôi nổi.

Đến khi lập gia đình thì lại thêm $\frac{1}{7}$ cuộc đời.

5 năm nữa trôi qua, và một cậu con trai đã được sinh ra.

Nhưng số mệnh buộc con chỉ sống bằng nửa đời cha.

Ông đã từ trần 4 năm sau khi con mất.

Đi-ô-phăng thọ bao nhiêu hãy tính cho ra?

Lời giải

Gọi số tuổi của Đi-ô-phăng là $x, (x > 0)$. Khi đó, ta có phương trình:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Giải ra ta được $x = 84$. vậy Đi-ô-phăng thọ 84 tuổi.

🗁 **Bài 2.** Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 1 vào đằng trước và một chữ số 1 vào đằng sau thì số đó tăng gấp 21 lần.

Lời giải

Gọi số tự nhiên có bốn chữ số là $x = \overline{abcd}, (x > 0)$. Sau khi thêm chữ số 1 vào đằng trước và chữ số 1 vào đằng sau thì số mới là: $\overline{1abcd1}$, có giá trị là $100001 + 10 \cdot \overline{abcd} = 100001 + 10x$.

Theo đề bài ta có phương trình

$$100001 + 10x = 21x$$

Giải ra ta được $x = 9091$. Vậy số cần tìm là 9091.

🗁 **Bài 3.** Tìm một số tự nhiên có sáu chữ số, biết rằng chữ số tận cùng của nó bằng 4 và nếu chuyển chữ số 4 đó lên vị trí chữ số đầu tiên thì số phải tìm tăng gấp 4 lần.

Lời giải

Gọi số tự nhiên có sáu chữ số cần tìm là $x=\overline{abcde4},(x>0)$. Sau khi chuyển chữ số 4 lên vị trí đầu tiên, ta được số mới là $\overline{4abcde}$ có giá trị là $\frac{\overline{abcde4}-4}{10}+400000=\frac{x-4}{10}+400000$. Theo đề bài ta có phương trình

$$\frac{x-4}{10}+400000=4x$$

Giải ra ta được $x=102564$. Vậy số tự nhiên cần tìm là 102564.

🗁 **Bài 4.** Tính tuổi của hai mẹ con hiện nay, biết rằng cách đây 4 năm thì tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con, sau đấy 2 năm thì tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi con.

Lời giải

Gọi số tuổi của mẹ hiện nay là $x,(x>0)$. Cách đây 4 năm, số tuổi của mẹ là $x-4$.

Theo đề bài, ta có tuổi của con 4 năm trước là $\frac{x-4}{5}$. Số tuổi của con sau 2 năm nữa (đối với hiện tại) là $\frac{x-4}{5}+4+2$ và số tuổi của mẹ sau 2 năm nữa (dối với hiện tại) là $x+2$.

Theo đề bài, ta lại có

$$\frac{x-4}{5}+4+2=\frac{x+2}{3}$$

Giải ra ta được $x=34$. Vậy tuổi của mẹ là 34 và tuổi của con là 10.

🗁 **Bài 5.** . Một hình chữ nhật có chu vi bằng 320 m. Nếu tăng chiều dài 10 m, tăng chiều rộng 20 m thì diện tích tăng 2700 m^2. Tính độ dài mỗi chiều.

Lời giải

Gọi chiều dài hình chữ nhật là $x(\text{ m}),(160>x>0)$ từ đó suy ra chiều rộng là $\frac{320}{2}-x=160-x$.

Sau khi tăng chiều dài và chiều rộng, diện tích của hình chữ nhật mới là $(x+10)(160-x+20)$.

Theo đề bài ta có

$$(x+10)(160-x+20)=x(160-x)+2700$$

Giải ra ta được $x=90$. Vậy chiều dài hình chữ nhật là 90 m, chiều rộng hình chữ nhật là 70 m.

Bài 6. Một ca nô tuần tra đi xuôi khúc sông từ A đến B hết 1 giờ 10 phút và đi ngược dòng từ B về A hết 1 giờ 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng vận tốc dòng nước là 2 km/h.

Lời giải

Gọi vận tốc riêng của ca nô là $x(\text{ km/h}),(x>0)$, suy ra vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $x+2$, khi ngược dòng là $x-2$.

Đổi đơn vị: 1 giờ 10 phút $=\frac{7}{6}$ giờ, 1 giờ 30 phút $=\frac{3}{2}$ giờ.

Vì quãng đường đi và về là như nhau nên ta có

$$\frac{7}{6}(x+2)=\frac{3}{2}(x-2)$$

Giải ra ta được $x=16$. Vậy vận tốc riêng của ca nô là 16 km/h.

Bài 7. Một người đi từ A đến B với vận tốc 24 km/h rồi đi tiếp từ B đến C với vận tốc 32 km/h. Tính quãng đường AB và BC, biết rằng quãng đường AB dài hơn quãng đường BC là 6 km và vận tốc trung bình của người đó trên cả quãng đường AC là 27 km/h.

Lời giải

Gọi quãng đường AB là $x(\text{ km})(x>6)$.

Quãng đường BC là $x-6$.

Thời gian người đó đi hết đoạn đường AB là $\frac{x}{24}$, thời gian đi hết đoạn đường BC là $\frac{x-6}{32}$, thời gian đi hết đoạn đường AC là $\frac{x+x-6}{27}$. Theo đề bài ta có phương trình

$$\frac{x+x-6}{27}=\frac{x}{24}+\frac{x-6}{32}$$

Giải ra ta được $x=30$. Vậy quãng đường AB dài 30 km, quãng đường BC dài 24 km.

🗁 **Bài 8.** Quãng đường từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC, đoạn nằm ngang CD, đoạn xuống dốc DB, tổng cộng dài 30 km. Một người đi từ A đến B rồi từ B về A hết tất cả 4 giờ 25 phút. Tính quãng đường nằm ngang, biết rằng vận tốc lên dốc (cả lúc đi lẫn lúc về) là 10 km/h, vận tốc xuống dốc (cả lúc đi lẫn lúc về) là 20 km/h, vận tốc trên đường nằm ngang là 15 km/h.

Lời giải

Gọi độ dài quãng đường AC, CD, DB lần lượt là $a, x, b(\text{ km}), (a, x, b > 0)$.

Xét lúc đi từ A đến B, thời gian người đó đi lên dốc AC là $\frac{a}{10}$, đi trên đoạn nằm ngang CD là $\frac{x}{15}$, đi xuống dốc DB là $\frac{b}{20}$.

Xét lúc đi từ B về A thời gian người đó đi lên dốc DB là $\frac{b}{10}$, đi trên đoạn nằm ngang CD là $\frac{x}{15}$, đi xuống dốc AC là $\frac{a}{20}$.

Đổi đơn vị 4 giờ 25 phút $= \frac{53}{12}$.

Thời gian đi từ A đến B trở về A là

$$\frac{a}{10}+\frac{x}{15}+\frac{b}{20}+\frac{b}{10}+\frac{x}{15}+\frac{a}{20}=\frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{10}+\frac{a+b}{20}+\frac{2x}{15}=\frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{30-x}{10}+\frac{30-x}{20}+\frac{2x}{15}=\frac{53}{12}$$

Giải ra ta được $x = 5$. Vậy độ dài quãng đường nằm ngang là 5 km.

🗁 **Bài 9.** Lúc 8 giờ, An rời nhà mình để đến nhà Bích với vận tốc 4 km/h. lúc 8 giờ 20 phút, Bích cũng rời nhà mình đến nhà An với vận tốc 3 km/h. An gặp Bích trên đường, rồi cả hai cùng đi về nhà Bích. Khi trở về đến nhà mình, An tính ra quãng đường mình đã đi dài gấp bốn lần quãng đường Bích đã đi. Tính khoảng cách An đến nhà Bích.

Lời giải

Gọi quãng đường từ nhà An đến nhà Bích là $x(\text{ km}), (x > 0)$.

Vì An đến nhà Bích, rồi quay trở về lại nhà mình, nên quãng đường An đã đi là $2x$. Suy ra quãng đường Bích đi là $\frac{x}{2}$ và quãng đường Bích đi từ nhà mình đến nơi hai người gặp nhau là $\frac{x}{4}$. Do đó, quãng đường An đi từ nhà mình đến nơi hai người gặp nhau là $\frac{3x}{4}$.

Thời gian An đi từ nhà mình đến nơi hai người gặp nhau $\frac{\frac{3x}{4}}{4}$.

Thời gian Bích đi từ nhà mình đến nơi hai người gặp nhau $\frac{\frac{x}{4}}{3}$. An đi sớm hơn Bích 20 phút $=\frac{1}{3}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{\frac{3x}{4}}{4}=\frac{\frac{x}{4}}{3}+\frac{1}{3}$$

Giải ra ta được $x=3,2$. Vậy quãng đường từ nhà An đến nhà Bích dài $3,2\text{ km}$.

🗁 **Bài 10.** Một người đi xe đạp, một người đi xe máy và một người đi ô tô cùng đi từ A đến B, khởi hành lần lượt lúc 7 giờ, 8 giờ, 9 giờ với vận tốc theo thứ tự bằng $10\text{ km/h}, 30\text{ km/h}$ và 50 km/h. Đến mấy giờ thì ô tô ở vị trí cách đều xe đạp và xe máy.

Lời giải

Gọi x là thời gian xe đạp đi, $(x>2)$. Suy ra thời gian xe máy và ô tô đi lần lượt là $x-1$ và $x-2$. Quãng đường xe đạp, xe máy, xe ô tô đi được lần lượt là $10x, 30(x-1), 50(x-2)$.

Ta xét thời điểm mà xe ô tô cách đều xe đạp và xe máy, tức là:

$$|50(x-2)-10x|=|50(x-2)-30(x-1)|$$

Trường hợp 1: $50(x-2)-10x=50(x-2)-30(x-1)$. Giải ra ta được $x=1,5$ (loại). Trường hợp $2: 50(x-2)-10x=-50(x-2)+30(x-1)$. Giải ra ta được $x=\frac{17}{6}$.

Đổi đơn vị $\frac{17}{6}$ giờ $=2$ giờ 50 phút.

Vậy vào lúc 9 giờ 50 phút, xe ô tô ở vị trí cách đều xe đạp và xe máy.

🗁 **Bài 11.** Người ta pha 3 kg nước nóng ở 90°C với 2 kg nước lạnh ở 20°C. Tính nhiệt độ sau cùng của nước (bỏ qua sự mất nhiệt).

Lời giải

Gọi nhiệt độ sau cùng của nước là x (độ), $(20 < x < 90)$, nhiệt dung riêng của nước là c. Nhiệt lượng 3 kg nước nóng tỏa ra để giảm xuống còn x độ là: $Q_1 = 3c(90 - x)$.

Nhiệt lượng 2 kg nước lạnh thu vào để tăng lên x độ là: $Q_2 = 2c(x - 20)$.

Áp dụng định luật cân bằng nhiệt lượng, ta có

$$3c(90 - x) = 2c(x - 20)$$

Giải ra ta được $x = 62$. Vậy nhiệt độ sau cùng của nước là 62°C.

🗁 **Bài 12.** Có hai loại dung dịch muối I và muối II. Người ta hòa tan 200 gam dung dịch muối I và 300 gam dung dịch muối II thì được một dung dịch có nồng độ muối là 33%. Tính nồng độ muối trong mỗi dung dịch I và II, biết rằng nồng độ muối trong dung dịch I lớn hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 20%.

Lời giải

Gọi nồng độ muối trong dung dịch I là $x, (x > 0)$, suy ra nồng độ muối của dung dịch II là $x - 20\%$. Khối lượng chất tan trong dung dịch I và II lần lượt là $200x$ và $300(x - 20\%)$.

Nồng độ muối trong dung dịch sau khi hòa tan hai dung dịch trên là $\dfrac{200x + 300(x - 20\%)}{200 + 300} = 33\%$.
Giải ra ta được $x = 0,45 = 45\%$. Vậy nồng độ muối trong dung dịch I và II lần lượt là 45% và 25%.

🗁 **Bài 13.** Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 24 giờ. Nếu đội thứ nhất làm 10 giờ, đội thứ hai làm 15 giờ thì cả hai đội làm được một nửa công việc. Tính thời gian mỗi đội làm một mình để xong công việc.

Lời giải

Gọi số giờ đội I làm xong công việc là x (giờ), $(x > 0)$. Suy ra 1 giờ đội đó làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc. Sau 24 giờ, đội I làm được $\dfrac{24}{x}$ công việc.

Sau 24 giờ, đội II làm được $1-\frac{24}{x}$ công việc.

Trong 1 giờ, đội II làm được $\frac{1-\frac{24}{x}}{24}$ công việc.

Theo đề bài ta có

$$10\cdot\frac{1}{x}+15\cdot\frac{1-\frac{24}{x}}{24}=\frac{1}{2}$$

Giải ra ta được $x=40$. Từ đó suy ra đội I hoàn thành công việc trong 40 giờ, đội II hoàn thành công việc trong 60 giờ.

Bài 14. Cho n số nguyên dương (không nhất thiết khác nhau) trong đó có số 68. Trung bình cộng của n số đó bằng 56. Khi bỏ số 68 đó đi thì trung bình cộng của $n-1$ số còn lại bằng 55.

1. Tìm n
2. Số lớn nhất trong n số đã cho có thể bằng bao nhiêu?

Lời giải

1. Tổng của $n-1$ số còn lại là $55(n-1)$.

Trung bình cộng của cả n số là $\frac{55(n-1)+68}{n}=56$.

Giải ra ta được $n=13$.

2. Có 13 số là $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{12}, 68$.

Giả sử số lớn nhất là a_{12}, số này đạt lớn nhất có thể khi $a_1, \ldots, a_{11}$ đều đạt giá trị 1.

Ta có $1+1+\ldots+1+a_{12}+68=56\cdot 13=728 \Leftrightarrow a_{12}=728-11-68=649$.

Vậy số lớn nhất có thể là 649.

Bài 15. Trong một buổi họp mặt giữa hai lớp 8 A và 8 B, có tất cả 50 học sinh tham gia. Các bạn lớp 8 B tính số người quen ở lớp 8 A và thấy rằng bạn Anh quen 11 ban, ban Bắc quen 12 ban, bạn Châu quen 13 bạn,... và cứ như vậy dến bạn cuối cùng là bạn Yến quen tất cả các bạn của lớp 8 A. Tính số học sinh mỗi lớp tham gia họp mặt.

Lời giải

Gọi số học sinh lớp 8 B là $x, (x>0)$. Số học sinh lớp 8 A là $50-x$.

Số người quen ở lớp 8 A của các học sinh lớp 8 B lần lượt là: $11,12,13,\ldots,50-x$.

Lớp 8 B có x học sinh, nên ta có phương trình

$$50-x-11+1=x$$

Giải ra ta được $x=20$.

Vậy lớp 8 B có 20 học sinh, lớp 8 A có 30 học sinh.

Bài 16. Một nông dân mang cam ra chợ, bán cho người khách thứ nhất $\frac{1}{2}$ số cam và thêm $\frac{1}{2}$ quả, bán cho người khách thứ hai $\frac{1}{2}$ số cam còn lại và thêm $\frac{1}{2}$ quả, bán cho người khách thứ ba $\frac{1}{2}$ số cam còn lại và thêm $\frac{1}{2}$ quả... Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi người khách thứ sáu mua xong thì số cam vừa hết. Tính tổng số cam mà người nông dân đem bán.

Lời giải

Gọi x là số cam ban đầu của người nông dân, $(x>0)$.

Sau khi bán cho người thứ nhất, số cam còn lại là $x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$ Sau khi bán cho người thứ hai, số cam còn lại là $\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{x-3}{4}$. Sau khi bán cho người thứ tư, số cam còn lại là $\frac{x-7}{8}-\frac{x-7}{16}-\frac{1}{2}=\frac{x-15}{16}$ Sau khi bán cho người thứ năm, số cam còn lại là $\frac{8}{x-15}^{16}-\frac{x-15}{32}-\frac{1}{2}=\frac{x-31}{32}$.

Sau khi bán cho người thứ sáu, số cam còn lại là $\frac{x-31}{32}-\frac{x-31}{64}-\frac{1}{2}=\frac{x-63}{64}$.

Sau khi bán cho noời thứ sás thì vừa. hết số cam. có nghĩalà. Sau khi bán cho người thứ sáu thì vừa hết số cam, có nghĩa là

$$\frac{x-63}{64}=0\Rightarrow x=63$$

Vậy số cam ban đầu người đó có là 63 quả.

Bài 17. Có ba cánh đồng cỏ như nhau, cỏ cũng luôn mọc đều như nhau trên toàn bộ mỗi cánh đồng. Biết rằng 9 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng I trong 2 tuần, 6 con bò ăn hết số cỏ có san và số cỏ mọc thêm của cánh đồng II trong 4 tuần.

a) Tính xem trên mỗi cánh đồng, số cỏ mọc thêm trong một tuần bằng mấy phần của số cỏ có san lúc đầu?

b) Bao nhiêu con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng III trong 6 tuần?

Lời giải

a)Gọi lượng cỏ ba đầu là a, tỉ lệ cỏ mọc thêm trong một tuần so với lượng cỏ ba đầu là $x, (x>0)$.
Lượng cỏ sau 2 tuần là $a+2ax=a(1+2x)$.

Lượng cỏ 1 con bò ăn trong 1 tuần (dữ kiện 1) là $\dfrac{a(1+2x)}{18}$.

Lượng cỏ sau 4 tuần là $a+4ax=a(1+4x)$.

Lượng cỏ 1 con bò ăn trong 1 tuần (dữ kiện 2) là $\dfrac{a(1+4x)}{24}$.

Ta có phương trình $\dfrac{a(1+2x)}{18}=\dfrac{a(1+4x)}{24} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

Vậy tỉ lệ cỏ mọc thêm là $\dfrac{1}{4}$.

b) Sau 6 tuần, lượng cỏ là $a(1+6x)=\dfrac{5}{2}a$.

Lượng cỏ 1 con bò ăn hết trong 6 tuần là $6\cdot\dfrac{a}{24}\left(1+4\cdot\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{a}{2}$.

Vậy số bò cần có để ăn hết lượng cỏ trên là $\dfrac{\frac{-}{2}a}{\frac{a}{2}}=5$ (con).

🗁 **Bài 18 .** Bài toán của Niu-tơn. Một cánh đồng cỏ mọc dày như nhau, cỏ luôn mọc đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng. Biết rằng 12 con bò ăn hết cỏ trên $\dfrac{10}{3}$ acrơ trong 4 tuần, 21 con bò ăn hết cỏ trên 10 acrơ trong 9 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ trên 24 acrơ trong 18 tuần (1 acrơ $=4047\ \text{m}^2$).

Lời giải

Gọi tỉ lệ cỏ tăng so với lượng cỏ ban đầu là $x, (x>0)$.

Sau 4 tuần, số cỏ trên $\dfrac{10}{3}$ acrơ là $\dfrac{10}{3}+\dfrac{10}{3}4x$.

Lượng cỏ 1 con ăn trong 1 tuần (dữ kiện 1) là $\dfrac{\frac{10}{3}+\frac{40}{3}x}{48}$. Sau 9 tuần, số cỏ trên 10 acrơ là $10+90x$.

Lượng cỏ 1 con ăn trong 1 tuần (dữ kiện 2) là $\dfrac{10+90x}{21\cdot 9}$.

Ta có phương trình $\dfrac{\frac{10}{3}+\frac{40}{3}x}{48}=\dfrac{10+90x}{21\cdot 9}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{12}$

Số cỏ trên 24 acrơ sau 18 tuần là $24+24\cdot 18\cdot\dfrac{1}{12}=60$.

Lượng cỏ 1 con ăn trong 1 tuần là $\dfrac{5}{54}$ acrơ.

Lượng cỏ 1 con ăn trong 18 tuần là $18\cdot\dfrac{5}{54}=\dfrac{5}{3}$ acrơ. Số bò cần tìm là $\dfrac{60}{5}=36$ (con).

Bài 19 . Một khách du lịch đi từ A đến B nhận thấy cứ 15 phút lại gặp một xe buýt đi cùng chiều vượt qua, cứ 10 phút lại gặp một xe buýt chạy ngược lại. Biết rằng các xe buýt đều chạy với cùng một vận tốc, khởi hành sau những khoảng thời gian bằng nhau và không dừng lại trên đường (trên chiều từ A đến B cũng như trên chiều ngược lại). Hỏi cứ sau bao nhiêu phút thì các xe buýt lại lần lượt rời bến?

Lời giải

Gọi x là thời gian người đó đi từ A đến $B,(x>0)$.

Số lần người đó gặp xe buýt cùng chiều và ngược chiều lần lượt là $\dfrac{x}{15},\dfrac{x}{10}$. Giả sử người đó đi từ A đến B rồi từ B trở về A, số xe buýt người đó gặp là $\dfrac{x}{15}+\dfrac{x}{10}$. Thời gian người đó đi từ A đến B rồi từ B trở về A là $2x$. Thor glan ngươ do di tư A den B rol tư B trơ ve A la $2x$

Khoảng thời gian các xe buýt lần lượt rời bến là $\dfrac{2x}{\frac{x}{15}+\frac{x}{10}}=12$ (phút).

Bài 20 . Trên quãng đường AB của một thành phố, cứ 6 phút lại có một chiếc xe buýt theo chiều từ A đến B, và cũng cứ 6 phút lại có một chiếc xe buýt theo chiều ngược lại. Các xe này chuyển động đều với cùng vận tốc như nhau. Một khách du lịch đi bộ từ A đến B nhận thấy cứ 5 phút lại gặp một xe đi về phía mình. Hỏi cứ bao nhiêu phút lại có một xe đi từ A vượt qua người đó?

Lời giải

Gọi x,y lần lượt là vận tốc của xe buýt và vị khách du lịch, $(x,y>0)$.

Cứ 6 phút là có một chiếc xe buýt nên khoảng cách giữa hai chiếc xe là $6x$.

Vận tốc của xe đi từ A đến B đối với vị khách là $x-y$ và vận tốc của xe đi từ B về A đối với vị khách là $x+y$.

Thời gian để xe đi từ B về A vượt qua vị khách là $\dfrac{6x}{x+y}=5 \Leftrightarrow x=5y$.

Thời gian để xe đi từ A đến B vượt qua vị khách là $\dfrac{6x}{x-y}=\dfrac{30y}{4y}=7,5$ (phút).

Chương 4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài 1 LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG, PHÉP NHÂN

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a>b$ (hoặc $a<b, a\le b, a\ge b$) là một bất đẳng thức.

Để chứng minh bất đẳng thức $a>b$, ta xét hiệu $a-b$ và chứng minh hiệu đó là một số dương.

Các cách khác chứng minh bất đẳng thức được nêu trong chuyên đề bất đẳng thức.

2. Một số tính chất

Tính chất 1. Tính bắc cầu:

$a>b; b>c \Rightarrow a>c$

Tính chất 2. Cộng hai vế của bất đẳng thức với cùng một số:

$a>b \Rightarrow a+c>b+c$.

Tính chất 3. Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số:

$a>b; c>0 \Rightarrow ac>bc$

$a>b; c<0 \Rightarrow ac<bc$

Các tính chất khác được nêu trong chuyên đề Bất đẳng thức.

2 Một số ví dụ

🕮 **Ví dụ 1.** Chứng minh các bất đẳng thức:

$$x^2+y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} \ge 2xy$$

Lời giải

- Xét hiệu

$$x^2+y^2-\frac{(x+y)^2}{2}=\frac{2x^2+2y^2-x^2-2xy-y^2}{2}$$

$$=\frac{x^2-2xy+y^2}{2}=\frac{(x-y)^2}{2}\geq 0$$

Vậy $x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}$. Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y$

- Xét hiệu

$$\frac{(x+y)^2}{2}-2xy=\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{2}=\frac{(x-y)^2}{2}\geq 0$$

Vậy $\frac{(x+y)^2}{2}\geq 2xy$. Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y$

Nhận xét.

- Bất đẳng thức $x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}$ cho liên hệ giữa tổng bình phương của hai số $x,\ y$ và bình phương của tổng hai số đó.

- Bất đẳng thức $\frac{(x+y)^2}{2}\geq 2xy$ hay $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\geq xy$ cho liên hệ giữa tổng hai số $x,\ y$ và tính của hai số đố.

Với $x,\ y$ không âm, bất đẳng thức này được biết dưới dạng $\frac{x+y}{2}\geq$(trung bình cộng hai số lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng), đó là bất đẳng thức Cô – si với hai số không âm.

Ví dụ 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

1) $x+\frac{1}{x}\geq 2$ với $x>0$;

2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ với $a>0, b>0$.

Lời giải

1) Xét hiệu:

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{2}=\frac{(x-1)^2}{2}\geq 0 \text{ vì } (x-1)^2\geq 0, x>0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

2) Xét hiệu:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{b(a+b)+a(a+b)-4ab}{ab(a+b)}$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab(a+b)}$$

$$=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\ge 0\text{, vì } a,b>0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Nhận xét.

- Bất đẳng thức $x+\frac{1}{x}\ge 2$ với $x>0$) cho liên hệ giữa một số dương với nghịch đảo của nó.

- Bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ với $a>0,\ b>0$ cho liên hệ giữa tổng các số nghịch đảo của hai số dương và nghịch đảo của tổng hai số đó.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$a)\,4x^2+4x+5>0$

$b)\,x^2-x+1>0$

$c)\,a^2+ab+b^2\ge 0$

Lời giải

$a)\,4x^2+4x+5=(2x+1)^2+4>0$

$b)\,x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$c)\,a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\ge 0$

Bài 2. Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{x-x^2-1}{x-x^2+1}<1$

Lời giải

Xét hiệu

$$\frac{x-x^2-1}{x-x^2+1}-1=\frac{-2}{x-x^2+1}<0$$

(Vì $x-x^2+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$). Do đó $\frac{x-x^2-1}{x-x^2+1}<1$

Bài 3. Rút gọn rồi chứng minh rằng biểu thức sau không âm với mọi giá trị của x:

$$\frac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}.$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}=\frac{(x+1)^2\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=-1$

Bài 4. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ với $a,b>0$;

2) $a^4+b^4\geq ab\left(a^2+b^2\right)$.

Lời giải

1) Xét hiệu

$a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a-b)^2\geq 0$ (do $a,b>0$)

Do đó $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ với $a,b>0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

2) Xét hiệu

$a^4+b^4-ab\left(a^2+b^2\right)=a^3(a-b)-b^3(a-b)=(a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right)\geq 0$ (do $a,b>0$)

Do đó $a^4+b^4\geq ab\left(a^2+b^2\right)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Bài 5. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq(ax+by)^2$ (bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki với hai cặp số $a,\ b$ và $x,\ y$).

2) $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq(ax+by+cz)^2$

(bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki với hai bộ ba số $a,\ b,\ c$ và $x,\ y,\ z$).

Lời giải

1) Ta có

$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$

$=(ay-bx)^2\geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay=bx$

2) Ta có

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(ax+by+cz\right)^2$$

$$=\left(ay-bx\right)^2+\left(az-cx\right)^2+\left(bz-cy\right)^2\geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay=bx,\ az=cx,\ bz=cy$

Bài 6. Cho a và b cùng dấu. Chứng minh rằng

a) Nếu $a>b$ thì $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ b) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$

Lời giải

a) Ta có

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$$

Vì $b-a<0,\ ab>0.$ do đó $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

b) Ta có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}=\frac{\left(a-b\right)^2}{ab}\geq 0$$

(Vì $ab>0$) . Do đó $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ với $ab>0.$

Bài 7. Gọi $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ là trung bình điều hòa của a và b. Chứng minh rằng trung bình điều hòa của hai số dương a và b nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của hai số ấy.

Lời giải

Ta có

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{a+b}{2}-\frac{ab}{a+b}=\frac{\left(a+b\right)^2-4ab}{2\left(a+b\right)}=\frac{\left(a-b\right)^2}{2\left(a+b\right)}\geq 0$$

(Vì $a,b>0$). Do đó $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\frac{a+b}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Bài 8. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $2\left(a^2+b^2\right)\geq\left(a+b\right)^2$

2) $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\left(a+b+c\right)^2\geq 3\left(ab+bc+ca\right)$

Lời giải

1) Ta có

$$2\left(a^2+b^2\right)-\left(a+b\right)^2=a^2-2ab+b^2=\left(a-b\right)^2\ge 0$$

Do đó $2\left(a^2+b^2\right)\ge\left(a+b\right)^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

2) Ta có

$3\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a+b+c\right)^2$

$=3\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)$

$=\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\ge 0$

$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2\quad(1)$

Ta có

$\left(a+b+c\right)^2-3\left(ab+bc+ca\right)$

$=\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)-3\left(ab+bc+ca\right)$

$=\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\ge 0$

$\Rightarrow\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)\quad(2)$

Từ (1) và (2) ta có $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

🗁 **Bài 9.** Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

b) $\dfrac{a^4+b^4}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4$

c) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$

Lời giải

a) Ta có

$$\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-\left(a+b\right)^2}{4}=\frac{\left(a-b\right)^2}{4}\ge 0$$

Do đó $\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

b) Áp dụng câu a) hai lần ta có.

$$\frac{a^4+b^4}{2} \ge \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

c) Ta có

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

$$= \frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)-(a+b+c)^2}{9}$$

$$= \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{9} \ge 0$$

Do đó $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 2

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Khái niệm về bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $a+b>0$ (hoặc $ax+b<0$, $ax+b \ge 0$, $ax+b \le 0$). Trong đó x là ẩn, a và b là các số đã cho, $a \ne 0$.

2. Hai bất phương trình tương đương

Hai bất phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm

3. Một số chú ý khi giải một bất phương trình

Khi giải một bất phương trình, ta có thể:

- Chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
- Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số dương.
- Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số âm và đổi chiều của bất phương trình

2 Một số ví dụ

🕮 **Ví dụ 1.** Giải bất phương trình sau với m là hằng.

$$mx+1 \ge m^2+x$$

Lời giải

Biến đổi tương đương

$mx+1\ge m^2+x \Leftrightarrow mx-x\ge m^2-1 \Leftrightarrow (m-1)x\ge m^2-1 \quad (1)$

- Nếu $m>1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x\ge m+1$
- Nếu $m<1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x\le m+1$
- Nếu $m=1$ thì (1) có dạng $0x\ge 0;$ nghiệm của bất phương trình là mọi x

📖 **Ví dụ 2.** Giải bất phương trình sau với a là hằng.

$$\frac{x+1}{a}+ax>\frac{x+2}{a}-2x$$

Lời giải

Điều kiện xác định của bất phương trình là $a\ne 0$. Biến đổi bất phương trình:

$$\frac{x+1}{a}+ax>\frac{x+2}{a}-2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{1}{a}+ax>\frac{x}{a}+\frac{2}{a}-2x$$

$$\Leftrightarrow ax+2x>\frac{2}{a}-\frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow (a+2)x>\frac{1}{a} \qquad (1)$$

- Nếu $a>-2,\ a\ne 0$ thì nghiệm của bất phương trình là $x>\dfrac{1}{a(a+2)}$
- Nếu $a<-2$ thì nghiệm của bất phương trình là $x<\dfrac{1}{a(a+2)}$
- Nếu $a=-2$ thì (1) có dạng $0x>\dfrac{-1}{2}$ nghiệm đúng với mọi x.

📖 **Ví dụ 3.** Kí hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Tìm x biết rằng

$$\left[\frac{3x-5}{7}\right]=x$$

Lời giải

Theo đề bài, x là số nguên lớn nhất không vượt quá $\dfrac{3x-5}{7}$ do đó

$$\left[\frac{3x-5}{7}\right]=x \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le \dfrac{3x-5}{7}-x<1 & (1) \\ x\in\mathbb{Z} & (2) \end{cases}$$

Giải bất phương trình (1)

$$0\le \frac{3x-5}{7}-x<1 \Leftrightarrow 0\le \frac{-4x-5}{7}<1 \Leftrightarrow 0\le -4x-5<7$$

$$\Leftrightarrow 5\le -4x<12 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}\ge x>-3$$

Theo (2), $x\in\mathbb{Z}$, do đó $x=-2$.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Tìm giá trị của x thỏa mãn cả hai bất phương trình:

$$\frac{2x}{5}+\frac{3-2x}{3}\ge\frac{3x+2}{2}\text{ và }\frac{x}{2}+\frac{3-2x}{5}\ge\frac{3x-5}{6}$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{2x}{5}+\frac{3-2x}{3}\ge\frac{3x+2}{2}\Leftrightarrow 12x+10(3-2x)\ge 15(3x+2)\Leftrightarrow x\le 0\quad (1)$$

Mặt khác

$$\frac{x}{2}+\frac{3-2x}{5}\ge\frac{3x-5}{6}\Leftrightarrow 15x+6(3-2x)\ge 5(3x-5)\Leftrightarrow x\le\frac{43}{12}\quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $x\le 0$

Bài 2. Tìm số nguyên x thỏa mãn cả hai bất phương trình sau

$$\frac{3x-2}{5}\ge\frac{x}{2}+0,8\text{ và }1-\frac{2x-5}{6}>\frac{3-x}{4}$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{3x-2}{5}\ge\frac{x}{2}+0,8\Leftrightarrow 2(3x-2)\ge 5x+8\Leftrightarrow x\ge 12\quad (1)$$

Mặt khác

$$1-\frac{2x-5}{6}>\frac{3-x}{4}\Leftrightarrow 12-2(2x-5)>3(3-x)\Leftrightarrow x<13\quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $12\le x<13$ mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x=12$

Bài 3. Tìm số nguyên x thỏa mãn cả hai bất phương trình sau

$$2(3x-4)<3(4x-3)+16\text{ và }4(1+x)<3x+5$$

Lời giải

Ta có

$$2(3x-4)<3(4x-3)+16\Leftrightarrow 6x-8<12x+7\Leftrightarrow x>-\frac{5}{2}\quad (1)$$

Mặt khác $\quad 4(1+x)<3x+5\Leftrightarrow 4x+4<3x+5\Leftrightarrow x<1\quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{-5}{2}<x<1$ mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-2;-1;0\}$

Bài 4. Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1}$$

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tìm x để $A>0$

Lời giải

1) Ta có

$$A=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1}$$

$$=\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2}.\frac{1-x^2}{2x-1}$$

$$=\frac{-2}{2x-1}$$

Với $x\neq\frac{1}{2},x\neq\pm1$

2) $A>0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-2}{2x-1}>0\\ x\neq\dfrac{1}{2},x\neq\pm1\end{cases}\Leftrightarrow -1\neq x<\dfrac{1}{2}$

Bài 5. Cho biểu thức

$$B=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{x^2-3x}\right):\left(\frac{x^2}{27-3x^2}+\frac{1}{x+3}\right)$$

1) Rút gọn biểu thức B

2) Tìm x để $B<-1$

Lời giải

1) Ta có

$$B=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{x^2-3x}\right):\left(\frac{x^2}{27-3x^2}+\frac{1}{x+3}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2-3x+9}{3\left(x^2-3x\right)}\right):\left(\frac{x^2}{3(3-x)(3+x)}+\frac{3(3-x)}{3(3-x)(3+x)}\right)$$

$$=\frac{x^2-3x+9}{3x(x-3)}.\frac{3(3-x)(3+x)}{x^2-3x+9}$$

$$=-\frac{x+3}{x}$$

Với $x\neq 0,x\neq\pm3$

2) $B<-1\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{x+3}{x}<-1\\ x\neq0,x\neq\pm3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-3}{x}<0\\ x\neq0,x\neq\pm3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\ x\neq-3\end{cases}$

Bài 6. Giải bất phương trình sau

$$\frac{x+2}{89}+\frac{x+5}{86}>\frac{x+8}{83}+\frac{x+11}{80}.$$

Lời giải

$$\frac{x+2}{89}+\frac{x+5}{86}>\frac{x+8}{83}+\frac{x+11}{80}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x+2}{89}+1\right)+\left(\frac{x+5}{86}+1\right)>\left(\frac{x+8}{83}+1\right)+\left(\frac{x+11}{80}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow(x+91)\left(\frac{1}{89}+\frac{1}{86}-\frac{1}{83}-\frac{1}{80}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow x<-91$$

🗁 **Bài 7.** Giải các bất phương trình với a là hằng số

1) $2(x+2)<a(a+x)$

2) $a(x-a)\le x-1$

3) $\dfrac{2x}{a^2-a+1}-\dfrac{1}{2a+2}<\dfrac{4x-1}{2a^2-2a+2}+\dfrac{a-2ax}{1+a^3}$

✍ Lời giải

1) Ta có

$$2(x+2)<a(a+x)\Leftrightarrow(a+2)x<a^2-4$$

- Nếu $a>-2$ thì $x<a-2$
- Nếu $a<-2$ thì $x>a-2$
- Nếu $a=-2$ vô nghiệm

2. Ta có

$$a(x-a)\le x-1\Leftrightarrow(a-1)x\le a^2-1$$

Nếu $a>1$ thì $x\le a+1$.

Nếu $a<1$ thì $x\ge a+1$.

Nếu $a=1$ thì $0x\le 0$, nghiệm đúng với mọi x.

3. Điều kiện: $a\ne -1$. Ta có

$$\frac{2x}{a^2-a+1}-\frac{1}{2a+2}<\frac{4x-1}{2a^2-2a+2}+\frac{a-2ax}{1+a^3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{2(1+a^3)}(4x-a)<0\Leftrightarrow\frac{a}{a+1}(4x-a)<0$$

Nếu $a=0$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $\dfrac{a}{a+1}>0$ (Tức là $a<-1$ hoặc $a>0$) thì $x<\dfrac{a}{4}$.

Nếu $\dfrac{a}{a+1}>0$ (Tức là $-1<a<0$) thì $x>\dfrac{a}{4}$.

🗁 **BÀI 8.** Tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình sau là số dương:

$$\frac{m+1}{x-1}=1-m$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \neq 1$. Đưa phương trình về dạng $(1-m)x = 2$.

Nếu $m = 1$, phương trình vô nghiệm.

Nếu $m \neq 1$ thì $x = \dfrac{2}{1-m}$. Giải điều kiện $x \neq 1$ ta được $m \neq -1$.

Nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{2}{1-m}$ với $m \neq \pm 1$.

Phương trình có nghiệm là số dương $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$

BÀI 9. Tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình $4mx > x + 1$ là

a) $x > 9$ b) $x < -5$

Lời giải

Ta có: $4mx > x + 1 \Leftrightarrow (4m-1)x > 1 \quad (1)$

Nếu $m = \dfrac{1}{4}$ thì (1) vô nghiệm.

Nếu $m > \dfrac{1}{4}$ thì nghiệm của (1) là $x > \dfrac{1}{4m-1}$.

Nếu $m < \dfrac{1}{4}$ thì nghiệm của (1) là $x < \dfrac{1}{4m-1}$.

1. Để nghiệm của (1) là $x > 9$, cần và đủ là:

$$\begin{cases} m > \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4m-1} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{4} \\ m = \dfrac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{18}$$

2. Để nghiệm của (1) là $x < -5$, cần và đủ là:

$$\begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4m-1} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ m = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{5}$$

🗁 **BÀI 10.** Có bao nhiêu số tự nhiên n nằm giữa 1 và 2000 sao cho phân số $\dfrac{n^2+7}{n+4}$ không phải là phân số tối giản?

Lời giải

Ta có

$$A=\frac{n^2+7}{n+4}=\frac{(n+4)(n-4)+23}{n+4}=n-4+\frac{23}{n+4}$$

A rút gọn được $\Leftrightarrow 23$ và $n+4$ có ước chung khác $\pm 1 \Leftrightarrow n+4 \vdots 23$, hay nói cách khác $n=23k-4$ với $k\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $1<n<2000 \Leftrightarrow 1<23k-4<2000 \Leftrightarrow \dfrac{5}{23}<k<87\dfrac{3}{23}$. Do $k\in\mathbb{N}^*$ nên k nhận 87 giá trị (là $1,2,3,\ldots,87$). Vậy có 87 số tự nhiên n phải tìm.

🗁 **BÀI 11.** Cho một dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1. Người ta xóa đi một số thì trung bình cộng của các số còn lại bằng $35\dfrac{7}{17}$. Tìm số bị xóa.

Lời giải

Giả sử ta có n số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n.

Nếu xóa số 1 thì trung bình cộng của các số còn lại là

$$\frac{2+3+\cdots+n}{n-1}=\frac{(2+n)(n-1)}{2(n-1)}=\frac{2+n}{2}$$

Nếu xóa số n thì trung bình cộng của các số còn lại là

$$\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n-1}=\frac{n(n-1)}{2(n-1)}=\frac{n}{2}$$

Ta có

$$\frac{n}{2}\le 35\frac{7}{17}\le\frac{n+2}{2}\Leftrightarrow n\le 70\frac{14}{17}\le n+2\Leftrightarrow 68\frac{14}{17}\le n\le 70\frac{14}{17}$$

Do $n\in\mathbb{N}$ nên $n=69$ hoặc $n=70$.

Với $n=70$, tổng của 69 số còn lại là: $35\dfrac{7}{17}\cdot 69\notin\mathbb{N}$, (loại).

Với tổng của 69 số còn lại là: $35\dfrac{7}{17}\cdot 68=2408$.

Số bị xóa là số: $(1+2+\cdots+69)-2048=2415-2408=7$.

🗁 **BÀI 12.** Tìm các số nguyên a và b sao cho: $a^2-2ab+2b^2-4a+7<0$.

Lời giải

Do a và b nguyên, ta cộng 1 vào vế trái của bất phương trình đã cho và được:

$$a^2-2ab+2b^2-4a+8\le 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2-4ab+4b^2-8a+16\le 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-4)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow a=4, b=2$$

Cách khác. Biến đổi thành: $(a-b-2)^2+(b-2)^2<1$.

🗁 **BÀI 13.** Tìm x biết rằng $\left[\dfrac{34x+19}{11}\right]=2x+1$.

✍ Lời giải

Ta có

$$\left[\frac{34x+19}{11}\right]=2x+1\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\dfrac{34x+19}{11}-(2x+1)<1 & (1)\\ 2x+1\in\mathbb{Z} & (2)\end{cases}$$

Giải bất phương trình (1):

$$(1)\ \Leftrightarrow 0\le 12x+8<11$$

$$\Leftrightarrow -8\le 12x<3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3}\le 2x<\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le 2x+1<\frac{3}{2}$$

Theo $(2), 2x+1\in\mathbb{Z}$, do đó $2x+1=0$ hoặc $2x+1=1$. Vậy $x\in\left\{-\dfrac{1}{2};0\right\}$.

$$|x-3|=x+1\ (2)$$

Lại xét hai trường hợp:

Với $x\ge 3,(2)$ có dạng $x-3=x-1$, vô nghiệm.

Với $0\le x<3,(2)$ có dạng $3-x=x-1\Leftrightarrow x=1$, thuộc khoảng đang xét.

2) Xét khoảng $x<0,(1)$ có dạng $|-x-3|=x+1$ tức là $|x-3|=x+1\ (3)$

Bài 3

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI.

1 Tóm tắt lý thuyết

Để giải các phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, cần khử dấu giá trị tuyệt đối.

Ta nhớ lại: Giá trị tuyệt đối của một biểu thức bằng chính nó nếu biểu thức không âm, bằng số đối của nó nếu biểu thức âm:

$$|A|=\begin{cases} A & \text{nếu } A\ge 0 \\ -A & \text{nếu } A\le 0 \end{cases}$$

Do đó, để khử dấu giá trị tuyệt đối, cần xét giá trị của biến làm cho biểu thức không âm hay âm. Nếu biểu thức nằm trong dấu giá trị tuyệt đối là nhị thức bậc nhất, ta cần nhớ định lí sau:

Định lí 1. Đinh lí về dấu của nhị thức bậc nhất $ax+b\left(a\ne 0\right)$

Nhị thức $ax+b\left(a\ne 0\right)$

- Cùng dấu với a với các giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức;
- Trái dấu với a với các giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.

Chứng minh. Gọi x_0 là nghiệm của nhị thức $ax+b\left(a\ne 0\right)$ thì $x_0=-\dfrac{b}{a}$. Xét

$$\frac{ax+b}{a}=x+\frac{b}{a}=x-x_0$$

Nếu $x>x_0$ thì $x-x_0>0\Rightarrow \dfrac{ax+b}{a}>0\Rightarrow ax+b$ cùng dấu với a.

Nếu $x<x_0$ thì $x-x_0<0\Rightarrow \dfrac{ax+b}{a}<0\Rightarrow ax+b$ trái dấu với a.

Chẳng hạn: Xét dấu của nhị thức $-2x+1$ và $x+5$ rồi viết kết quả vào một bảng, ta có:

x		-5		$\frac{1}{2}$	
$-2x+1$	$+$		$+$	0	$-$
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$

2 Một số ví dụ

📖 **Ví dụ 1.** Giải phương trình:

$$|x-5|+|x+3|=3x-1 \qquad (1)$$

Lời giải

Lập bảng xét dấu các nhị thức $x-5$ và $x+3$:

x		-3		5	
$x-5$	-		-	0	+
$x+3$	-	0	+		+

Xét ba khoảng giá trị của biến x:

1) $x<-3$: phương trình (1) có dạng:

$$(5-x)-(x+3)=3x-1$$

tìm được $x=\frac{3}{5}$, loại vì giá trị này không thuộc khoảng đang xét.

2) $-3\le x<5$: phương trình (1) có dạng:

$$(5-x)+(x+3)=3x-1 \Leftrightarrow -3x=-9$$

tìm được $x=3$ thuộc khoảng đang xét.

3) $5<x$: phương trình (1) có dạng:

$$(x-5)+(x+3)=3x-1 \Leftrightarrow -x=1$$

tìm được $x=-1$, không thuộc khoảng đang xét.

Kết luận: $S=\{3\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình:

$$|2x-1|+|2x-5|=4 \quad (1)$$

Lời giải

Cách 1.

1. Xét khoảng $x<\frac{1}{2}$. (1) có dạng:

$$1-2x+5-2x=4$$

tìm được $x=\frac{1}{2}$, không thuộc khoảng đang xét.

2. Xét khoảng $\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{2}$, (1) có dạng:

$$1-2x+5-2x=4 \Leftrightarrow 0x=0$$

Phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng đang xét, tức là

$$\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{2}$$

3. Xét khoảng $x>\frac{5}{2}$,(1) có dạng:

$$2x-1+2x+5=4$$

tìm được $x=\frac{5}{2}$, không thuộc khoảng đang xét.

Kết luận: $S=\left\{x \mid \frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{2}\right\}$.

Cách 2:

Áp dụng hai lần bất đẳng thức $|A|\ge A$ (xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $A\ge 0$), ta có:

$$|2x-1|+|5-2x|\ge(2x-1)+(5-2x)=4$$

Theo đề bài, phải xảy ra đẳng thức, do đó

$$\begin{cases}2x-1\ge 0\\5-2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\x\le\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{2}$$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$||x|-3|=x+1 \quad (1)$$

Lời giải

1. Xét khoảng $X \geq 0, (1)$ có dạng

Lại xét hai trường hợp:

Với $-3 \leq x < 0, (3)$ có dạng $x+3 = x+1$, vô nghiệm.

Với $x < -3, (3)$ có dạng $-x-3 = x+1 \Leftrightarrow x = -2$, không thuộc khoảng đang xét.

Kết luận: $S = \{1\}$.

3 Bài tập tự luyện

BÀI 1. Giải các phương trình

a) $2|x-3| + (5x+1) = 0$;

b) $|x-1| = |x-5|$;

c) $|x-1| = |3x-5|$;

d) $2|x| - |x+1| = 2$

e) $|x-4| + |x+1| = 9$;

f) $|x-3| + |x-5| = 2$

Lời giải

a) Xét $x \geq 3$ ta được $x = 1$ (loại)

Xét $x < 3$ ta được $x = -\dfrac{5}{3}$.

Đáp số: $x = \dfrac{-5}{3}$

b) *Cách 1*. Chia hai trường hợp

$$|x-1| = |x-5|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = x-5 \\ x-1 = 5-x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0x = 4 \\ 2x = 6 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Cách 2. Bình phương hai vế:

$$|x-1|=|x-5| \Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-10x+25$$
$$\Leftrightarrow 8x=24$$
$$\Leftrightarrow x=3$$

c) 2 và $\frac{3}{2}$;

d) -1và 3 ;

e) Xét $x<-1$ ta được $x=-3$. Xét $-1\le x\le 4$, phương trình vô nghiệm.

Xét $x>4$ ta được $x=6$. $S=\{-3;6\}$

f) $3\le x\le 5$.

BÀI 2. Giải các phương trình

a) $|x|-2|x-1|+3|x-3|=4$

b) $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$

c) $|x|-|x-1|+3|x-2|=4$

d) $|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$.

Lời giải

a) $\frac{9}{4}$ và $\frac{9}{2}$

b) -2,

c) $x=4; 0\le x\le 1$

d) Không nên máy móc xét các khoảng giá trị của x. Chú ý vế trước phương trình không âm nên vế phải không âm, do đó $x\ge 0$. Phương trình trở thành $x+1+x+2+x+3=4x$. Từ đó $x=6$. Tập nghiệm $S=\{1;-2\}$.

BÀI 3. Giải các phương trình

a) $|x||x+3|-|x^2+x+1|=1$;

b) $|x|^3-3|x|+2=0$

Lời giải

a) Chú ý rằng $x^2+x+1>0$. Đáp số: $x=1$,

b) Đặt $y=|x|>0$. Đáp số $x=\pm 1$. Tập nghiệm $S=\{1;-2\}$.

BÀI 4. Giải phương trình sau $||x|-1| = x+1$.

Lời giải

Khử dấu giá trị tuyệt đối từ trong ra ngoài: trước hết xét $x \geq 0, x < 0$.

Đáp số: $-1 \leq x \leq 0$.

BÀI 5. Giải các phương trình sau:

a) $|x-4| - x = 2a$ (a là hằng số);

b) $|x-3| + |5-x| = 2a$(a là hằng số).

Lời giải

a) Nếu $x \geq 4$ thì $x-4-x = 2a \Leftrightarrow 0x = a+2$.

Nếu $a \neq -2$: vô nghiệm.

Nếu $a = -2$: vô số nghiệm $(x \geq 4)$.

Nếu $x < 4$ thì $4-x-x = 2a \Leftrightarrow x = 2-a$,

ta phải có $2-a < 4 \Leftrightarrow a > -2$

Kết luận: Nếu $a > -2$ thì $x = 2-a$; nếu $a = -2$: vô số nghiệm $x \geq 4$; nếu $a < -2$: vô nghiệm.

b) Nếu $a = 1$ thì $3 \leq x \leq 5$.

Nếu $a > 1$ thì $x_1 = 4-a, x_2 = 4+a$

Nếu $a < 1$ thì vô nghiệm.

BÀI 6. Giải phương trình sau:

$$2|x+a| - |x-2a| = 3a \text{ (}a\text{ là hằng số).}$$

Lời giải

Nếu $a > 0$ thì $-a < 2a$. Xét các trường hợp $x < -a, -a \leq x \leq 2a, x > 2a$ ta được các nghiệm: $x = -7a, x = a$

Nếu $a \leq 0$ thì $2a \leq -a$. Xét các trường hợp $x < 2a, 2a \leq x \leq -a, x > -a$ ta được nghiệm: $x = -a$.

Bài 4

BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI.

1 Tóm tắt lý thuyết

Để giải bất phương trình loại này, ta cũng khử dấu giá trị tuyệt đối như với phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

2 Một số ví dụ

📖 **Ví dụ 1.** Giải bất phương trình:

$$|x| - x + 2 \leq 2|x-4| \qquad (1)$$

Lời giải

Lập bảng xét dấu các biểu thức x và $x-4$

Để giải bất phương trình loại này, ta cũng khử dấu giá trị tuyệt đối như với phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

x			0		4	
x	$-$		0	$+$		$+$
$x-4$	$-$			$-$	0	$+$

1. Xét khoảng $x<0$, (1) có dạng:

$$-x-x+2 \leq 2(4-x) \Leftrightarrow 0x \leq 6$$

nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng đang xét $x<0$.

2. Xét khoảng $0 \leq x < 4$, (1) có dạng:

$$x-x+2 \leq 8-2x \Leftrightarrow x \leq 3$$

Nghiệm của bất phương trình (1) thuộc khoảng đang xét $0 \leq x \leq 3$.

3. Xét khoảng $x \geq 4$, (1) có dạng:

$$x - x + 2 \le 2x - 8 \Leftrightarrow x \ge 5$$

thỏa mãn điều kiện $x \ge 4$.

Kết luận: Nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \le 3; x \ge 5$.

Nhận xét. *Trong cách giải trên, ta khử dấu giá tri tuyệt đối bằng cách xét từng khoảng giá trị của biến. Trong một số trường hợp, có thể giải nhanh hơn cách phương pháp chung nói trên bởi các biến đổi tương đương sau:*

Dạng 1:

1. Với a dương. Ta có $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a.2)$

2. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$.

Dạng 2:

1. Với a là số dương ta có:

$$|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -a \\ f(x) > a \end{array}\right.$$

2. Đối với hàm $g(x)$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{array}\right.$$

Dạng 3:

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow |f(x)|^2 > |g(x)|^2.$$

🕮 **Ví dụ 2**. Giải bất phương trình:

$$|x| - x + 2 \le 2|x - 4| \qquad (1)$$

Lời giải

Cách 1:

1. Xét khoảng $x < \frac{1}{2}$, (1) có dạng:

$3(1 - 2x) < 2x + 1$

$\Leftrightarrow 3 - 6x < 2x + 1$

$\Leftrightarrow -8x < -2$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{1}{4}$

Nghiệm của bất phương trình thuộc khoảng này là $\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{2}$.

2. Xét khoảng $x \geq \dfrac{1}{2}$, (1) có dạng:

$3(2x-1) < 2x+1$

$\Leftrightarrow 6x-3 < 2x+1$

$\Leftrightarrow 4x < 4$

$\Leftrightarrow x < 1$

Nghiệm của bất phương trình thuộc khoảng này $\dfrac{1}{2} \leq x < 1$

Kết luận: Nghiệm của bất phương trình đã cho là $\dfrac{1}{4} < x < 1$.

Cách 2: Biến đổi thành bất phương trình tương đương theo dạng 1b)

$$3|1-2x| < 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2x-1) > -(2x+1) \\ 3(2x-1) < 2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-3 > -2x-1 \\ 6x-3 < 2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x > 2 \\ 4x < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{4} \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < x < 1. \square$$

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

$$a)\,|3x-2| < 4;\ \ b)\,|3-2x| < x+1$$

Lời giải

a) $-\frac{2}{3}<x<2$; b) $\frac{2}{3}<x<4$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

$$a)\left|3x-1\right|>5; \qquad b)\left|x^3+1\right|\ge x+1$$

Lời Bài

a) $x<\frac{-4}{3}; x>2$ b) $x\le 0; x\ge 1$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

$$a)\left|x+1\right|>\left|x-2\right|; \qquad b)\ |x-1|>|x+2|-3;$$

Lời giải

a) $x>\frac{1}{2}$

$b)\ x<1$

Bài 4. Giảicác bất phương trình sau:

$$a)\ |x-1|+|x-5|>8; \quad b)\ |x-3|+|x+1|<8;$$

Lời giải

a) $x<-1; x>7$ $b)-3<x<5$

Bài 5

BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH. BẤT PHƯƠNG TRÌNH THƯƠNG

1 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $x^2-2x+1<9$.

Lời giải

Cách 1:

$x^2-2x+1<9 \Leftrightarrow (x-1)^2<9$

$\Leftrightarrow |x-1|<3$

$\Leftrightarrow -3<x-1<3$

$\Leftrightarrow -2<x<4$

Cách 2 :Biến đổi thành bất phương trình dạng tích:

$x^2-2x-8<0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4)<0$

Lập bảng xét dấu các nhị thức $x+2$ và $x-4$:

x		2		4	
$x+2$	-	0	+		+
$x-4$	-		-	0	+

Nghiệm của bất phương trình đã cho là: $-2<x<4$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $\dfrac{1-5x}{x-1}\geq 1$.

Điều kiện xác định: $x\neq 1$.

Lời giải

$\dfrac{1-5x}{x-1}\geq 1 \quad \Leftrightarrow \dfrac{1-5x}{x-1}-1\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-5x-x+1}{x-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-6x}{x-1} \geq 0$

Lập bảng xét dấu

x		$\frac{1}{3}$		1	
$1-3x$	$+$	0	$-$	|	$+$
$x-1$	$-$	|	$-$	0	$+$
$\frac{1-3x}{x-1}$	$-$	0	$+$	||	$-$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\dfrac{1}{3} \leq x < 1$ □

2 Bài tập tự luyện

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $4x^2 - 4x + 1 > 9$ b) $\left(x^3-27\right)\left(x^3-1\right)\left(2x+3-x^2\right) \geq 0$

c) $\dfrac{x^3-4x^2+5x-20}{x^3-x^2-10x-8} > 0$ d) $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1} > \dfrac{x^2+4x+5}{x+2} - 1$

Lời giải

a) Cách 1. Biến đổi bất phương trình tích

$4(x+1)(x-2) > 0$

Cách 2 .Đưa bất phương trình về dạng

$|2x-1| > 3$

Đáp số: $x > 2; x < -1$.

b) Hai nghiệm $-1, 3$.

c) $x < -2; -1 < x < 4; x > 4$

d) $x < 2; x > -1$

Bài 2. Tìm điều kiện của x để biểu thức sau có giá trị âm: $A = \left(\dfrac{1-x}{x+3} - \dfrac{x+3}{x-1}\right) : \left(\dfrac{x+3}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+3}\right)$

Lời giải

$A=-\dfrac{x^2+2x+5}{4(x+1)}$;

$A<0 \Leftrightarrow x>-1$ đồng thời $x\neq 1$ □

Bài 3. Tìm điều kiện của x và y để biểu thức sau có giá trị dương:

$$A=\left(\frac{x^2-xy}{y^2+xy}+\frac{x^2-y^2}{x^2+xy}\right):\left(\frac{y^2}{x^3-xy^2}+\frac{1}{x-y}\right)$$

Lời giải

$A=\dfrac{(x-y)^2}{y}$; $A>0 \Leftrightarrow y>0; x\neq 0, x\neq y$

Bài 4. Tìm điều kiện của x và y để biểu thức sau lớn hơn 1:

$$A=\left(\frac{x}{y^2+xy}+\frac{x-y}{x^2+xy}\right):\left(\frac{y^2}{x^3-xy^2}+\frac{1}{x-y}\right):\frac{x}{y}.$$

Lời giải

$A=\dfrac{x-y}{x}=1-\dfrac{y}{x}$ $A>1 \Leftrightarrow xy<0; x+y\neq 0$

Bài 5. Tìm điều kiện của x để biểu thức sau lớn hơn 1: $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}$

Lời giải

$2<x<3$

Bài 6. Tìm điều kiện của m để phương trình sau có nghiệm âm: $\dfrac{2}{x-1}=4-m$

Lời giải

Nghiệm của phương trình: $x-\dfrac{6-m}{4-m}$ với $m\neq 4$.

Phương trình có nghiệm âm, vậy $4<m<6$.

Bài 6

CHUYÊN ĐỀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1 Tóm tắt lý thuyết

A. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Ngoài các tính chất của bất đẳng thức được nêu ở §11, ta còn sử dụng các tính chất sau:

1. Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều, được bất đẳng thức mới cùng chiều với các bất đẳng thức đã cho:

$$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

Chú ý: Không được trừ từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều.

2. Trừ từng vế của hai bất đẳng thức ngược chiều được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức bị trừ:

$$a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d$$

3. Tính chất đơn điệu của phép nhân

1. Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương:

$$a > b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c.$$

2. Nhân hai vế của bất đửng thức với cùng 1 số âm và đổi chiều của bất đẳng thức:

$$a > b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

4. Nhân hai vế của bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm $a > b \geq 0, c > d \geq 0 \Rightarrow ac > bd$

5. Nâng lên lũy thừa bậc nguyên dương hai vế của bất đẳng thức:

$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$;

$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ với n lẻ;

$|a| > |b| \Leftrightarrow a^n > b^n$ với n chẵn.

6. So sánh hai lũy thừa cùng cơ số với số mũ nguyên dương:

Nếu $m > n > 0$ thì $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$;

$a = 1 \Rightarrow a^m = a^n$;

$0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$.

7. Lấy nghịch đảo hai vế và đổi chiều của bất đẳng thức nếu hai vế cùng dấu:

$a > b, a \cdot b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$(xem bài 325$a$);

Chú ý: Ngoài các bất đẳng thức chặt, chẳng hạn $a > b$, ta còn gặp các bất đang thức không chăt, chẳng han $a \geq b$ (tức là $a > b$ hoăc $a = b$). Trong các tính chất trên, nhiều dấu $>$ (hoặc $<$) có thể thay bởi dấu $\geq$ (hoăc $\leq$).

B. CÁC HẰNG BẤT ĐẲNG THỨC

1. Ngoài các hằng bất đẳng thức $a^2 \geq 0; -a^2 \leq 0$, cần nhớ các hằng bất đẳng thức liên quan đến giá trị tuyệt đối:

$|a| \geq 0$. Xảy ra đẳng thức khi $a = 0$;

$|a| \geq a$. Xảy ra đẳng thức khi $a \geq 0$; $|a+b| \leq |a| + |b|$. Xãy ra đẳng thức khi $ab \geq 0$;
$|a-b| \geq |a| - |b|$. Xãy ra đẳng thức khi $ab > 0$ và $|a| > |b|$ (các điều kiện này còn có thể diễn đạt là $a \geq b \geq 0$ hoặc $a \leq b \leq b \leq 0$).

Chứng minh bất đẳng thức $|a+b| \leq |a| + |b|$ như sau:

$|a+b| \leq |a| + |b| \; (1)$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2$ (vì hai vế của (1) không âm) Bất đẳng thức (2) đúng, vậy (1) là

$\Leftrightarrow ab \leq |ab| \; (2)$ đúng.

Chứng minh bất đẳng thức $|a-b| \geq |a| - |b| \quad (3)$ như sau:

Nếu $|a| < |b|$ thì (3) hiển nhiên đúng Nếu $|a| \geq |b|$ thì (3) tương đương với:

$|a-b|^2 \geq (|a| - |b|)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow |ab| \geq ab$

Bất đẳng thức (4) đúng, vậy (3) đúng.

2. Cũng cần nhớ thêm một số hằng bất đẳng thức khác để khi giải toán có thể sử dụng chúng như một bổ đề, chẳng hạn:

$a^2 + b^2 \geq 2ab$;

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ hay $(a+b)^2 \geq 4ab$ (bất đẳng thức Cô - si); $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với $a, b > 0$ (ví dụ 77);

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với $a, b < 0$ (bài 325).

$\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) \geq (ax + by)^2$ (bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, xem bài 324)

C. CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

2 Một số ví dụ

1. Dùng định nghĩa

Để chứng minh $A > B$, ta xét hiệu $A - B$ và chứng minh rằng $A - B$ là số dương

Ví dụ 88 Chứng minh rằng: $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq -1$

Lời giải

Xét hiệu $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-(-1)=\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-5x+6\right)+1$.

Đặt $x^2-5x+5=y$, biểu thức trên bằng $(y-1)(y+1)+1=y^2 \geq 0$.

Vậy $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq -1$.

Ví dụ 89 Cho các số dương a và b thỏa mãn điều kiện $a+b=1$. Chứng minh rằng:
$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9$

Lời giải

Ta có

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+1}{a}\cdot\frac{b+1}{b} \geq 9 \Leftrightarrow ab+a+b+1 \geq 9ab(\text{ vì } ab>0)$$

$$\Leftrightarrow a+b+1 \geq 8ab \Leftrightarrow 2 \geq 8ab(\text{ vì } a+b=1)$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab(\text{ vì } a+b=1)$$

Bất đẳng thức (2) đúng, mà các phép biến đổi trên tương đương, vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b$. Cách giải khác

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\left(1+\frac{a+b}{a}\right)\left(1+\frac{a+b}{b}\right)=\left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right).$$

Thực hiện phép nhân và chú ý rằng $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ do $a>0, b>0$. □

Khi sử dụng phép biến đổi tương đương, cần chú ý các biến đổi tương đương có điều kiện, chẳng hạn: $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$ với $a, b > 0$

$m > n \Leftrightarrow a^m > a^n$ với m, n nguyên dương, $a > 1$.

Cần chỉ rõ các Điều kiện ấy khi biến đổi tương đương.

Ví dụ 90 Cho $a + b > 1$. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 > \frac{1}{8}$

3. Dùng các tính chất của bất đẳng thức

Lời giải

Ta có $a + b > 1 > 0 \quad (1)$

Bình phương hai vế $(a+b)^2 > 1 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 > 1 \quad (2)$

Mặt khác $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad (3)$

Cộng từng vế của (2) và (3) :

$$2\left(a^2 + b^2\right) > 1 \Rightarrow a^2 + b^2 > \frac{1}{2} \quad (4)$$

Bình phương hai vế của (4) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 > \frac{1}{4} \quad (5)$

Mặt khác $\left(a^2 - b^2\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 \quad (6)$

Cộng từng vế của (5) và (6) :

$$2\left(a^4 + b^4\right) > \frac{1}{4} \Rightarrow a^4 + b^4 > \frac{1}{8}$$

Ví dụ 91 Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$ (xảy ra đẳng thức khi $x = y$), ta có: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{a}{c}$.

Tương tự $\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{a}$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2 \cdot \frac{c}{b}$$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên :

$$2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}.$$

Ví dụ 92 Chứng minh các bất đẳng thức với a,b,c là các số dương

$a)$ $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9;$ $b)$ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge 1,5$

a). Ta có:

Lời giải

$$A=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$$

Để chứng minh $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ với $x,\ y$ dương (bài 325)

Do đó $A\ge 3+2+2+2=9$. Vậy $A\ge 9$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge\ 9$ trong đó $x,y,z>0$.

Với $x=b+c, y=a+c, z=a+b$ ta được:

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9\Rightarrow\ (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 4,5$$

$$\Rightarrow\ \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge 4,5\Rightarrow\ \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge 1,5.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 93 Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Lời giải

Xét $\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c-a}$ và chú ý rằng các mẫu đều dương, áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$

với $x, y > 0$ (ví dụ 77), ta được:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\ge\frac{4}{2b}=\frac{2}{b}.$$

Tương tự $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{2}{c}$.

$$\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\ge\frac{2}{a}.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên rồi chia cho 2 ta được điều phải chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi $a=b=c$.

Ví dụ 94. Cho $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz \ (1)$$

Lời giải

Hai vế của (1) đều không âm nên để chứng minh (1), ta sẽ chứng minh rằng

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\ge 64x^2y^2z^2.$$

Ta có

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &\ge 4xy\\ (y+z)^2 &\ge 4yz\\ (z+x)^2 &\ge 4zx.\end{aligned}$$

Hai vế của ba bất đẳng thức trên đều không âm, nhân từng vế ta được:

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\ge 64x^2y^2z^2$$

$$\Rightarrow\left[(x+y)(y+z)(z+x)\right]^2\ge(8xyz)^2.$$

Các biểu thức trong dấu ngoặc vuông không âm nên

$$(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=z$.

4. Dùng phương pháp phản chứng

Ví dụ 95. Cho $a^2+b^2\le 2$. Chứng minh rằng $a+b\le 2$.

Lời giải

Giả sử $a+b>2$, bình phương hai vế (hai vế đều dương), ta được:

$$a^2+2ab+b^2>4. \qquad (1)$$

Mặt khác ta có

$$2ab\le a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2+2ab\le 2\left(a^2+b^2\right)$$

mà $2\left(a^2+b^2\right)\le 4$ (giả thiết), do đó

$$a^2+2ab+b^2\le 4 \qquad (2)$$

mâu thuẫn với (1).

Vậy phải có $a+b\le 2$.

Cách giải khác. Ta có

$$a^2+b^2\le 2 \qquad (1)$$

Mặt khác $2ab\le a^2+b^2$ nên

$$2ab\le a^2+b^2\le 2 \qquad (2)$$

Cộng (1) với (2):

$$a^2+2ab+b^2\le 4\Rightarrow (a+b)^2\le 4\Rightarrow -2\le a+b\le 2.$$

D. BẤT ĐẲNG THỨC VỚI SỐ TỰ NHIÊN

Ví dụ 96. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 2$ ta có

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{4}.$$

Lời giải

Gọi A là vế trái của bất đẳng thức trên. Ta sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức dưới dạng phương pháp làm trội: để chứng minh $A<B$, ta làm trội A thành $C(A<C)$ rồi chứng minh rằng $C\le B$ (biểu thức C đóng vai trò trung gian để so sánh A và B). Làm trội mỗi phân số ở A bằng cách làm giảm các mẫu, ta có:

$$\frac{1}{k^3}<\frac{1}{k^3-k}=\frac{1}{k\left(k^2-1\right)}=\frac{1}{(k-1)k(k+1)}.$$

Do đó:

$$A < \frac{1}{2^3-2} + \frac{1}{3^3-3} + \dots + \frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$

Đặt $C = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$, nhận xét rằng :

$$\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2}{(n-1)n[n+1)}$$

$$\text{nên } C = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-2} - \frac{1}{2-3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{4}.$$

Vậy $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{4}$

∗ Khi làm trội một biểu thức, có trường hợp ta phải chia biểu thức thành nhiều nhóm rồi làm trội trong từng nhóm. Xét ví dụ sau

Ví dụ 97. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$, ta có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n$$

Lời giải

Gọi vế trái của bất đẳng thức trên là A, ta có:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}\right)$$

Ở mỗi nhóm ta làm trội bằng cách thay các phân số bởi phân số lớn nhất trong nhóm, ta được:

$$A < 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2^2}\cdot 4 + \frac{1}{2^3}\cdot 8 + \dots \frac{1}{2^{n-1}}\cdot 2^{n-1} = 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

E. VÀI ĐIỂM CHÚ Ý KHI CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Chú ý 1. Khi chứng minh bất đẳng thức, nhiều khi ta cần đổi biến

Ví dụ 98. Cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}$$

Lời giải

Đặt $a=\frac{1}{3}+x,\ b=\frac{1}{3}+y,\ c=\frac{1}{3}+z$. Do $a+b+c=1$ nên $x+y+z=0$. Ta có

$$a^2+b^2+c^2=\left(\frac{1}{3}+x\right)^2+\left(\frac{1}{3}+y\right)^2+\left(\frac{1}{3}+z\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x+x^2\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}y+y^2\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}z+z^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x+y+z)+x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}$$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow x=y=z=0\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 99. Chứng minh bất đẳng thức

$$abc\ge(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

Lời giải

Cách 1. Đặt $b+c-a=x$, $a+c-b=y$, $a+b-c=z$ thì $x,\ y,\ z>0$. Theo bất đẳng thức $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$ (ví dụ 94) ta có:

$$2a\cdot 2b\cdot 2c\ge 8(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

$$\Rightarrow abc\ge(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2. Ta có

$$(b+c-a)(b+a-c)=b^2-(c-a)^2\le b^2$$
$$(c+a-b)(c+b-a)=c^2-(a-b)^2\le c^2$$
$$(a+b-c)(a+c-b)=a^2-(b-c)^2\le a^2.$$

Nhân từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$\left[(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\right]^2\le(abc)^2$$

Các biểu thức trong dấu ngoặc vuông đều dương nên

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\le abc$$

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

Chú ý 2. Với các bất đẳng thức mà các biến có vai trò như nhau, ta có thể sắp thứ tự các biến.

Ví dụ 100. Chứng minh bất đẳng thức được nêu ở ví dụ 99:

$$a \quad , \quad b \quad , \quad c \qquad (1)$$

Trong đó điều kiện a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác được thay bởi a,b,c là các số dương.

Lời giải

Cách 1: Do vai trò của a,b,c ngang nhau, ta giả sử rằng $a \ge b \ge c$. Xét hai trường hợp:

a) $b+c \le a$. Khi đó vế trái của (1) là số dương, còn vế phải không dương. Bất đẳng thức được chứng minh .

b) $b+c > a$. Khi đó hai vế của (1) đều dương. Giải tiếp như ví dụ 99 .

Cách 2: Trong ba số $b+c-a,\ a+c-b,\ a+b-c$, không có quá một số âm. Thật vậy, chẳng hạn $b+c-a<0,\ a+c-b<0$ thì $2c<0$, trái với giả thiết.

Nếu đúng một số âm thì vế phải của (1) là số âm, bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng.

Nếu không có số nào âm thì vế phải của (1) là số dương. Giải tiếp như ví dụ 99 .

Chú ý 3. Khi chứng minh bất đẳng thức, trong nhiều trường hợp ta cần xét từng khoảng giá trị của biến.

Ví dụ 101. Chứng minh rằng

$$x^8 - x^7 + x^2 - x + 1 > 0$$

Lời giải

Gọi A là vế trái của bất đẳng thức.

Cách 1:

Nếu $x \ge 0$ thì ta viết A dưới dạng $x^7(x-1)+x(x-1)+1$. Do $x \ge 0$ nên $A>0$.

Nếu $x<1$ thì ta viết A dưới dạng $x^8+x^2(1-x^5)+(1-x)$. Do $x<1$ nên $a-x^5>0$, do đó $A>0$.

Cách 2:

$$A = x^7(x-1)-(x-1)+x^2 = (x-1)(x^7-1)+x^2$$

Nếu $x \ge 1$ thì $x^7 \ge 1$, do đó $(x-1)(x^7-1) \ge 0$, còn $x^2>0$ nên $A>0$

Nếu $x<1$ thì $x^7<1$, do đó $(x-1)(x^7-1)>0$, còn $x^2\geq 0$ nên $A>0$

D. ÁP DỤNG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Có nhiều trường hợp để giải phương trình $f(x,y\ldots)=0$, ta lại chứng minh bất đẳng thức $f(x,y\ldots)\geq 0$ hoặc $f(x,y\ldots)\leq 0$ và chỉ ra điều kiện cần và đủ để xảy ra đẳng thức.

🕮 **Ví dụ 102.** Giải phương trình

$$x^2+y^2+z^2=x(y+z)$$

Lời giải

Trước hết, ta chứng minh rằng

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+xz \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+y^2+z^2\geq 0 \qquad (2)$$

Xảy ra đẳng thức ở (2), tức là ở (1), khi và chỉ khi $x=y=z=0$. Đó là nghiệm của phương trình.

** Chú ý: Cũng có thể biến đổi phương trình đã cho thành:*

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+y^2+z^2=0$

$\Leftrightarrow x=y=z=0$

3 Bài tập tự luyện

Chứng minh bất đẳng thức

Chứng minh các bất đẳng thức (từ bài 358 đến bài 371):

🗁 **Bài 358.**

a) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca;$

b) $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 4abcd$.

Lời giải

a) Ta có: $a^2+b^2\geq 2ab,\ b^2+c^2\geq 2bc,\ c^2+a^2\geq 2ca$. Cộng từng vế các bất đẳng thức trên.

b) Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2\ge 2xy$, ta có:

$a^4+b^4\ge 2a^2b^2$; $c^4+d^4\ge 2c^2d^2$

Do đó: $a^4+b^4+c^4+d^4\ge 2\left[(ab)^2+(cd)^2\right]\ge 2\cdot 2abcd=4abcd$.

Bài 359.

a) $a^4+b^4+c^4\ge abc\left(a+b+c\right)$;

b) $a^8+b^8+c^8\ge a^2b^2c^2\left(ab+bc+ca\right)$.

Lời giải

a) Áp dụng $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ (câu a) $\quad(1)$

Ta có:

$a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

Lại áp dụng (1), ta có:

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge ab^2c+bc^2a+a^2bc=abc\left(a+b+c\right)$

b) Giải tương tự câu a)

Bài 360.

a) $a^2+b^2\ge ab$;

b) $x^2+xy+y^2\ge 0$

c) $a\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(a+b+c\right)+b^2c^2\ge 0$

Lời giải

a) *Cách 1:* $a^2+b^2-ab=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}\ge 0$

Cách 2: $a^2+b^2-ab\ge 0\Leftrightarrow 2a^2+2b^2-2ab\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2+a^2+b^2\ge 0$.

Cách 3: Ta có: $a^2+b^2\ge 2ab,\ a^2+b^2\ge 0$. Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên rồi chia cho 2 .

b) Giải tương tự câu a).

c)

$A=a\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(a+b+c\right)+b^2c^2$

$\quad=\left(a^2+ab+ac\right)\left(a^2+ab+ac+bc\right)+b^2c^2$

Đặt $a^2+ab+ac=m,\ bc=n$ thì $A=m\left(m+n\right)=m^2+mn+n^2\ge 0$.

Bài 361.

a) $\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)\ge\left(a^3+b^3\right)^2$;

b) $(a+b)\left(a^3+b^3\right)\le 2\left(a^4+b^4\right)$.

Lời giải

a) Biến đổi tương đương thành $a^2b^2(a-b)^2\ge 0$.

b) Biến đổi tương đương thành $0\le(a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Bài 362.

a) $2\left(a^3+b^3\right)\ge(a+b)\left(a^2+b^2\right)$ với $a,b>0$;

b) $4\left(a^3+b^3\right)\ge(a+b)^3$ với $a,b>0$.

Lời giải

a) Chia hai vế cho số dương $a+b$. Biến đổi tương đương thành $(a-b)^2\ge 0$

b) Hiệu:

$$4\left(a^3+b^3\right)-(a+b)^3=(a+b)\left[4\left(a^2-ab+b^2\right)-(a+b)\right]$$

$$=3(a+b)(a-b)^2\ge 0$$

Bài 363. $a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)$ với $a,b,c>0$.

Lời giải

Hiệu: $a^3+b^3+abc-ab(a+b+c)=(a+b)(a-b)^2\ge 0$.

Bài 364.

a) $8\left(a^4+b^4\right)\ge(a+b)^4$;

b) $\left(a^2+b^2\right)^2\ge ab(a+b)^2$.

Lời giải

a) Từ $a^4+b^4\ge 2a^2b^2$, cộng a^4+b^4 vào hai vế được:

$$a^4+b^4\ge\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)^2$$

Tương tự $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}(a+b)^2$. Từ đó suy ra $a^4+b^4\ge\frac{1}{8}(a+b)^4$.

b) Xét hiệu $\left(a^2+b^2\right)^2-ab(a+b)^2$ được

$$a^4-a^3b+b^4-ab^3=a^3(a-b)-b^3(a-b)=(a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right)\ge 0$$

Bài 365.

a) $a^2+b^2+c^2\ge a(b+c)$;

b) $a^2+b^2+c^2+d^2\ge a(b+c+d)$.

Lời giải

a) $a^2+b^2+c^2\ge a(b+c)$

$\Leftrightarrow 2a/62+2b^2+2c^2\ge 2ab+2ac$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+b^2+c^2\ge 0.$

b) $a^2+b^2+c^2+d^2\ge ab+ac+ad$

$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2\ge 4ab+4ac+4ad$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+a^2\ge 0$

Bài 366.

a) $x^4-4x+5>0$

b) $x^4-x+\frac{1}{2}>0$

Lời giải

a) $x^4-4x+5=x^4-4x^2+4+4x^2-4x+1=\left(x^2-2\right)^2+(2x-1)^2\ge 0$.

Không xảy ra đẳng thức. Do đó $x^2-4x+5>0$

b) $x^4-x+\frac{1}{2}=x^4-x^2+\frac{1}{4}=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$.

Không xảy ra đẳng thức. Do đó $x^4-x+\frac{1}{2}>0$.

Bài 367.

a) $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4}\ge a+b+c;$

b) $a^4+b^4+2\ge 4ab$

Lời giải

a) $\left(a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4}\right)-(a+b+c)=\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)+\left(b^2-b+\frac{1}{4}\right)+\left(c^2-c+\frac{1}{4}\right)$

$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$$

b) $a^4+b^4+2-4ab=a^4+b^4-2a^2b^2+2a^2b^2-4ab+2$

$$=\left(a^2-b^2\right)^2+2(ab-1)^2\ge 0$$

Bài 368. $x^3+4x+1>3x^2$ với $x\ge 0$.

Lời giải

$x^3+4x+1-3x^2=x(x-2)^2+x^2+1>0$ (vì $x\ge 0$).

Bài 369.

a) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+9\ge 0$

b) $a^2+4b^2+4c^2\ge 4ab-4ac+8bc$.

Lời giải

a) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+9=\left(x^2-7x+6\right)\left(x^2-7x+12\right)+9$

Đặt $x^2-7x+9=a$, biểu thức trên bằng:

$(a-3)(a+3)+9=a^2\ge 0$

b) $\left(a^2+4b^2+4c^2\right)-\left(4ab-4ac+8bc\right)$

$=\left(a^2-4ab+4b^2\right)+4c^2+\left(4ac-8bc\right)$

$=(a-2b)^2+4c^2+4c\left(a-2b\right)$

$=(a-2b+2c)^2\ge 0$

Bài 370. $\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}\right)^2\ge (a+c)(b+d)$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2\ge 4xy$ ta được:

$$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)^2=\frac{[(a+c)+(b+d)]^2}{4}\ge (a+c)(b+d)$$

Bài 371.

a) $8\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$ với $a,b,c>0$.

b) $(a+b+c)^3\ge a^3+b^3+c^3+24abc$ với $a,b,c\ge 0$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $4x^3+4y^3\ge (x+y)^3$ với $x,y>0$ (bài 363 b), ta được:

$4a^3+4b^3\ge (a+b)^3$ $4b^3+4c^3\ge (b+c)^3$, $4c^3+4a^3\ge (c+a)^3$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

b) $(a+b+c)^3\ge a^3+b^3+c^3+24abc$

$\Leftrightarrow (a+b)\left(ab+bc+ca+c^2\right)\ge 8abc$ (bạn đọc tự biến đổi)

$\Leftrightarrow a^2b+a^2c+ac^2+ab^2+b^2c+bc^2-6abc\ge 0$ (bạn đọc tự biến đổi)

$\Leftrightarrow \left(a^2c+bc^2-2abc\right)+\left(a^2c+b^2-2abc\right)+\left(ac^2+ab^2-2abc\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow b(a-c)^2+c(a-b)^2+a(b-c)^2\ge 0$

Bài 372 . Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $ab+bc+ca\le 0$.

Lời giải

$a+b+c=0\Rightarrow (a+b+c)^2=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)=0$

$\Rightarrow ab+bc+ca\le 0.$

Bài 373. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2+c^2<2\left(ab+bc+ca\right)$

b) $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{a+c-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\ge 3;$

c) $\dfrac{1}{a+b},\ \dfrac{a}{b+c},\ \dfrac{1}{c+a}$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

a) Nhân hai vế của $a<b+c$ với số dương a, ta được $a^2<ab+ac$.

Tương tự $b^2<ba+bc;\ c^2<ca+cb$. Cộng từng vế các bất đẳng thức trên.

b) Đặt $b+c-a=x,\ c+a-b=y,\ a+b-c=z$ thì $2a=y+z,\ 2b=x+z,\ 2c=x+y$. Ta có:

$$\frac{2a}{b+c-a}+\frac{2b}{a+c-b}+\frac{2c}{a+b-c}=\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\ge 6$$

Suy ra điều phải chứng minh.

c) Ta có $a+b>c,\ b+c>a,\ a+c>b$

Xét

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+a}=\frac{2}{a+b+c}>\frac{2}{a+b+a+b}=\frac{1}{a+b}$$

Tương tự $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}>\dfrac{1}{b+c},\ \dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}>\dfrac{1}{a+c}$.

Bài 374.

a) Cho các số dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)\ge 8$

b) Cho các số a và b không âm. Chứng minh rằng

$(a+b)(ab+1) \geq 4ab$

Lời giải

a) Nhân từng vế các bất đẳng thức $(a+1)^2 \geq 4a,\ (b+1)^2 \geq 4b,\ (c+1)^2 \geq 4c$.

b) Nhân từng vế các bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab,\ (ab+1)^2 \geq 4ab$.

Bài 375. Cho các số dương a,b,c,d có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd \geq 6$$

Lời giải

Ta có: $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd \geq 2ab+2cd+ab+cd = 3(ab+cd)$.

Ta lại có $ab+cd = ab+\dfrac{1}{ab} \geq 2$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 376. Cho các số dương a và b thỏa mãn $a^3+b^3 = a-b$. Chứng minh rằng:

$a^2+b^2+ab<1$

Lời giải

Theo đề bài: $a-b = a^3+b^3$, mà $a^3+b^3 > a^3-b^3$ (do $b>0$) nên $a-b > a^3-b^3$. Chia hai vế cho $a-b$ (chú ý rằng $a-b>0$ vì $a-b = a^3+b^3 > 0$).

Bài 377. Chứng minh các bất đẳng thức sau bằng cách xét từng khoảng giá trị của biến:

(1) $A = x^4+x^3+x^2+x+1 > 0$

(2) $C = x^8-x^7+x^4-x+1 > 0$

Lời giải

a) *Cách* 1: Nếu $A(x-1) = x^5-1$. Ta biết rằng nếu $x>1$ thì $x^5>1$, nếu $x<1$ thì $x^5<1$. Do đó:

- Nếu $x>1$ thì $\dfrac{x^5-1}{x-1} > 0 \Rightarrow A>0$

- Nếu $x<1$ thì $\dfrac{x^5-1}{x-1} > 0 \Rightarrow A>0$

- Nếu $x=1$ thì hiển nhiên $A>0$.

Cách 2 :

$A = x^4+x^3+x^2+x+1 = x^3(x+1)+(x+1)+x^2$

$$= (x+1)(x^3+1)+x^2 = (x+1)^2(x^2-x+1)+x^2 \geq 0.$$

Dấu "=" không xảy ra.

b) Giải tương tự ví dụ 101. Xét $x \ge 1$ và $x < 1$.
Giải các bài từ 378 đến 384 bằng phương pháp phản chứng.

BÀI 378. Chứng minh rằng nếu $a+b+c>0$, $abc>0$, $ab+bc+ca>0$ thì $a>0$, $b>0$,

Lời giải

Giả sử $a \le 0$:

Nếu $a=0$ thì trái với $abc>0$.

Nếu $a<0$: Do $a+b+c>0$ nên $b+c>0$. Do $abc>0$ nên $bc<0$.

Suy ra $a(b+c)+bc<0$, mâu thuẫn với $ab+bc+ca>0$.

Vậy $a>0$. Tương tự, $b>0$, $c>0$.

BÀI 379. Chứng minh rằng nếu $a \ge 3$, $b \ge 3$, $a^2+b^2 \ge 25$ thì $a+b \ge 7$. Ví dụ:

Lời giải

Đặt $a=3+x$, $b=3+y$ thì $x \ge 0$, $y \ge 0$. Ta có $a+b=6+(x+y)$. Ta sẽ chứng minh $x+y \ge 1$.

Giả sử $0 \le c+y<1$ thì $x^2+2xy+y^2<1$ nên $x^2+y^2<1$ (do $2xy \ge 0$).

Khi đó $a^2+b^2=(3+x)^2+(3+y)^2=18+6(x+y)+\left(x^2+y^2\right)<18+6+1=25$.

Trái với giả thiết $a^2+b^2 \ge 25$.

Vậy $x+y \ge 1$, suy ra $a+b \ge 7$.

BÀI 380. Cho ba số a, b, c khác nhau đôi một. Chứng minh rằng tồn tại một trong các số $9ab$, $9bc$, $9ca$ nhỏ hơn $(a+b+c)^2$.

Lời giải

Giả sử $9ab \ge (a+b+c)^2$, $9bc \ge (a+b+c)^2$, $9ca \ge (a+b+c)^2$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên rồi chia cho 3 ta được:

$$3(ab+bc+ca) \ge (a+b+c)^2 \Rightarrow ab+bc+ca \ge a^2+b^2+c^2 \qquad (1)$$

Mặt khác dễ dàng chứng minh được $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$ với a, b, c khác nhau đôi một, mâu thuẫn với (1).

BÀI 381. Chứng minh rằng không có ba số dương a, b, c nào thỏa mãn cả ba bất đẳng thức:
$a+\frac{1}{b}<2$; $b+\frac{1}{c}<2$; $c+\frac{1}{a}<2$.

Lời giải

Giả sử tồn tại các số dương a, b, c mà $a+\frac{1}{b}<2$; $b+\frac{1}{c}<2$; $c+\frac{1}{a}<2$ thì $a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}<6$

Hãy chứng minh điều vô lý.

BÀI 382. Chứng minh rằng không có các số a, b, c nào thỏa mãn cả ba bất đẳng thức: $|b-c|>|a|$, $|c-a|>|b|$, $|a-b|>|c|$.

Lời giải

Giả sử $|b-c|>|a|$, $|c-a|>|b|$, $|a-b|>|c|$ thì $(b-c)^2>a^2$, $(c-a)^2>b^2$, $(a-b)^2>c^2$. Do đó:

$(b-c+a)(b-c-a)>0$, $(c-a+b)(c-a+b)(c-a-b)>0$, $(a-b+c)(a-b-c)>0$.

Nhân từng vế ba bất đẳng thức trên sẽ dẫn đến điều vô lí.

BÀI 383. Chứng minh rằng không có các số dương a, b, c nào thỏa mãn các bất đẳng thức $4a(1-b)>1$, $4b(1-c)>1$, $4c(1-a)>1$.

Lời giải

Giả sử $4a(1-b)>1$, $4b(1-c)>1$, $4c(1-a)>1$ thì nhân từng vế ta được:

$$64abc(1-a)(1-b)(1-c)>1 \qquad (1)$$

Mặt khác, ta lại có:

$$4a(1-a)=4a-4a^2\le 1 \qquad (2)$$

(vì $1+4a^2+4a=(2a+1)^2\ge 0$. Tương tự

$$4a(1-b)\le 1 \qquad (3)$$

$$4c(1-c)\le 1 \qquad (4)$$

Từ giả thiết phản chứng và từ a, b, c dương suy ra $1-a$, $1-b$, $1-c$ cũng dương. Do đó ta nhân từng vế các bất đẳng thức $(2),(3),(4)$ và được:

$$64abc(1-a)(1-b)(1-c)$$

Mâu thuẫn với (1).

BÀI 384. Cho $a^3+b^3=2$. Chứng minh rằng $a+b\le 2$.

Lời giải

Cách 1: Giả sử $a+b>2$. Đặt $a=x+y$, $b=x-y$, ta có:

$$a+b=2x>2\Rightarrow x>1 \qquad (1)$$

Ta có: $a^3+b^3=(x+y)^3+(x-y)^3=2x^3+6xy^2$.

Do (1) nên $2x^3>2$; $6xy^2\ge 0$. Vậy $a^3+b^3>2$, trái với giải thiết.

Cách 2: Giả sử $a+b>2$. Ta có:

$(a+b)^3>8\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)>8\Rightarrow 2+3ab(a+b)>8$

$\Rightarrow ab(a+b)>2\Rightarrow ab(a+b)>a^3+b^3$ (vì $a^3+b^3=2$)

$\Rightarrow ab>a^2-ab+b^2$ (chia hai vế cho số dương $a+b$)

$\Rightarrow 0>(a-b)^2$, vô lí.

Giải các bài từ 385 đến 389 trong đó sắp thứ tự các biến:

BÀI 385. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$;

b) $a^3+b^3+c^3+3abc>ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$.

Lời giải

a) Giả sử $a\ge b\ge c>0$ thì $a+b\ge a+c\ge b+c$.

Ta có $\frac{c}{a+b}\le\frac{c}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}\le\frac{b}{b+c}$, $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b+c}$.

Cộng từng vế:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a}{b+c}+1<1+1=2.$$

Chú ý: Ta cũng chứng minh được: Nếu $a,b,c>0$ thì $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ (xem ví dụ 92b).

b) Sắp xếp $a\ge b\ge b\ge c>0\Rightarrow c(a-c)(b-c)\ge 0\Rightarrow c^3+abc\ge ac^2+bc^2$.

Ta cần phải chứng minh

$$a^3+b^3+2abc\ge ab(a+b)+b^2c+a^2c.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $(a-b)^2(a+b-c)\ge 0$.

BÀI 386. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $2\left(a^8+b^8\right)\ge\left(a^3+b^3\right)\left(a^5+b^5\right)$;

b) $3\left(a^8+b^8+c^8\right)\ge\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^5+b^5+c^5\right)$.

Lời giải

a) Hiệu $2\left(a^8+b^8\right)-\left(a^3+b^3\right)\left(a^5+b^5\right)$ bằng $\left(a^3-b^3\right)\left(a^5-b^5\right)$.

Giả sử $a\ge b$ thì $a^3-b^3\ge 0$ và $a^5-b^5\ge 0$.

b) Theo câu a) ta có:

$$2\left(a^8+b^8\right)\ge\left(a^3+b^3\right)\left(a^5+b^5\right)$$
$$2\left(b^8+c^8\right)\ge\left(b^3+c^3\right)\left(b^5+c^5\right)$$
$$2\left(c^8+a^8\right)\ge\left(c^3+a^3\right)\left(c^5+a^5\right)$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$4\left(a^8+b^8+c^8\right)\ge\left(a^8+b^8+c^8\right)+a^3\left(a^5+b^5+c^5\right)+b^3\left(a^5+b^5+c^5\right)+c^3\left(a^5+b^5+c^5\right)$$
$$\Rightarrow 3\left(a^8+b^8+c^8\right)\ge\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^5+b^5+c^5\right)$$

BÀI 387. Cho $a+b=2$. Chứng minh rằng $a^8+b^8\ge a^7+b^7$.

Lời giải

Chú ý rằng $a+b=2$, ta xét hiệu

$$2\left(a^8+b^8\right)-2\left(a^7+b^7\right)=2\left(a^8+b^8\right)-(a+b)\left(a^7+b^7\right)$$

Biến đổi hiệu này thành $(a-b)\left(a^7-b^7\right)$.

Giả sử $a\ge b$ thì $a-b\ge 0$ và $a^7-b^7\ge 0$.

BÀI 388. Chứng minh bất đẳng thức sau với $a,b,c\ge 0$:

a) $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$;

b) $a^6+b^6+c^6\ge a^5b+b^5c+c^5a\ \left(a,b,c\ge 0\right)$.

Lời giải

a) Sắp xếp $a\ge b\ge c\ge 0$.

$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$

$=a(a-b)[(a-b)+(b-c)]-b(a-b)(b-c)+c(a-c)(b-c)$

$=a(a-b)^2+a(a-b)(b-c)-b(a-b)(b-c)+c(a-c)(b-c)$

$=a(a-b)^2+(b-c)(a-b)^2+c(a-c)(b-c)\ge 0$

b) Không mất tính tổng quát, giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c. Xét hiệu:

$a^6+b^6+c^6-a^5b-b^5c-c^5a=a^5(a-b)+b^5(b-c)+c^5(c-a)$

$=a^5(a-b)-b^5[(a-b)+(c-a)]+c^5(c-a)$

$=(a-b)\left(a^5-b^5\right)+(c-a)\left(c^5-b^5\right)$.

Do $c\le a$, $c\le b$ nên $c-a<0$, $c^5-b^5\le 0$, do đó $(c-a)\left(c^5-b^5\right)\ge 0$.

Còn $(a-b)\left(a^5-b^5\right)$ cũng không âm (thật vậy nếu $a-b\ge 0$ thì $a^5-b^5\ge 0$, nếu $a-b<0$ thì $a^5-b^5<0$.)

BÀI 389. Chứng minh rằng tồn tại một trong các số $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ không lớn hơn $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Lời giải

Gọi m là số nhỏ nhất trong các hiệu $a-b$, $b-c$, $a-c$.

Giả sử $a\ge b\ge c$ thì $m\ge 0$. Ta có:

$$a-b\ge m\ge 0\Rightarrow (a-b)^2\ge m^2$$

$$b-c\ge m\ge 0\Rightarrow (b-c)^2\ge m^2$$

$$a-c\ge 2m\ge 0\Rightarrow (a-c)^2\ge 4m^2$$

Cộng từng vế:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\ge 6m^2$$

$$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)-(a+b+c)^2\ge 6m^2$$

$$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 6m^2\Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ge m^2.$$

BÀI 390. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2.

a) So sánh a, b, c với 1;

b) Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2abc<2$.

Lời giải

a) Giả sử $a \ge b \ge c$. Ta có

$a<b+c \Rightarrow 2a<a+b+c=2 \Rightarrow a<1 \Rightarrow b<1,\ c<1$.

$ab+bc+ca>1+abc$ b) Từ câu a) suy ra: $(1-a)(1-b)(1-c)>0$. Rút gọn ta được:

$$ab+bc+ca>1+abc \quad (1)$$

Ta lại có:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+a)$$

$$\Rightarrow 4=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$4>a^2+b^2+c^2+2(a+abc) \Rightarrow 4>a^2+b^2+c^2+2+2abc$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2abc<2.$$

BÀI 391. Cho $|x|\ge 2$, $|y|\ge 2$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{x+y}{xy}\le 1$;

b) Phương trình $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{2003}{2004}$ vô nghiệm.

Lời giải

a) $\dfrac{x+y}{xy}\le\left|\dfrac{x+y}{xy}\right|=\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right|\le\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$ (vì $|x|\ge 2$, $|y|\ge 2$).

b) Suy ra từ câu a).

BÀI 392.

a) Cho $a+b+c=6$ và $ab+bc+ca=9$. Chứng minh rằng $0\le a\le 4$, $0\le b\le 4$ và $0\le c\le 4$.

b) Cho $a+b+c=2$ và $a^2+b^2+c^2=2$. Chứng minh rằng $0\le a\le\dfrac{4}{3}$, $0\le b\le\dfrac{4}{3}$ và $0\le c\le\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

a) Ta có $b+c=6-a$, $bc=9-a(b+c)=9-a(6-a)=9-6a+a^2$.

Áp dụng bất đẳng thức $(b+c)^2\ge 4bc$, ta được

$(6-a)^2\ge 4\left(9-6a+a^2\right)\Rightarrow 3a^2-12a\le 0\Rightarrow a(a-4)\le 0\Rightarrow 0\le a\le 4$

Tương tự $0\le b\le 4$, $0\le c\le 4$.

b) Giải tương tự câu a). Có thể áp dụng bất đẳng thức $(b+c)^2\ge 4bc$ hoặc áp dụng bất đẳng thức $2\left(b^2+c^2\right)\ge(b+c)^2$, ta được $3a^2-4a\le 0$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

BÀI 393. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$$\left|\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)\right|<1.$$

Lời giải

$$\left|\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)\right|<1 \Leftrightarrow \left|\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}+\frac{c-b}{a}\right|<1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{(a-c)ac+(b-a)ab+(c-b)bc}{abc}\right|<1 \ (1)$$

Mặt khác a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên

$$\frac{|a-c|}{b}<1, \frac{|b-a|}{c}<1, \frac{|c-b|}{a}<1$$

Suy ra

$$\frac{|(a-c)(b-a)(c-b)|}{abc}<1$$

Biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối của (2) và (1) đối nhau (bạn đọc tự kiểm tra), do đó từ (2) suy ra (1).

BÀI 394. Chứng minh rằng với $a,b,c>0$ thì:

a) $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge a+b+c$;

b) $\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}\le\dfrac{a+b+c}{2}$.

Lời giải

a) $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}=c\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)\ge 2c$ (do $a,b,c>0$).

Tương tự: $\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge 2a$, $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}\ge 2b$. Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

b) Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{x+y}{xy}\ge\dfrac{4}{x+y}$ với $a,\ b>0$ (ví dụ 77b), ta có:

$$\frac{ab}{a+b}\le\frac{a+b}{4}, \frac{bc}{b+c}\le\frac{b+c}{4}, \frac{ca}{c+a}\le\frac{c+a}{4}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

BÀI 395. Chứng minh rằng với $a,b,c>0$ thì $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$.

Lời giải

Do a, b, c dương nên:

$$\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{a+b}<\frac{a+c}{a+b+c}$$

$$\frac{b}{b+c+a}<\frac{b}{b+c}<\frac{b+a}{a+b+c}$$

$$\frac{c}{c+a+b}<\frac{c}{c+a}<\frac{c+b}{a+b+c}.$$

Cộng từng vế:

$$1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2.$$

BÀI 396. Chứng minh rằng với $a,b,c>0$ thì:

a) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$;

b) $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$;

c) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$.

Lời giải

a) $A=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$.

Do $a,b,c>0$ nên

$$A\geq\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2=\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+\left(\frac{b}{a}-1\right)^2\geq 0.$$

b) Xét $\frac{a^2}{b}+b=\frac{a^2+b^2}{b}\geq\frac{2ab}{b}=2a$ (do $a,b>0$).

Tương tự $\frac{b^2}{c}+c\geq 2b$, $\frac{c^2}{a}+a\geq 2c$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

c) Xét $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}=\frac{(2a)^2+(b+c)^2}{4(b+c)}\geq\frac{4a(b+c)}{4(b+c)}=a$ (do $b,c>0$).

Tương tự $\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\geq b$, $\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq c.$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

BÀI 397. Chứng minh rằng với $a,b,c>0$ thì

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Lời giải

Xét:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}=\frac{a\left(ab+ac-b^2-c^2\right)}{\left(b^2+c^2\right)(b+c)}=\frac{ab(a-b)+ac(a-c)}{\left(b^2+c^2\right)(b+c)}\quad(1)$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{c^2+a^2}-\frac{b}{c+a}=\frac{ca(c-a)+cb(c-b)}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}\quad (2)$$

$$\frac{c^2}{a^2+b^2}-\frac{c}{a+b}=\frac{ca(c-a)+cb(c-b)}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}\quad (3)$$

Cộng từng vế $(1),(2)$ và (3) ta được:

$$\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)-\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

$$=ab(a-b)\left[\frac{1}{\left(b^2+c^2\right)(b+c)}-\frac{1}{\left(a^2+b\right)(a+b)}\right]+ac(a-c)\left[\frac{1}{\left(b^2+c^2\right)(b+c)}-\frac{1}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}\right]$$

$$+bc(b-c)\left[\frac{1}{\left(a^2+c^2\right)(a+c)}-\frac{1}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}\right]$$

Giả sử $a\ge b\ge c>0$ thì các dấu ngoặc tròn và ngoặc vuông của biểu thức trên đều không âm. Suy ra điều phải chứng minh.

🗁**BÀI 398.** Chứng minh rằng khi viết dưới dạng số thập phân vô hạn, số $\left(\frac{2}{225}\right)^{100}$ có 2000 chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy bằng 0.

✍ Lời giải

Ta có:

$$\left(\frac{2}{225}\right)^{1000}<\left(\frac{2}{200}\right)^{1000}=\left(\frac{1}{10^2}\right)^{1000}=\frac{1}{10^{2000}}=0.\underbrace{00\ldots0}_{1999}1.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

🗁**BÀI 399.** Cho 101 số $a_1,a_2,\ldots,a_{101}$ trong đó $a_1=5$, $a_2=a_1+\frac{1}{a_1},\ldots,a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ với mọi $n\ge 1$

.

Chứng minh rằng:

a) $a_{51}>11$;

b) $15<a_{101}<15{,}1$.

✍ Lời giải

a) Theo giả thiết, $a_{n+1}^2=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2$. Do đó:

$$a_1^2=25$$

$$a_2^2=a_1^2+\frac{1}{a_1^2}+2$$

$$\ldots$$

$$a_{51}^2 = a_{50}^2 + \frac{1}{a_{50}^2} + 2$$

Cộng từng vế: $a_{51}^2 = \left(\dfrac{1}{a_1^2 + \ldots + \dfrac{1}{a_{50}^2}}\right) + 125 > 11^2 \Rightarrow a_{51} > 11$.

b) Tương tự như câu a)

$$a_{101}^2 = \left(\frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_{100}^2}\right) + 225 > 15^2 \Rightarrow a_{101} > 15.$$

Để chứng minh $a_{101} < 15{,}1$, chú ý rằng $15{,}1^2 = 228{,}01$ ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_{100}^2} < 3{,}01.$$

Ta có:

$$\frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_{100}^2} = \left(\frac{1}{a_1}^{2} + \cdots + \frac{1}{a_{50}^2}\right) + \left(\frac{1}{a_{51}^2} + \cdots + \frac{1}{a_{100}^2}\right)$$

$$< 50 \cdot \frac{1}{a_1^2} + 50 \cdot \frac{1}{a_{51}^2} < 50 \cdot \frac{1}{25} + 50 \cdot \frac{1}{11^2} < 1 + \frac{1}{2} < 3{,}01.$$

BÀI 400. Cho sáu đoạn thẳng có độ dài trong khoảng từ $10\,\text{cm}$ đến $75\,\text{cm}$. Chứng minh rằng bao giờ cũng chọn được ba đoạn thẳng làm thành ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

Gọi độ dài các đoạn thẳng đã cho là $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Giả sử

$$10 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_6 \le 75$$

Nếu bất kì ba đoạn thẳng nào cũng không thể lập thành một tam giác thì:

$$a_3 \ge a_1 + a_2 \ge 10 + 10 = 20$$

$$a_4 \ge a_2 + a_3 \ge 10 + 20 = 30$$

$$a_5 \ge a_3 + a_4 \ge 20 + 30 = 50$$

$$a_6 \ge a_4 + a_5 \ge 30 + 50 = 80\text{, vô lí.}$$

BÀI 401. *Đố vui: Ai nói đúng?* Một đơn vị công an hằng ngày dùng thuyền máy đi xuôi khúc sông từ A đến B rồi quay trở lại A. Hôm ấy, dòng nước chảy nhanh hơn hôm trước. Chiến sĩ Tâm vui vẻ nói: "Hôm nay nước chảy nhanh hơn, thuyền xuôi nhanh hơn nên ta sẽ về sớm hơn". Chiến sĩ Hòa không tán thành: "Đi nhanh được bao nhiêu thì lại về chậm bấy nhiêu! Như vậy thuyền vẫn đi với thời gian như hôm trước". Ai đúng? Ai sai? Biết rằng vận tốc riêng của thuyền máy không đổi trong cả hai ngày.

Lời giải

Gọi khoảng cách AB là s (km), vận tốc riêng của thuyền máy là a (km/h), vận tốc dòng nước ngày hôm trước là b (km/h), vận tốc dòng nước ngày hôm sau là c (km/h) trong đó $s > 0$, $a > 0$, $0 < b < c$. Ngày hôm trước, vận tốc thuyền lúc xuôi là $a + b$ (km/h) lúc ngược là $a - b$ (km/h), thời gian đi khứ hồi (đi từ A đến B rồi trở về A) là:

$$x=\frac{s}{a+b}+\frac{s}{a-b}=\frac{2as}{a^2-b^2}\text{ (giờ).}$$

Tương tự, thời gian đi khứ hồi trong ngày hôm sau là

$$y=\frac{s}{a+c}+\frac{s}{a-c}=\frac{2as}{a^2-c^2}\text{ (giờ).}$$

Do $0<b<c$ nên $a^2-b^2>a^2-c^2\Rightarrow\frac{2as}{a^2-b^2}<\frac{2as}{a^2-c^2}\Rightarrow x<y$.

Như vậy là cả Tâm lẫn Hòa đều sai: thời gian thuyền đi hôm sau lâu hơn hôm trước.

Bất đẳng thức với số tự nhiên

BÀI 402. Cho $A=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{200}{199}$. Chứng minh rằng $14<A<20$.

Lời giải

Để chứng minh $A<20$, ta làm trội mỗi phân số của A bằng cách dùng bất đẳng thức $\frac{n+1}{n}<\frac{n}{n-1}$.

Ta có:

$$A=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{200}{199}$$

$$A<\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{199}{198}.$$

Suy ra $A^2<\frac{2\cdot4\cdot6\cdots200}{1\cdot3\cdot5\cdots199}\cdot\frac{2\cdot3\cdot5\cdots199}{1\cdot2\cdot4\cdots198}=\frac{200}{1}\cdot\frac{2}{1}=400\Rightarrow A<20$.

Để chứng minh $A>14$, ta làm giảm mỗi phân số của A bằng cách dùng bất đẳng thức $\frac{n+1}{n}>\frac{n+2}{n+1}$.

Chứng minh các bất đẳng thức (từ bài 403 đến 410):

BÀI 403. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{10}{12}\cdots\frac{208}{210}<\frac{1}{25}$.

Lời giải

Gọi A là vế trái của bất đẳng thức. Ta làm trội A để được một biểu thức C dễ rút gọn hơn. Muốn vậy biểu thức C phải có nhiều thừa số giống nhau ở tử và ở mẫu.

Nhận xét hai phân số cạnh nhau, chẳng hạn $\frac{1}{3}$ và $\frac{4}{6}$, ta thấy 4 hơn 3 là 1, còn 6 hơn 4 là 2. Ta làm trội: $\frac{n}{n+2}<\frac{n-1}{n}$ (vì $n^2<n^2+n-2$ với mọi $n>2$). Do đó:

$$A=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{10}{12}\cdots\frac{208}{201}$$

$$A<\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdots\frac{207}{208}(=C)$$

Suy ra

$$A^2<\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdots208}{3\cdot6\cdot9\cdot12\cdots210}\cdot\frac{1\cdot3\cdot6\cdot9\cdots207}{3\cdot4\cdot7\cdot10\cdots208}=\frac{1}{210}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{630}<\frac{1}{625}=\left(\frac{1}{25}\right)^2.$$

Do đó $A<\dfrac{1}{25}$.

BÀI 404. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $A=\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{36}+\dfrac{7}{144}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}<1$ (n nguyên dương);

b) $B=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n-1}{n!}<1$ $(n\in\mathbb{N};\ n\geq 2)$.

Lời giải

a) Viết $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ thành $\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

$$A=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}<1.$$

b) Viết $\dfrac{n-1}{n!}$ thành $\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}$.

BÀI 405. Chứng minh bất đẳng thức: $C=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{5}{3!}+\dfrac{11}{4!}+\ldots+\dfrac{n^2+n-1}{(n+1)!}<2$ (n nguyên dương).

Lời giải

$$\frac{n^2+n-1}{(n+1)!}=\frac{n(n+1)}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

Ta có:

$$\frac{1}{2!}+\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{2!}+\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right]-\left[\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=2-\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}<2.$$

BÀI 406. Chứng minh bất đẳng thức: $A=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\cdots+\dfrac{100}{2^{100}}<2$.

Lời giải

$$2A=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{100}{2^{99}}\quad(1)$$

$$A=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{99}{2^{99}}+\frac{100}{2^{100}}\quad(2)$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$A=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{99}}\right)-\frac{100}{2^{100}}$$

Hãy chứng minh biểu thức trong dấu ngoặc nhỏ hơn 2.

BÀI 407. Chứng minh bất đẳng thức: $B=\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{4^3}+\dfrac{1}{5^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^3}<\dfrac{1}{12}$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geq 3)$.

Lời giải

Giải tương tự ví dụ 96.

BÀI 408. Chứng minh bất đẳng thức : $C=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{100}{3^{100}}<\frac{3}{4}$.

Lời giải

$$3C=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+...+\frac{99}{3^{98}}+\frac{100}{3^{99}}$$

$$C=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{99}{3^{99}}+\frac{100}{3^{100}}$$

Suy ra: $2C=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{99}}\right)-\frac{100}{3^{100}}$.

Hãy chứng minh biểu thức trong dấu ngoặc nhỏ hơn $\frac{3}{2}$.

BÀI 409. Chứng minh bất đẳng thức: $1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{3n+1}<2$ (n nguyên dương).

Lời giải

Gọi $A=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n+1}+...+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}$

Tổng A có $2n+1$ số, ghép thành n cặp các phân số cách đều hai đầu, còn lại một phân số ở giữa là $\frac{1}{2n+1}$

Mỗi cặp bằng:

$$\frac{1}{2n+1-k}+\frac{1}{2n+1+k}=\frac{4n+2}{(2n+1)^2-k^2}>\frac{4n+2}{(2n+1)^2}=\frac{2}{(2n+1)}$$

Vậy $A>\frac{2}{2n+1}\cdot n+\frac{1}{2n+1}=1$

Để chứng minh $A<2$, làm trội A bằng cách thay mỗi phân số của A bởi phân số lớn nhất.

BÀI 410. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{3}{5}<\frac{1}{2004}+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}+...+\frac{1}{4006}<\frac{3}{4}$.

Lời giải

Gọi $A=\frac{1}{2004}+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}+...+\frac{1}{4006}$

- Chứng minh $A > \frac{3}{5}$: Tổng A có 2003 số, ghép thành 1001 cặp phân số cách đều hai đầu, còn lại một phân số ở giữa là $\frac{1}{3005}$.

Mỗi cặp bằng: $\frac{1}{3005-k} + \frac{1}{3005+k} > \frac{6010}{3005^2} = \frac{2}{3005}$.

Do đó $A > \frac{2}{3005} \cdot 1001 = \frac{2002}{3005} > \frac{3}{5}$.

- Chứng minh $A < \frac{3}{4}$: Đặt $2004 = n$, ta có:

$$A = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n(n-2)}$$

$$A = \frac{1}{n+(n-2)} + \frac{1}{n+(n-3)} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Cộng lại: $2A = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n-2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-2} + \frac{1}{n}\right)$

Ta sẽ chứng minh nhóm đầu và nhóm cuối có giá trị lớn hơn các nhóm khác bằng cách chứng

$\frac{1}{n} + \frac{1}{2n-2} > \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-2-k}$ với $0 < k < n-2$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3n-2}{n(n-2)} > \frac{3n-2}{(n+k)(2n-2-k)}$$

$$\Leftrightarrow n(n-2) < (n+k)(2n-2-k)$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 2n < 2n^2 - 2n - kn + 2kn - 2k - k^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 < kn - 2k \Leftrightarrow k < n-2 \quad \text{đúng}$$

Vậy $2A < \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n-2}\right) \cdot (n-1) = \frac{3n-2}{n(2n-2)} \cdot (n-1) = \frac{3n-2}{2n} < \frac{3}{2}$

Do đó $A < \frac{3}{4}$.

🗁 **BÀI 411**. a) Chứng minh bất đẳng thức:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2} \text{ (} n \text{ nguyên dương).}$$

b) Chứng minh rằng với mọi số dương A, ta luôn tìm được số tự nhiên n để

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > A$$

Lời giải

a) Gọi $A = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}$. Ở ví dụ 97, ta đã chứng minh rằng $A<n$. Bây giờ ta chứng minh $A>\frac{n}{2}$. Ta có:

$$A = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{1}{2^n-1}$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}+\cdots+\frac{1}{2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}$$

Thay mỗi phân số trong dấu ngoặc bởi phân số nhỏ nhất trong dấu ngoặc đó:

$$A > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdot 2+\frac{1}{2^3}\cdot 2^2+\cdots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{2^n}$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n} = 1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}$$

b) áp dụng câu a): $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^n-1} > \frac{n}{2}$, nếu ta chọn $k = 26n-1$ thì

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k} > \frac{n}{2}$$

Như vậy nếu chọn $k = 2^{2A}-1$ thì $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k} > \frac{2A}{2} = A$.

🗁 **BÀI 412**. Cho bốn số nguyên dương a,b,c,d , trong đó tổng ba số bất kì chia cho số còn lại đều có thương là một số nguyên khác 1 .

Chứng minh rằng trong bốn số a,b,c,d tồn tại hai số bằng nhau.

Lời giải

Giả sử $a>b>c>d$. Đặt $\frac{b+c+d}{a} = m, \frac{a+c+d}{b} = n, \frac{a+b+d}{c} = p$

Theo giả thiết thì $m>1$; ta lại có $d<c<b<a$ nên $b+c+d<3a$, do đó $m<3$; vậy $m=2$. Dễ thấy

$$m = \frac{b+c+d}{a} < \frac{b+c+d}{b} < \frac{a++d}{b} = n$$
$$n = \frac{a+c+d}{b} < \frac{a+c+d}{c} < \frac{a+b+d}{c} = p$$

Suy ra $n \geq 3, p \geq 4$

Ta có $b+c+d = 2a, a+c+d \geq 3b, a+b+d \geq 4c$.

Cộng từng vế ta được:

$$2a+2b+2c+3d \geq 2a+3b+4c \Rightarrow 3d \geq b+2c > d+2d = 3d, \text{ vô lí.}$$

BÀI 413. Tìm các số tự nhiên x và y sao cho x^x có y chữ số, còn y^y có x chữ số.

Lời giải

Ta có x^x có y chữ số $\Rightarrow 10^{y-1} \leq x^x < 10^y$

y^y có x chữ số $\Rightarrow 10^{x-1} \leq y^y < 10^x$.

Giả sử $x \geq y$. Ta có $x^x < 10^y \leq 10^x \Rightarrow x < 10$.

Ta chọn các số x^x sao cho $x < 10$ và $x^x \geq 10^{y-1}$ với mọi $y-1$ nhỏ hơn x.

Các số $2^2, 3^3, \ldots, 7^7$ không thỏa mãn (chẳng hạn $2^2 < 10, 3^3 < 10^2, \ldots$). Xét các số $1^1, 8^8, 9^9$, ta thấy $10^0 < 1^1 < 10^1, 10^7 < 8^8 < 10^1 0^8, 10^8 < 9^9 < 10^9$

Đáp số: $x = y = 1; x = y = 8; x = y = 9$.

BÀI 414. Chứng minh bất đẳng thức $(n!)^2 > n^2$ với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

Lời giải

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times k \times \ldots \times n$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\ldots 1$$

Suy ra $(n!)^2 = (1 \times n) \times [2(n-1)] \times [3(n-2)] \ldots [k(n-k+1)] \ldots (n \times 1)$. Ta sẽ chứng minh rằng biểu thức trong mỗi dấu ngoặc vuông đều lớn hơn n.

Thật vậy

$$k(n-k+1) - n = kn - n - k^2 + k = n(k-1) - k(k-1)$$

$$= (n-k)(k-1) > 0 \text{ vì } n > k > 1$$

BÀI 415. Kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Chứng minh rằng $[x]+[y] \leq [x+y]$.

Lời giải

Ta có: $[x] \leq x, [y] \leq y$ nên $[x]+[y] \leq x+y$, tức là $[x]+[y]$ là các số nguyên không vượt quá

$x+y$ (1)

Mặt khác, theo định nghĩa phần nguyên, $[x+y]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá

$x+y$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $[x]+[y]\le[x+y]$.

1. Bất đẳng thức và phương trình

BÀI 416. Dùng phương pháp bất đẳng thức để giải các phương trình:

a) $(x+y)^2=(x+1)(y-1)$; b) $x^2+y^2+z^2+t^2=x(y+z+t)$;

c) $(x^2+1)(y^2+4)(z^2+9)=48xyz\ (x,y,z>0)$; d) $(x+1)(y+1)(x+y)=8xy(x,y\ge 0)$

Lời giải

a) Đặt $x+1=a, y-1=b$. Phương trình trở thành $(a+b)^2=ab$. Dễ dàng tính được $a=b=0$.

Đáp số: $x=-1, y=1$.

b) Biến đổi: $x=1, y=2, z=3$.

c) Đáp số: $x=1, y=2, z=3$.

d) Sử dụng bất đẳng thức $(x+1)(y+1)(x+y)\ge 8xy$ (xem ví dụ 94).

BÀI 417. Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của n. Tìm số nguyên dương n sao cho:

a) $n+S(n)=2018$; b) $S(n)=n^2-2005n+7$

Lời giải

a) Ta có

$$n+S(n)=2018 \quad (1)$$

nên

$$n<2018 \quad (2)$$

$$S(n)\le 1+9\times 3=28$$

$$n\ge 2018-28=1990 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $n=\overline{199a}$ hoặc $n=\overline{20bc}$.

Thay $n=\overline{199a}$ vào (1) được $2a=9$, loại.

Thay $n=\overline{20bc}$ vào (1) được $a=0, b=8$. Đáp số: 2008 .

b) $S(n)=n^2-2005n+7$

- Xét $n=2005$ thì $S(n)=7$ và (1) đúng.

- Xét $n>2005$. Ta có $S(n)=n^2-2005n+7>n(n-2005)>n$, tức là $S(n)>n$, vô lí.

- Xét $1 \le n \le 2004$. Ta có $n-1 \ge 0, n-2004 \le 0$ nên $n(n-1)(n-2004) \le 0 \Rightarrow n^2-2005n+2004 \le 0$

$$n(n-1)(n-2004) \le 0 \Rightarrow n^2-2005n+2004 \le 0$$

$$\Rightarrow n^2-2005n+7 \le -1997 \Rightarrow S(n) < 0, \text{ vô lí.}$$

Đáp số: $n = 2005$.

Bài 7

TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Cho biểu thức $f(x, y\ldots)$

Ta nói M là giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức $f(x, y\ldots)$, kí hiệu $\max f = M$ nếu hai điều kiện sau thỏa mãn:

- Với mọi $x, y, \ldots$ để $f(x, y\ldots)$ xác định thì

$$f(x, y\ldots) \le M \; (M \text{ là hằng số}) \qquad (1)$$

- Tồn tại $x_0, y_0, \ldots$ sao cho

$$f(x_0, y_0\ldots) = M \qquad (2)$$

2. Cho biểu thức $f(x, y\ldots)$

Ta nói m là giá trị nhỏ nhất(GTNN) của biểu thức $f(x, y\ldots)$, kí hiệu $\min f = m$ nếu hai điều kiện sau thỏa mãn:

- Với mọi $x, y, \ldots$ để $f(x, y\ldots)$ xác định thì

$$f(x, y\ldots) \ge m \; (m \text{ là hằng số }) \qquad (1)$$

- Tồn tại $x_0, y_0, \ldots$ sao cho

$$f(x_0, y_0\ldots) = m \qquad (2)$$

3. Chú ý rằng nếu chỉ có điều kiện (1) hay (1') thì chưa thể nói gì về cực trị của một biểu thức. Chẳng hạn, xét biểu thức

$$A=(x-1)^2+(x-3)^2$$

Mặc dù ta có $A\geq 0$, nhưng chưa thể kết luận được $\min A=0$ vì không tồn tại giá trị nào của x để $A=0$.

2 Một số ví dụ

A. GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

VÍ DỤ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\left(x-1\right)^2+\left(x-3\right)^2$$

Lời giải

Ta có

$$A=x^2-2x+1+x^2-6x+9=2\left(x^2-4x+5\right)$$

$$=2(x-2)^2+2\geq 2$$

$A=2\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$

Vậy $\min A=2$ khi và chỉ khi $x=2$.

B. TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA MỘT BIẾN

1. Tam thức bậc hai

VÍ DỤ 2.

1. Tìm GTNN của $A=2x^2-8x+1$
2. Tìm GTLN của $B=-5x^2-4x+1$.
3. Cho tam thức bậc hai $P=ax^2+bx+c$

Lời giải

1. $A=2x^2-8x+1=2(x^2-4x+4)-7=2(x-2)^2-7\geq -7$

$\min A=-7$ khi và chỉ khi $x=2$.

2. $B=-5x^2-4x+1=-5\left(x^2+\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}\right)+\frac{9}{5}=-5\left(x^2+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{9}{5}\leq\frac{9}{5}$.

$\max B=\frac{9}{5}$ khi và chỉ khi $x=\frac{-2}{5}$

3. $P=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a(x^2+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}$

Đặt $c - \frac{b^2}{4a} = k$. Do $(x^2 + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ nên

- Nếu $a > 0$ thì $(x^2 + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, do đó $P \geq k$

$min\ P = k$ khi và chỉ khi $x = \frac{-b}{2a}$;

- Nếu $a < 0$ thì $(x^2 + \frac{b}{2a})^2 \leq 0$, do đó $P \leq k$

$max\ P = k$ khi và chỉ khi $x = \frac{-b}{2a}$.

2. Đa thức bậc cao hơn hai

VÍ DỤ 3. Tìm GTNN của $A = x(x-3)(x-4)(x-7)$

Lời giải

$$A = \left(x^2 - 7x\right)\left(x^2 - 7x + 12\right)$$

Đặt $x^2 - 7x + 6 = y$ thì

$$A = \left(y - 6\right)\left(y + 6\right) = y^2 - 36 \geq -36$$

$$min\ A = -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

3. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

VÍ DỤ 4. Tìm GTNN của $A = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2}$

Lời giải

$$A = \frac{-2}{9x^2 - 6x + 5} = \frac{-2}{(3x-1)^2 + 4}$$

Ta thấy $(3x-1)^2 \geq 0$ nên $(3x-1)^2 + 4 \geq 4$.

Để ý tính chất $a \geq b$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ với a và b cùng dấu. Từ đó ta có

$$\frac{1}{(3x-1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-2}{(3x-1)^2 + 4} \geq \frac{-2}{4} \Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}$$

$$min\ A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

4. Phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức

VÍ DỤ 5. Tìm GTNN của $A = \dfrac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

Lời giải

Cách 1. Đặt $x - 1 = y$ thì $x = y + 1$. Ta có

$$A = \frac{3(y+1)^2 - 8\left(y+1\right) + 6}{y^2} = \frac{3y^2 - 2y + 1}{y^2} = 3 - \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}$$

Lại đặt $\dfrac{1}{y} = z$ thì

$$A = 3 - 2z + z^2 = (z-1)^2 + 2 \geq 2$$

$$min\ A = 2 \Leftrightarrow z = 1 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Cách 2 . Viết A dưới dạng tổng của 2 với một biểu thức không âm

$$A = \frac{\left(2x^2 - 4x + 2\right) + \left(x^2 - 4x + 4\right)}{x^2 - 2x + 1} = 2 + \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} \geq 2$$

$min\ A = 2$ khi và chỉ khi $x = 2$.

5. Các phân thức dạng khác

VÍ DỤ 6. Tìm GTNN của $A = \dfrac{3 - 4x}{x^2 + 1}$

Lời giải

Để tìm GTNN, viết A dưới dạng

$$A = \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x-2)^2}{x^2 + 1} - 1 \geq -1$$

$min\ A = -1$ khi và chỉ khi $x = 2$.

Để tìm GTLN, viết A dưới dạng

$$A = \frac{4x^2 + 4 - 4x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(2x+1)^2}{x^2 + 1} \leq 4$$

$max\ A = 4$ khi và chỉ khi $x = -\dfrac{1}{2}$

C. TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC CÓ QUAN HỆ RÀNG BUỘC GIỮA CÁC BIẾN

VÍ DỤ 7. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + xy$ biết rằng $x + y = 1$

Lời giải

Sử dụng điều kiện đã cho để rút gọn biểu thức A :

$$A = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) + xy = x^2 - xy + y^2 + xy = x^2 + y^2$$

Đến đây có nhiều cách giải

Cách 1 . Biểu thị y theo x rồi đưa về tam thức bậc hai theo x.

Thay $y = 1 - x$ vào biểu thức A

$$A = x^2 + (1-x)^2 = 2\left(x^2 - x\right) + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$min\ A = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$

Cách 2. Sử dụng điều kiện đã cho làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa A

$$x + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1$$

Mặt khác

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

Cộng (1) và (2), ta được

$$2\left(x^2 + y^2\right) \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$$

$min\ A = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$

Cách 3. Sử dụng điều kiện đã cho để đưa vào một biến mới

Đặt $x = \frac{1}{2} + a$ thì $y = \frac{1}{2} - a$. Biểu thị $x^2 + y^2$ theo a, ta được

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 = \frac{1}{2} + 2a^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$min\ A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

VÍ DỤ 8. Cho $x + y + z = 3$

1. Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2 + z^2$

2. Tìm GTlN của $B = xy + yz + zx$

3. Tìm GTNN của $C = A + B$

Lời giải

Bình phương hai vế của đẳng thức $x+y+z=3$, ta được

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=9 \qquad (1)$$

tức là $A+2B=9$.

Dễ dàng chứng minh được $A \geq B$ (2)

xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=z$.

1. Từ (1) và (2) suy ra $3A \geq A+2B=9$, nên $A \geq 3$.

Do đó $min\, A=3$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Có thể giải câu a bằng cách đổi biến $x=1+a, y=1+b, z=1+c$ *rồi xét* $x^2+y^2+z^2$.

2. Từ (1) và (2) suy ra $3B \leq A+2B=9$, nên $B \leq 3$. Do đó $max\, B=3$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Có thể giải câu b dựa vào câu a: Vì $A+2B=9$ *nên B lớn nhất khi và chỉ khi A nhỏ nhất.*

3. Ta có $A+2B=9$ mà $B \leq 3$ (câu b) nên $A+B \geq 6$.

Do đó $min(A+B)=6$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

🕮 **VÍ DỤ 9**. Tìm GTNN, GTLN của

1. Biểu thức A, biết rằng $A(A-1) \leq 2$
2. Biểu thức $A=2-x-y-z$, biết rằng $(2-x-y-z)^2=4-x^2-y^2-z^2$

Lời giải

1) Ta sử dụng phương pháp xét dấu để tìm GTNN, GTLN của A. Ta biến đổi

$$A(A-1) \leq 2 \Leftrightarrow A^2-A-2 \leq 0 \Leftrightarrow (A+1)(A-2) \leq 0$$

Lập bảng xét dấu

x	-1	-2
$A+1$	- 0 +	+
$A-2$	-	- 0 +
$(A+1)(A-2)$	+ 0 - 0 +	

Do đó $-1 \le A \le 2$ nên $min\ A = -1$ và $max\ A = 2$.

2) Từ giả thiết ta có

$$x+y+z=2-A \qquad (1)$$

$$x^2+y^2+z^2=4-A^2 \qquad (2)$$

Ta đưa ra một bất đẳng thức trong đó chứa $x+y+z$ và $x^2+y^2+z^2$. Ta có

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+xz\right) \qquad (3)$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được

$$xy+yz+zx \le x^2+y^2+z^2 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $(x+y+z)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$; xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=z$. Thay các biểu thức $(1),(2)$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$(2-A)^2 \le 3\left(4-A^2\right) \Leftrightarrow A^2-A-2 \le 0$$

Giải tiếp như câu a ta được

$$-m\ A=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x=y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1.$$

$$-m\ A=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x=y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

D. CÁC CHÚ Ý KHI TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

Khi tìm cực trị(GTNN hay GTLN) của một biểu thức, ta có thể đổi biến.

Chẳng hạn, ở ví dụ 1 ta có thể đặt $x-2=y$, khi đó

$$A=(y+1)^2+(y-1)^2=2y^2+2^3.2$$

Suy ra $min\ A=2$ khi $y=0 \Leftrightarrow x=2$.

Khi tìm cực trị của biểu thức, nhiều khi ta thay điều kiện để biểu thức đạt cực trị bởi điều kiện tương đương là biểu thức khác đạt cực trị.

Chẳng hạn:

+) $-A$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ A nhỏ nhất.

+) $\dfrac{1}{B}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ B nhỏ nhất với $B > 0$.

+) C lớn nhất $\Leftrightarrow$ C^2 lớn nhất với $C > 0$.

Ví dụ 10.

Tìm GTNN của $A = \dfrac{x^4 + 1}{(x^2+1)^2}$

Lời giải

Chú ý rằng $A > 0$ nên A lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{A}$ nhỏ nhất và A nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{A}$ lớn nhất. Ta có

$$\frac{1}{A} = \frac{(x^2+1)^2}{x^4+1} = \frac{x^4+2x^2+1}{x^4+1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4+1}$$

Tìm GTLN của A: Ta có $2x^2 \ge 0, x^4 + 1 > 0$ nên $\dfrac{2x^2}{x^4+1} \ge 0 \Rightarrow \dfrac{1}{A} \ge 1 + 0 = 1$

$\min \dfrac{1}{A} = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$. Do đó $\max A = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Tìm GTNN của A: Ta có $2x^2 \le x^4 + 1$ (Dễ chứng minh, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 1$) mà $x^4 + 1 > 0$ nên $\dfrac{2x^2}{x^4+1} \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{A}} \le 1 + 1 = 2$

$\max \dfrac{1}{A} = 2$ khi và chỉ khi $x^2 = 1$. Do đó $\min A = \dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = 1$ hoặc $x = -1$.

1. Cách khác tìm GTLN của A:

$$A = \frac{(x^2+1)^2 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = 1 - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \le 1$$

$\max A = 1$ *khi và chỉ khi* $x = 0$.

2. Cách khác tìm GTNN của A::

Cách 1. *Đặt* $\dfrac{1}{x^2+1} = y$ *như* **Ví dụ 5.**

Cách 2.

$$A=\frac{2x^4+2}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)+(x^2-1)^2}{2(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}+\frac{(x^2-1)^2}{2(x^2+1)^2}\geq\frac{1}{2}$$

$\min A=\frac{1}{2}$ *khi và chỉ khi* $x=\pm 1$

** Khi giải toán cực trị, nhiều khi ta cần xét nhiều khoảng giá trị của biến, sau đó so sánh các giá trị của biểu thức trong các khoảng ấy để tìm GTLN, GTNN.*

Ví dụ 11.

Tìm GTLN và GTNN của: $A=(3x-1)^2-4|3x-1|+5$.

Lời giải

Đặt $|3x-1|=y$ thì

$$A=y^2-4y+5=(y-2)^2+1\geq 1$$

$$\min A=1\Leftrightarrow y=2\Leftrightarrow |3x-1|=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Ví dụ 12.

Tìm GTNN của $B=|x-2|+|x-3|$

Lời giải

Cách 1. – Xét khoảng x < 2 thì $B=2-x+3-x=5-2x$

Do $x<2$ nên $-2x>-4$ do đó $B>-1$ (1)

– Xét $2\leq x\leq 3$ thì $B=x-2+3-x=1$ (2)

– Xét $x>3$ thì $B=x-2+x-3=2x-5$

Do $x>3$ nên $2x>6$, do đó $B>1$ (3)

So sánh (1), (2), (3) ta được $\min B=1$ khi và chỉ khi $2\leq x\leq 3$

Cách 2. Do giá trị tuyệt đối của một số lớn hơn hoặc bằng chính số đó nên

$$B=|x-2|+|3-x|=|x-2|+|3-x|\geq (x-2)+(3-x)=1$$

Do đó $\min B=1\Leftrightarrow \begin{cases}x-2\geq 0\\ 3-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 2\leq x\leq 3.$

Ví dụ 13.

Tìm GTNN của $A=|x-1|+||x-7|+|x-9|$

Lời giải

Do giá trị tuyệt đối của một số lớn hơn hoặc bằng số đó nên

$$|x-1|+|x-9|=|x-1|+|9-x|\geq x-1+9-x=8 \qquad (1)$$

Ta lại có $|x-7|\ge 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A\ge 8$

Do đó $\min A=8\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\9-x\ge 0\\x=7\end{cases}\Leftrightarrow x=7$

** Chú ý: Khi tìm cực trị của một biểu thức, người ta thường sử dụng các bất đẳng thức đã biết. Xem mục các hằng đẳng thức trong chuyên đề Chứng minh bất đẳng thức.*

Ví dụ 14.

Cho $x^2+y^2=52$. Tìm GTNN của $A=2x+3y$

Lời giải

Ta nhận thấy $2x+3y$ và x^2+y^2 đều là các thành phần của bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki $(ax+by)^2\le(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ với $a=2,b=3$.

Theo bất đẳng thức trên, ta có

$$(2x+3y)^2\le(2^2+3^2)(x^2+y^2)=13.52=13.13.4$$

Suy ra $|2x+3y|\le 26$, do đó $2x+3y\le 26$

$\max A=26$ khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3} & (1)\\2x+3y\ge 0 & (2)\end{cases}$

Thay $y=\dfrac{3x}{2}$ vào $x^2+y^2=52$ ta được $x^2+\dfrac{9x^2}{4}=52\Leftrightarrow x=\pm 4$

- Với $x=4$ thì $y=6$, thỏa mãn (2).

- Với $x=-4$ thì $y=-6$, không thỏa mãn (2).

Vậy $\max A=26$ khi và chỉ khi $x=4$ và $y=6$.

Chú ý: Trong các hằng đẳng thức, cần chú ý đến hai mệnh đề sau, cho ta GTLN của tích, GTNN của tổng:

- *Nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.*

- *Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.*

Để chứng minh hai mệnh đề trên, ta dùng bất đẳng thức $(a+b)^2\ge 4ab$:

- *Nếu hai số a và b có a + b = k (hằng số) thì từ* $(a+b)^2\ge 4ab$ *ta có* $ab\le\dfrac{k^2}{4}$, *do đó* $\max(ab)=\dfrac{k^2}{4}$ *khi và chỉ khi a = b.*

- *Nếu hai số dương* a *và* b *có* $ab = p$ *(hằng số) thì* $a+b$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow (a+b)^2$ *nhỏ nhất, do đó* $min(a+b)^2 = 4p$ *khi và chỉ khi* $a = b$.

Ví dụ 15.

Tìm GTNN của $A = (x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2)$

Lời giải

Các biểu thức $x^2 - 3x + 1$ và $21 + 3x - x^2$ có tổng không đổi (bằng 22) nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi $x^2 - 3x + 1 = 21 + 3x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Khi đó $A = 11.11 = 121$.

Vậy $\max A = 121$ khi và chỉ khi $x = 5$ hoặc $x = -2$.

Ví dụ 16.

Tìm GTLN của $A = \dfrac{16x^2 + 4x + 1}{2x}$ với $x > 0$

Lời giải

Viết B dưới dạng $A = 8x + 2 + \dfrac{1}{2x}$. Hai số $8x$ và $\dfrac{1}{2x}$ là hai số dương có tích không đổi và bằng 4 nên tổng của chúng khi nhất khi và chỉ khi $8x = \dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow 16x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$

(chú ý rằng $x > 0$).

Vậy $\min \dfrac{1+1+1}{\frac{1}{2}} = 6$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{4}$.

Chú ý: Trong các ví dụ trên, ta chỉ ra tất cả các giá trị của biến để xảy ra đẳng thức. Tuy nhiên, yêu cầu của bài toán tìm GTNN, GTLN không đòi hỏi như vậy, chỉ cần chứng tỏ rằng tồn tại giá trị của biến để xảy ra đẳng thức.

Ví dụ 17.

Tìm GTLN của $A = ab + bc + cd$, biết rằng *a, b, c, d* là các số không âm có tổng bằng 1.

Lời giải

Cách 1. Giả sử $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Ta có

$$A = ab + bc + cd \leq ab + ac + ad = a(b + c + d)$$

$$= a(1-a) = a - a^2 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

Không cần tìm điều kiện cần và đủ để $A=\frac{1}{4}$, tức là không cần giải tất cả các điều kiện $bc=ac, cd=ad, a=\frac{1}{2}, b+c+d=\frac{1}{2}$ và $b,c,d\geq 0$. Ta chỉ cần chỉ ra $A=\frac{1}{4}$ khi, chẳng hạn $a=b=\frac{1}{2}, c=d=0$.

Vậy $\max A=\frac{1}{4}$ khi. chẳng hạn $a=b=\frac{1}{2}, c=d=0$

Cách 2.

$$A=ab+bc+cd\leq ab+ad+bc+cd=(a+c)(b+d)$$

Áp dụng bất đẳng thức $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Ta có

$$A\leq(a+c)(b+d)\leq\left(\frac{a+c+b+d}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$A=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}a+c=\frac{1}{2}\\ b+d=\frac{1}{2}\\ ad=0\\ a,b,c,d\geq 0\end{cases}$$

Vậy $\max A=\frac{1}{4}$ khi. Chẳng hạn $a=b=\frac{1}{2}, c=d=0$

E Bài toán cực trị với số tự nhiên

Ví dụ 18.

Tìm GTLN của biểu thức $A=\frac{y}{5-(x+y)}$ với x, y là các số tự nhiên.

Lời giải

Ta có $x+y\neq 5$.

Xét $x+y\leq 4$:

- Nếu $y=0$ thì $A=0$

- Nếu $1\leq y\leq 3$ thì $A=\frac{y}{5-(x+y)}\leq 3$

- Nếu $y=4$ thì $x=1$ và $A=4$

Xét $x+y\geq 6$ thì $A=\frac{y}{5-(x+y)}\leq 0$

So sánh các giá trị trên của A, ta thấy $\max A = 4$ khi và chỉ khi $x = 0, y = 4$

Ví dụ 19.
Tìm GTNN và GTLN của tích xy, biết rằng x và y là các số nguyên dương thỏa mãn $x + y = 2005$.

Lời giải

Ta có

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 2005^2 - (x-y)^2$$

Giả sử $x > y$ (không thể xảy ra $x = y$). Ta có

xy lớn nhất $\Leftrightarrow x - y$ nhỏ nhất; xy nhỏ nhất $\Leftrightarrow x - y$ lớn nhất.

Do $1 \le y < x \le 2004$ nên $1 \le x - y \le 2003$. Ta có

+ $\min(x-y) = 1$ khi và chỉ khi $x = 1003, y = 1002$

+ $\max(x-y) = 2003$ khi và chỉ khi $x = 2004, y = 1$.

Do đó

+ $max(xy) = 1005006$ khi và chỉ khi $x = 1003, y = 1002$

+ $\min(xy) = 2004$ khi và chỉ khi $x = 2004, y = 1$.

Ví dụ 20.
Tìm GTNN của biểu thức $A = |11^m - 5^n|$ với m, n là các số nguyên dương.

Lời giải

Ta thấy 11^m tận cùng bằng 1, còn 5^n tận cùng bằng 5.

Nếu $11^m > 5^n$ thì A tận cùng bằng 6, nếu $11^m < 5^n$ thì A tận cùng bằng 4.

Ta chỉ ra một trường hợp $A = 4$: với $m = 2, n = 3$ thì $A = |121 - 125| = 4$.

Như vậy $\min A = 4$ khi, chẳng hạn $m = 2, n = 3$.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1.

a) Tìm GTNN của $A = x^2 - 5x + 1$

b) Tìm GTLN của $B = 1 - x^2 + 3x$

Lời giải

a) Ta có

$$A = x^2 - 5x + 1 = \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) - \frac{21}{4}$$
$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$$
$$\geq -\frac{21}{4}$$

Vậy $\min A = -\frac{21}{4}$ đạt tại $x = \frac{5}{2}$

b) Ta có

$$B = 1 - x^2 + 3x = -\left(x^2 - 3x\right) + 1$$
$$= -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} + 1$$
$$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$
$$\leq \frac{13}{4}$$

Vậy $\max B = \frac{13}{4}$ đạt tại $x = \frac{3}{2}$.

Bài 2.

Tìm GTNN của các biểu thức

a) $A = (x+8)^4 + (x+6)^4$

b) $B = (0,5x^2 + x)^2 - 3.|0,5x^2 + x|$

c) $C = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

d) $D = (x^2 + x - 6)(x^2 + x + 2)$

Lời giải

a) Đặt $y = x + 7$, ta được

$$A = (y+1)^4 + (y-1)^4 = [(y+1)^2 + (y-1)^2]^2 - 2(y+1)^2(y-1)^2$$
$$= (2y^2 + 2)^2 - 2(y^2 - 1)^2 = 4y^4 + 8y^2 + 4 - 2y^4 + 4y^2 - 2$$
$$= 2y^4 + 12y^2 + 2$$
$$\geq 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $y = 0 \Leftrightarrow x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$

Vậy $\min A = 2$ đạt tại $x = -7$

b) Đặt $t = |0,5x^2 + x|, t \geq 0$. Ta có

$$B=t^2-3t=\left(t^2-3t+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}$$
$$=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$
$$\geq -\frac{9}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$t=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{1}{2}x^2+x\right|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}x^2+x=\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}x^2+x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-3=0\\ x^2+2x+3=0(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\end{array}\right.$$

Vậy $\min B=-\frac{9}{4}$ đạt tại $x=1, x=-3$

c) Ta có

$$C=x^4-2x^3+3x^2-2x+1=(x^2-x+1)^2=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2$$
$$\Rightarrow C\geq\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Vậy $\min C=\frac{9}{16}$ đạt tại $x=\frac{1}{2}$

d) Đặt $t=x^2+x$, ta có

$$D=(t-6)(t+2)=t^2-4t-12=t^2-4t+4-16=(t-2)^2-16\geq -16$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$t-2=0\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x^2+x=2$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Vậy $\min D=-16$ đạt tại $x=-1; x=-2$.

🗁 **Bài 3.**

Tìm GTNN của các biểu thức

a) $A = |x-3| + |x-7|$ b) $B = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2|$

Lời giải

a) Ta có

$$A = |x-3| + |x-7| \geq |x-3+7-x| = 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 7 \end{cases}$

Vậy $\min A = 4$ đạt khi $3 \leq x \leq 7$

b) Ta có $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x nên

$$B = x^2 - x + 1 + |2 + x - x^2| \geq x^2 - x + 1 + 2 + x - x^2 = 3$$

Dấu bằng xảy ra khi $2 + x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$

Vậy $\min B = 3$ đạt được khi $-1 \leq x \leq 2$.

Bài 4.

Cho $x + 2y = 1$. Tìm GTNN của $x^2 + 2y^2$.

Lời giải

Thay $x = 1 - 2y$ vào $A = x^2 + 2y^2$, ta được

$$A = 6y^2 - 4y + 1 = 6\left(y^2 - \frac{2}{3}y\right) + 1 = 6\left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) - \frac{2}{3} + 1$$
$$= 6\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$
$$\geq \frac{1}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1 - 2y = \frac{1}{3}$.

Vậy $\min A = \frac{1}{3}$ đạt tại $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$.

Bài 5.

Cho $4x - 3y = 7$. Tìm GTNN của $2x^2 + 5y^2$.

Lời giải

Thay $y = \frac{4x-7}{3}$ vào $B = 2x^2 + 5y^2$ ta được

$$9B = 98x^2 - 280x + 245 = 2(7x-10)^2 + 45 \geq 45.$$

Dấu bằng xảy ra khi $7x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{7}, y = -\dfrac{3}{7}$

Vậy $\min B = 5$ đạt tại $x = \dfrac{10}{7}, y = -\dfrac{3}{7}$.

Bài 6.

Cho $a + b = 1$. Tìm GTNN của $a^4 + b^4$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \\
&\Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab \\
&\Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\Leftrightarrow 2(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)^2$ (2)

Bình phương hai vế của (1) ta được

$$\begin{aligned}
&\left(a^2+b^2\right)^2 \geq \frac{(a+b)^4}{4} \\
&\Rightarrow 2(a^4+b^4) \geq \frac{(a+b)^4}{4} \quad \text{do (2)} \\
&\Rightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{(a+b)^4}{8} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$ và vì $a + b = 1$ nên suy ra $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\min A = \dfrac{1}{8}$ đạt khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Bài 7.

Cho $a + b = 1$. Tìm GTNN của $a^3 + b^3$.

Lời giải

Đặt $A = a^3 + b^3$.

Ta có $ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$. Từ đó ta có

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3=1-3ab\ge 1-3.\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Vậy $\min A=\frac{1}{4}$ đạt khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 8.

Tìm GTNN của các biểu thức

a) $A=2x^2+y^2-2xy-2x+3$

b) $B=x^2-2xy+2y^2+2x-10y+17$

Lời giải

a) Ta có $A=x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+2=(x-y)^2+(x-1)^2+2\ge 2$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases}x-y=0\\x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$$

Vậy $\min A=2$ đạt được khi $x=y=1$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}B&=x^2-2xy+y^2+2x-2y+1+y^2-8y+16\\&=(x-y)^2+2(x-y)+1+(y-4)^2\\&=(x-y+1)^2+(y-4)^2\ge 0\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases}x-y+1=0\\y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$$

Vậy $\min B=0$ đạt được khi $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$.

Bài 9.

1) Tìm GTLN của biểu thức $A=\dfrac{3x^2-6x+17}{x^2-2x+5}$

2) Tìm GTNN của biểu thức $B=\dfrac{2x^2-16x+41}{x^2-8x+22}$

Lời giải

1) Thực hiện phép chia đa thức ta được $A=3+\dfrac{2}{x^2-2x+5}$

Mặt khác $x^2-2x+5=x^2-2x+1+4=(x-1)^2+4\ge 4$. Suy ra

$$\frac{2}{x^2-2x+5}\le\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 3+\frac{2}{x^2-2x+5}\le 3+\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow A\le\frac{7}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy $\max A=\dfrac{7}{2}$ đạt tại $x=1$.

2) Thực hiện phép chia đa thức ta được $B=2-\dfrac{3}{x^2-8x+22}$.

Mặt khác $x^2-8x+22=x^2-8x+16+6=(x-4)^2+6\ge 6$. Suy ra

$$\frac{3}{x^2-8x+22}\le\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{x^2-8x+22}\ge-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2-\frac{3}{x^2-8x+22}\ge 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x-4=0\Leftrightarrow x=4$

Vậy $\min B=\dfrac{3}{2}$ đạt tại $x=4$

Bài 10.

Tìm GTLN của các biểu thức

a) $A=\dfrac{x}{(x+10)^2}$ b) $B=\dfrac{x}{(x+100)^2}$

Lời giải

a) Đặt $y=x+10$, ta được $A=\dfrac{1}{y}-\dfrac{10}{y^2}$. Đặt $\dfrac{1}{y}=z$, ta được

$$A=-10z^2+z=-10\left(z^2-\frac{1}{10}z\right)$$
$$=-10\left(z^2-\frac{1}{10}z+\frac{1}{400}\right)+\frac{1}{40}$$

$$=-10\left(z-\frac{1}{20}\right)^2+\frac{1}{40}$$

$$\le\frac{1}{40}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$z=\frac{1}{20}\Leftrightarrow y=\frac{1}{z}=20\Leftrightarrow x=y-10=10$$

Vậy $\max A=\frac{1}{40}$ đạt tại $x=10$

b) Đặt $y=x+100$, ta được $A=\frac{1}{y}-\frac{100}{y^2}$. Đặt $\frac{1}{y}=z$, ta được

$$A=-100z^2+z=-100\left(z^2-\frac{1}{100}z\right)$$

$$=-100\left(z^2-\frac{1}{100}z+\frac{1}{40000}\right)+\frac{1}{400}$$

$$=-100\left(z-\frac{1}{200}\right)^2+\frac{1}{400}$$

$$\le\frac{1}{400}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$z=\frac{1}{200}\Leftrightarrow y=\frac{1}{z}=200\Leftrightarrow x=y-100=100$$

Vậy $\max A=\frac{1}{400}$ đạt tại $x=100$.

Bài 11.

Tìm GTNN và GTLN của các biểu thức

a) $A=\frac{27-12x}{x^2+9}$ b) $B=\frac{8x+3}{4x^2+1}$

Lời giải

a). Ta có

$$A=\frac{27-12x}{x^2+9}$$

$$=\frac{\left(x^2-12x+36\right)-\left(x^2+9\right)}{x^2+9}$$

$$= \frac{(x-6)^2}{x^2+9} - 1$$

$$\geq -1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x-6=0 \Leftrightarrow x=6$.

Vậy $\min A = -1$ đạt tại $x=6$

Ta có

$$A = \frac{27-12x}{x^2+9}$$

$$= \frac{\left(4x^2+36\right)-\left(4x^2+12x+9\right)}{x^2+9}$$

$$= 4 - \frac{(2x+3)^2}{x^2+9}$$

$$\leq 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$.

Vậy $\max A = 4$ đạt tại $x=-\frac{2}{3}$.

b) Ta có

$$B = \frac{8x+3}{4x^2+1} = \frac{4x^2+8x+4-4x^2-1}{4x^2+1}$$

$$= \frac{4(x+1)^2}{4x^2+1} - 1$$

$$\geq -1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $\min B = -1$ đạt tại $x=-1$.

Ta có

$$B = \frac{16x^2+4-16x^2+8x-1}{4x^2+1}$$

$$= \frac{4\left(4x^2+1\right)-(4x-1)^2}{4x^2+1}$$

$$= 4 - \frac{(4x-1)^2}{4x^2+1}$$

$$\leq 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $4x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$.

Vậy $\max B = 4$ đạt tại $x = \frac{1}{4}$

Bài 12.

1. Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

2. Tìm GTLN của biểu thức $B = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

Lời giải

1. Ta có

$$A = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{(x+y)^2} = 1 - \frac{2xy}{(x+y)^2}$$

Mặt khác

$$(x-y)^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 2xy$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \ge 4xy$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy$$
$$\Leftrightarrow \frac{2xy}{(x+y)^2} \le \frac{1}{2}$$

Suy ra $A \ge 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

Vậy $\min A = \frac{1}{2}$ đạt được khi $x = y$.

2. Với $x = 0$ thì $B = \frac{x^2}{x^4 + 1} = 0$.

Với $x \ne 0$ thì ta có

$$\left(x^2 - 1\right)^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^4 + 1 \ge 2x^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^4 + 1} \le \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$.

Vậy $\max B = \frac{1}{2}$ đạt tại $x = \pm 1$

Bài 13.

Tìm GTNN của các biểu thức

a) $A=\dfrac{(x+4)(x+9)}{x}$ với $x>0$

b) $B=\dfrac{(x+100)^2}{x}$ với $x>0$

c) $C=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x-2}$ với $x>2$

Lời giải

a) Ta có

$$A=\frac{x^2+13x+36}{x}=x+\frac{36}{x}+13$$

Các số dương x và $\dfrac{36}{x}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$x=\frac{36}{x}\Rightarrow x=6\Rightarrow A=6+\frac{36}{6}+13=25$$

Vậy $\min A=25$ đạt tại $x=6$

b). Ta có

$$B=\frac{x^2+200x+100000}{x}=\left(x+\frac{10000}{x}\right)+200$$

Các số dương x và $\dfrac{10000}{x}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$x=\frac{10000}{x}\Rightarrow x=100\Rightarrow A=100+\frac{10000}{100}+200=400$$

Vậy $\min A=400$ đạt tại $x=100$.

Bài 14.

Cho $x+y=1, x>0, y>0$. Tìm GTNN của các biểu thức

1. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

2. $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}$($a$ và b là hằng số dương đã cho)

3. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$

Lời giải

1. Ta có $a=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{xy}$. Do $x,y>0$ nên $\dfrac{1}{xy}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow xy$ lớn nhất. Mặt khác

$$2xy\le x^2+y^2\Leftrightarrow 4xy\le(x+y)^2=1\Leftrightarrow xy\le\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A\ge 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$ (do $x+y=1$)

Vậy $\min A = 4$ đạt khi $x = y = \frac{1}{2}$.

2. Ta có

$$B = \frac{a^2 \cdot 1}{x} + \frac{b^2 \cdot 1}{y} = \frac{a^2\left(x+y\right)}{x} + \frac{b^2\left(x+y\right)}{y}$$

$$= a^2 + \frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} + b^2$$

$$= \left(\frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y}\right) + a^2 + b^2$$

Các số dương $\frac{a^2 y}{x}$ và $\frac{b^2 x}{y}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\frac{a^2 y}{x} = \frac{b^2 x}{y} \Leftrightarrow a^2 y^2 = b^2 x^2 \Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow a\left(1-x\right) = bx \Leftrightarrow x = \frac{a}{a+b}$$

Khi $x = \frac{a}{a+b}$ ta tính được $y = \frac{b}{a+b}$ và $B = (a+b)^2$.

Vậy $\min B = (a+b)^2$ đạt khi $x = \frac{a}{a+b}, y = \frac{b}{a+b}$.

Bài 15.

Cho các số dương x và y thỏa mãn $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$. Tìm GTNN của các biểu thức

a) $A = xy$.

b) $B = x + y$

Lời giải

a) Áp dụng $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ta có

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy} \Rightarrow xy \geq 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y$. Vì $x, y > 0$ nên ta có $xy = 4 \Leftrightarrow x = y = 2$.

Vậy $\min A = 4$ đạt tại $x = y = 2$.

b) Từ kết quả câu a) ta có

$$(x+y)^2 \geq 4xy \geq 16$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq 4 \text{ do } x + y \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi $xy = 4 \Leftrightarrow x = y = 2$.

Vậy $\min B = 4$ đạt tại $x = y = 2$.

Bài 16.

Tìm GTNN của các biểu thức

1. $A=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ với $a,b>0$

2. $B=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ với $a,b,c>0$.

Lời giải

1. Ta có $A=2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$.

Các số dương $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow a=b$$

Khi đó $A=2+1+1=4$.

Vậy $\min A=4$ đạt tại $a=b$.

2. Áp dụng tính chất: "Nếu hai số dương không đổi thì tổng của của chúng nhỏ nhất khi hai số dương đó bằng nhau" ta có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,\text{ dấu bằng xảy ra khi } a=b$$

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2,\text{ dấu bằng xảy ra khi } a=c$$

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2,\text{ dấu bằng xảy ra khi } b=c$$

$$\Rightarrow B=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 9$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Vậy $\min B=9$ đạt tại $a=b=c$.

Bài 17.

Cho các số dương x,y,z có tổng bằng 1. Tìm GTNN của $A=\frac{x+y}{xyz}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $1=((x+y)+z)^2$. Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2\geq 4ab$, ta có

$$1=((x+y)+z)^2\geq 4(x+y)z$$

Nhân hai vế với số dương $\frac{x+y}{xyz}$ ta được

$$\frac{x+y}{xyz}\geq\frac{4z(x+y)^2}{xyz}\geq\frac{4z\cdot 4xy}{xyz}=16$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x+y=z \\ x=y \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{2}$

Vậy $\min A=16$ đạt tại $x=y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{2}$.

Bài 18.

Tìm GTLN của tích xy với x, y là các số dương, $x<60, y\geq 60$ và $x+y=100$.

Lời giải

Cách 1. Ta có $x<60, y\geq 60$ nên

$$(60-x)(60-y)\leq 0$$

$$\Rightarrow 3600-60(x+y)+xy\leq 0$$

$$\Rightarrow 3600-6000+xy\leq 0$$

$$\Rightarrow xy\leq 2400$$

Dấu bằng xảy ra khi $60-y=0 \Leftrightarrow y=60 \Rightarrow x=40$.

Vậy $\max(xy)=2400$ đạt tại $x=40, y=60$.

Cách 2. Đặt $y=60+t$ tới $t\geq 0$. Ta có

$$xy=(100-y)y=(100-60-t)(60+t)=(40-t)(60+t)$$

$$=2400-20t-t^2\leq 2400$$

Dấu bằng xảy ra khi $t=0 \Leftrightarrow y=60 \Rightarrow x=40$ Vậy $\max(xy)=2400$ đạt tại $x=40, y=60$

Bài 19.

Tìm GTLN của các biểu thức

1. $A=(x+z)(y+t)$ biết rằng $x^2+y^2+z^2+t^2=1$.

2. $B=(x+z)(y+t)$ biết rằng $x^2+y^2+2z^2+2t^2=1$.

Lời giải

1. $A=xy+xt+yz+zt$. Ta có

$$\begin{cases} 2xy\leq x^2+y^2 \\ 2xt\leq x^2+t^2 \\ 2yz\leq y^2+z^2 \\ 2zt\leq z^2+t^2 \end{cases} \Rightarrow 2A\leq 2\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)=1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=t \Rightarrow 4x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$.

Vậy max $A=1$ đạt tại $x=y=z=t=\pm\frac{1}{2}$.

2. $B=xy+xt+yz+zt$. Ta có

$$\begin{cases}2xy \le x^2+y^2\\ 2xt \le x^2+t^2\\ 2zt \le z^2+t^2\\ 0 \le (y-2z)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4xy \le 2x^2+2y^2\\ 4xt \le 2x^2+2t^2\\ 4zt \le 2z^2+2t^2\\ 4yz \le y^2+z^2\end{cases} \Rightarrow 4B \le 3\left(x^2+y^2+2z^2+2t^2\right)=3$$

Vậy $\max B=\dfrac{3}{4}$ đạt được khi $x=y, y=z, z=t, x=2t$ và $x^2+y^2+2z^2+2t^2=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ z=t=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=y=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\\ z=t=\dfrac{-1}{2\sqrt{3}}\end{cases}$$

Bài 20.

Tìm GTNN của các biểu thức

1. $A=|x-2|+|x-3|+|x-4|$.

2. $B=|x-1|+|x+2|+|x-3|+|x-4|$.

Lời giải

1. $A=|x-2|+|x-3|+|x-4|$. Ta có

$$\begin{cases}|x-2|+|4-x| \ge x-2+4-x=2\\ |x-3| \ge 0\end{cases} \Rightarrow A \ge 2$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases}x-2 \ge 0\\ 4-x \ge 0\\ x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2 \le x \le 4\\ x=3\end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Vậy $\min A=2$ đạt tại $a=3$.

2. $A=|x-1|+|3-x|+|x-2|+|4-x|$. Ta có

$$\begin{cases}|x-1|+|3-x| \ge x-1+3-x=2\\ |x-2|+|4-x| \ge x-2+4-x=2\end{cases} \Rightarrow A \ge 2+2=4$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases}x-1 \ge 0\\ 3-x \ge 0\\ x-2=0\\ 4-x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 \le x \le 3\\ 2 \le x \le 4\end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 3$$

Vậy $\min B=4$ đạt được khi $2 \le x \le 3$

Bài 21.

Tìm GTLN của $A=\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{8-(x+y)}$ với $x, y \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Ta xét hai trường hợp

1. $x+y<8$. Ta có 3 trường hợp nhỏ

– Nếu $y=0$ thì $A=1$.

– Nếu $1\le y\le 6$ thì $\dfrac{x}{x+y}<1, \dfrac{y}{8-(x+y)}<6 \Rightarrow A<7$.

– Nếu $y=7$ thì $x=0$ và $A=7$

2. $x+y\ge 8$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} \dfrac{y}{8-(x+y)}\le 0 \\ \dfrac{x}{x+y}\le 1 \end{cases} \Rightarrow A\le 1$$

So sánh các giá trị trên của A, ta có $\max A=7$ đạt tại $x=0, y=7$

Bài 22.

Tìm GTNN của $A=\left|36^m-5^n\right|$ với m,n là các số nguyên dương.

Lời giải

Ta có 36^m tận cùng bằng 6, còn 5^n tận cùng bằng $5.$ Do đó

- Nếu $36^m>5^n$ thì 6^m-5^n tận cùng bằng 1.
- Nếu $36^m<5^n$ thì 6^m-5^n tận cùng bằng 9.

Ta xét các khả năng sau

- Khả năng $A=1$. Ta có $36^m-5^n=1 \Leftrightarrow 36^m-1=5^n$. Đẳng thức này không xảy ra vì vế trái chia hết cho 35 nên chia hết cho 7, còn vế phải không chia hết cho 7.
- Khả năng $A=9$. Ta có $5^n-36^m=9 \Rightarrow 5^n$ chia hết cho 9, vô lí.
- Khả năng $A=11$. Xảy ra được khả năng này, chẳng hạn với $m=1, n=2$ thì $A=\left|36-5^2\right|=11$.

Vậy $\min A=11$

Bài 23.

Tìm GTNN của biểu thức $A=x^2+4y$ biết rằng x,y là các số tự nhiên và A không phải là số chính phương.

Lời giải

Số tự nhiên A không phải là số chính phương nên $A>1$.

- Xét $A=2$, ta có $2=x^2+4y$ nên x là số chẵn. Khi đó vế phải chia hết cho 4, vế trái không chia hết cho 4, loại.
- Xét $A=3$, ta có $3=x^2+4y$ nên x là số lẻ. Khi đó vế phải chia cho 4 dư 1 còn vế trái chia cho 4 dư 3, loại.

- Xét $A=5$, ta có $5=x^2+4y$. Khi đó $x=y=1$.

Vậy $\min A=5$

Bài 24.

Cho $A=\dfrac{x^4+y^4}{15}$ trong đó x,y và A là các số nguyên dương

1. Chứng minh rằng x và y đều chia hết cho 3.

2. Chứng minh rằng x và y đều chia hết cho 5.

3. Tìm GTNN của A.

Lời giải

1. Dễ thấy nếu số nguyên a không chia hết cho 3 thì a^4 chia 3 dư 1. Do A là số tự nhiên nên $x^4+y^4 \vdots 15$, do đó

$$x^4+y^4 \vdots 3 \qquad (1)$$

Ta sẽ chứng minh $x \vdots 3$.

Giả sử x không chia hết cho 3. Thế thì x^4 không chia hết cho $3, y^4$ không chia hết cho $3, y$ không chia hết cho 3. Do x và y không chia hết cho 3 nên x^4 và y^4 chia 3 dư 1, suy ra x^4+y^4 chia 3 dư 2, trái với (1). Vậy $x \vdots 3$.

Chứng minh tương tự, ta được $y \vdots 3$.

2. Dễ thấy nếu a không chia hết cho 5 thì a^4 chia cho 5 dư 1. Do A là số tự nhiên nên $x^4+y^4 \vdots 15$, do đó

$$x^4+y^4 \vdots 5 \qquad (2)$$

Ta sẽ chứng minh $x \vdots 5$.

Giả sử x không chia hết cho 5. Thế thì x^4 không chia hết cho $5, y^4$ không chia hết cho $5, y$ không chia hết cho 5. Do x và y không chia hết cho 5 nên x^4 và y^4 chia 5 dư 1, suy ra x^4+y^4 chia 5 dư 2, trái với (2). Vậy $x \vdots 5$.

Chứng minh tương tự, ta được $y \vdots 5$.

3. Từ câu a) và câu b) suy ra x và y chia hết cho 15. Do x,y nguyên dương nên $x \ge 15, y \ge 15$, do đó $x^4+y^4 \ge 15^4+15^4$. Suy ra

$$A=\frac{x^4+y^4}{15} \ge \frac{15^4+15^4}{15}=6750$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=15$.

Vậy min $A=6750$ đạt tại $x=y=15$.

Bài 25.

Tìm số chính phương lớn nhất biết rằng nếu xóa hai chữ số tận cùng của nó (hai chữ số này không cùng bằng 0), ta lại được một số chính phương.

Lời giải

Gọi số chính phương phải tìm là n^2, ta có $n^2 = 100A + b, (A$ là số trăm, $1 \le b \le 99)$. Theo đề bài, $100A$ là số chính phương nên A là số chính phương.

Đặt $A = a^2, (a \in \mathbb{N})$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất của a. Ta có

$$n^2 > 100a^2 \Rightarrow n > 10a \Rightarrow n \ge 10a + 1$$

$$\Rightarrow n^2 \ge (10a+1)^2 \Rightarrow 100a^2 + b \ge 100a^2 + 20a + 1 \Rightarrow b \ge 20a + 1$$

Do $b \le 99$ nên $20a + 1 \ge 99 \Rightarrow a \le 4$

Ta có $n^2 = 100a^2 + b \le 1600 + 99 = 1699$. Kiểm tra $42^2 = 1764, 41^2 = 1681$. Số chính phương lớn nhất phải tìm là $1681 = 41^2$.

PHẦN II

HÌNH HỌC

Chương 1

TỨ GIÁC

Bài 1

Tứ giác

1 Tóm tắt lý thuyết

Phương pháp giải:

Định nghĩa 1. Tứ giác $ABCD$ là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

✓ *Các tứ giác được nghiên cứu trong chương là tứ giác lồi, đó là tứ giác luôn nằm trong một nữa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bát kì canh nào của tứ giác. Khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.*

Tính chất 1. Tổng bốn góc của một tứ giác bằng 360°.

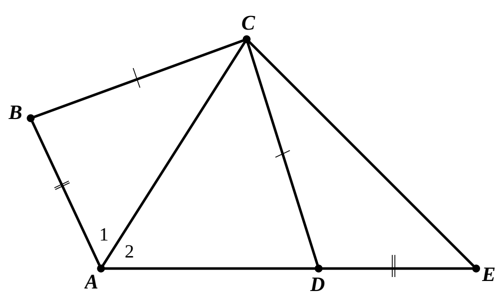
2 Một số ví dụ

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1.

Tứ giác $ABCD$ có $\hat{B}+\hat{D}=180^\circ, CB=CD.$. Chứng minh rằng AC là tia phân giác của góc $\hat{A}$.

Lời giải



Trên tia đối của tia DA lấy diềm E sao cho $DE=AB$.

Ta có $\hat{B}+\widehat{ADC}=180^\circ, \widehat{EDC}+\widehat{ADC}=180^\circ$ nên $\hat{B}=\widehat{EDC}$.

Ta có $\Delta ABC=\Delta EDC$ (c.g.c). Suy ra $\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{E}\\ AC=EC\end{cases}$ (1)

Tam giác ACE có $AC=EC$ nên là tam giác cân,

do đó $\hat{A}_2=\hat{E}\,(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra AC là tia phân giác của góc A.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1.

Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc, $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm, $AD = 4$ cm. Tính độ dài CD.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD

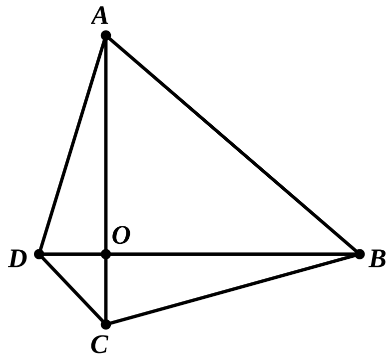
Ta có:

$$OC^2 + OD^2 + OB^2 + OA^2 = BC^2 + AD^2$$
$$= 7^2 + 4^2 = 65$$

và $OA^2 + OB^2 = AB^2 = 64$

Suy ra $OC^2 + OD^2 = 1$ hay $CD^2 = 1$

Vậy $CD = 1$



Bài 2.

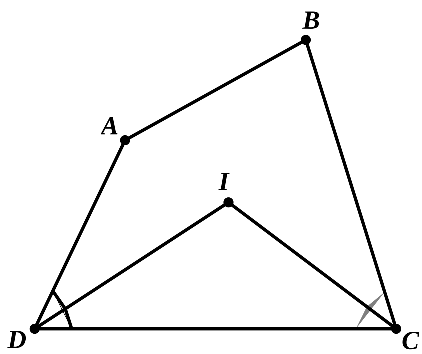
Tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} - \hat{B} = 50^\circ$. Các tia phân giác của góc C và D cắt nhau tại I và $\widehat{CDI} = 115^\circ$. Tính các góc $\hat{A}$ và $\hat{B}$.

Lời giải

Ta tính được $\hat{C} + \hat{D} = 130^\circ$, do đó $\hat{A} + \hat{B} = 230^\circ$.

Ta lại có $\hat{A} - \hat{B} = 50^\circ$.

Từ đó $\hat{A} = 140^\circ, \hat{B} = 90^\circ$.



Bài 3.

Cho tứ giác $ABCD, E$ là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, F là giao điểm của các đường thẳng BC và AD. Các tia phân giác của các góc E và F cắt nhau ở I. Chứng minh rằng

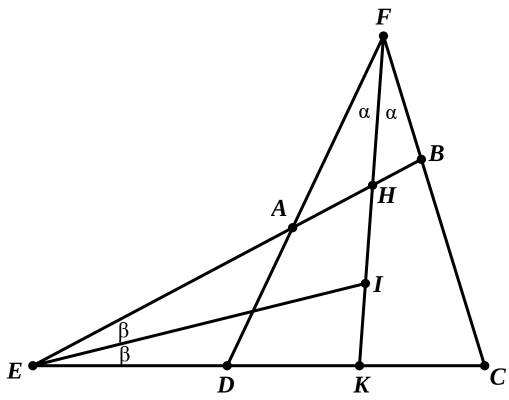
1) Nếu $\widehat{BAD} = 130^\circ, \widehat{BCD} = 50^\circ$ thì IE vuông góc với IF.

2) Góc EIF bằng nửa tổng của một trong hai cặp góc đối đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Lời giải

1) Cách giải tổng quát được áp dụng ở câu b.

2) Giả sử E và F có vị trí như trên hình bên, các tia phân giác của góc E và F cắt nhau tại I. Trước hết ta chứng minh $\widehat{BAD}+\hat{C}=2\widehat{EIF}$.



Thật vậy, gọi H và K là giao điểm của FI với AB và CD. Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có

$\widehat{BAD}=\hat{H}_1+\alpha, \hat{C}=\hat{K}_1-\alpha$ nên

$\widehat{BAD}+\hat{C}=\widehat{H_1}+\widehat{K_1}=(\widehat{EIF}+\widehat{\beta})+(\widehat{EIF}-\widehat{\beta})=2\widehat{EIF}$

Do đó $\widehat{EIF}=\left(\widehat{BAD}+\hat{C}\right):2$

Bài 4.

Chứng minh rằng nếu M là giao điểm các đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì $MA+MB+MC+MD$ nhỏ hơn chu vi nhưng lớn hơn nửa chu vi tứ giác.

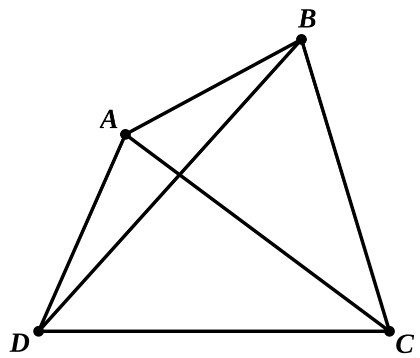
Bài 5.

So sánh độ dài cạnh AB và đường chéo AC của tứ giác $ABCD$ biết rằng chu vi tam giác ABD nhỏ hơn hoặc bằng chu vi tam giác ACD.

Lời giải

Cộng từng vế $\begin{cases} AB+CD<AC+BD \\ AB+BD\le AC+CD \end{cases}$

Suy ra $2AB<2AC \Rightarrow AB<AC$



Bài 6.

Tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo, $AB=6, OA=8, OB=4, OD=6$. Tính độ dài AD.

Lời giải

Kẻ $AH\perp OB$. Đặt $BH=x, AH=y$. Ta có hệ $\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ (x+4)^2+y^2=64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y^2=\dfrac{135}{4} \end{cases}$.

Do đó $AD^2=HD^2+AH^2=11,5^2+\dfrac{135}{4}=166$.

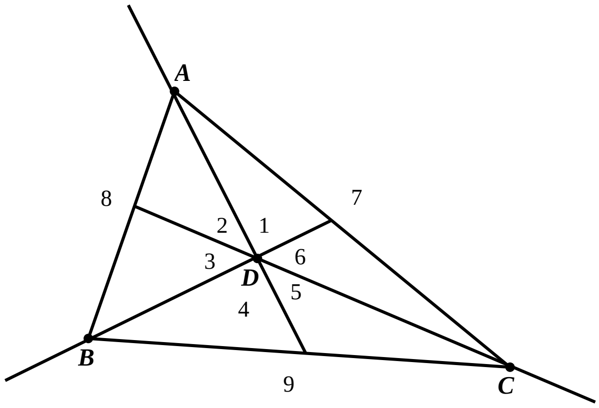
Vậy $AD=\sqrt{166}$

Bài 7.

Cho năm điểm trên mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng bao giờ cũng có thể chọn ra được bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.

Lời giải

Xét bốn điểm A, B, C, D. Nếu bốn điểm đó là đỉnh của một tứ giác lồi thì bài toán được chứng minh xong. Nếu bố điểm đó không là đỉnh của một tứ giác lồi thì tồn tại một điểm (giả sử điểm) nằm trong tam giác có đỉnh là ba điểm còn lại (hình bên). Chia mặt phẳng thành chín miền như hình vẽ, điểm thứ năm E nằm bên trong một miền (vì trong năm điểm không có ba điểm thẳng hàng).Nếu E thuộc các miền $1,4,8$, ta chọn bốn điểm là A, D, B. Nếu E thuộc các miền 2, 5, 7 ta chọn E và A, D, C. Nếu E thuộc các miền $3,6,9$ ta chọn E, B $, D, C$.



Bài 2

HÌNH THANG

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1. Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song

Định nghĩa 2. Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Tính chất 1. Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau.

Để chứng minh một hình thang là hình thang cân, ta chứng minh hình thang đó có hai góc kề một đáy bằng nhau, hoăc có hai đường chéo bằng nhau.

Định nghĩa 3. Đoạn thẳng nối chung điểm hai cạnh bên của hình thang là đường trung bình của hình thang.

Tính chất 2. Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai và là đường trung bình của hình thang.

2 Một số ví dụ

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1.

Cho tam giác ABC có $BC = a$. Các đường trung tuyến BD, CE. Lấy các điểm M, N trên cạnh BC sao cho $BM = MN = NC$. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm AN và CE. Tính độ dài IK.

Lời giải

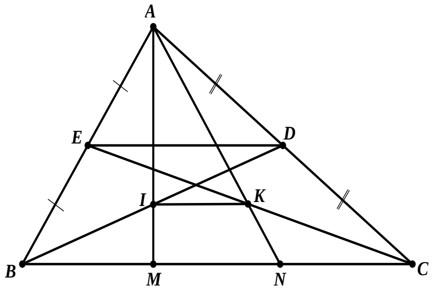
Dễ thấy DN là đường trung bình của ΔACM nên $DN \parallel AM$

Trong ΔBND có $\begin{cases} BM = MN \\ MI \parallel ND \end{cases}$ nên I là trung điểm của $BD.$

Tương tự K là trung điểm của $CE.$

Hình thang $BEDC$ có I và K là trung điểm của hai đường chéo nên dễ dàng chứng minh được

$$IK = \frac{BC - DE}{2} = \frac{a - \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}.$$



Ví dụ 2.

Một hình thang cân có các đường cao bằng nửa tổng hai đáy. Tính góc tạo bởi hai đường chéo của hình thang.

Lời giải

Xét hình thang cân $ABCD\left(AB \parallel CD\right)$, đường cao BH và

$$BH = \frac{AB + CD}{2} \ (1)$$

Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở $E.$

Ta có $\begin{cases} BE = AC \\ AC = BD \end{cases}$ nên $BE = BD$

Tam giác BDE cân tại $B,$ đường cao BH nên

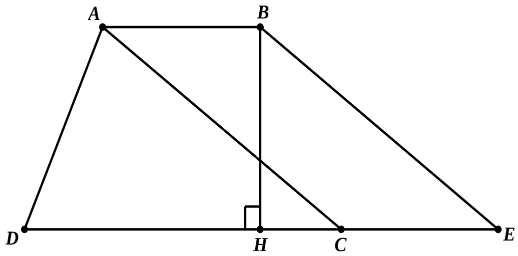
$$DH = HE = \frac{DE}{2} \ (2).$$

Ta có $AB = CE$ nên $AB + CD = CE + CD = DE$ (3).

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra $BH = DH = HE.$

Các tam giác BHD, BHE vuông cân tại H nên $\widehat{DBE} = 90^\circ$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp BE \\ AC \parallel BE \end{cases}$ nên $DB \perp AC$.



3 Bài tập tự luyện

Bài 1.

Cho một hình thang có hai đáy không bằng nhau. Chứng minh rằng

1) Tổng hai góc kề đáy nhỏ lớn hơn tổng hai góc kề đáy lớn.

2) Tổng hai cạnh bên lớn hơn hiệu hai đáy.

Lời giải

Qua một đỉnh của đáy nhỏ, kẻ đường thẳng song song với cạnh bên của hình thang.

Bài 2.

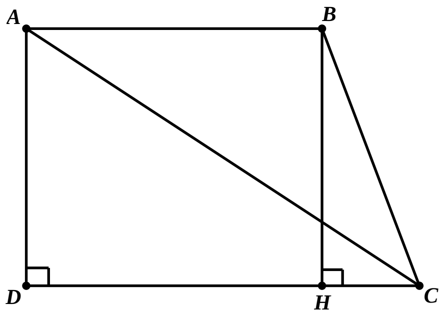
Hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$, đáy nhỏ $AB = 11$ cm, $AD = 12$ cm, $BC = 13$ cm. Tính độ dài $AC.$

Lời giải

Kẻ $BH \perp CD$

Ta tính được $CH = 5$ cm, $CD = 16$ cm.

Từ đó $= 20$ cm.



Bài 3.

Hình thang $ABCD\left(AB \parallel CD\right)$ có E là trung điểm của $BC, \widehat{AED} = 90^{\circ}$. Chứng minh rằng DE là tia phân giác của góc D.

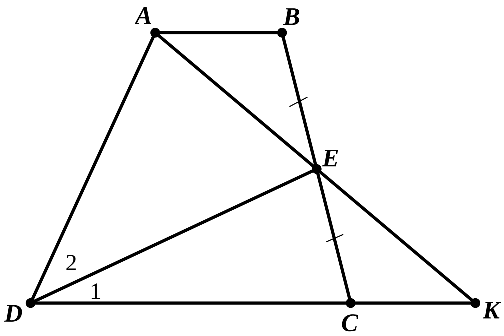
Lời giải

Gọi K là giao điểm của AE và DC.

Khi đó $\Delta ABE = \Delta KCE$ $\left(g.c.g\right)$

Suy ra $AE = EK$. Vậy ΔADK cân.

Từ đó DE là phân giác của góc D.



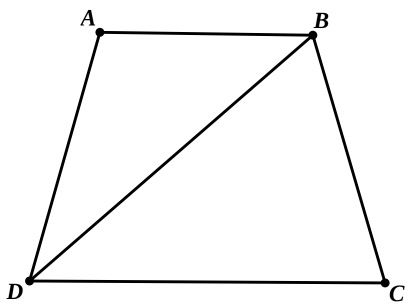
Bài 4.

Hình thang cân $ABCD\left(AB \parallel CD\right)$ có đường chéo BD chia hình thang thành hai tam giác cân ABD cân tại A và tam giác BCD cân tại D. Tính các góc của hình thang cân đó.

Lời giải

Đặt $\widehat{ADB} = x$. Ta tìm được $x = 36^{\circ}$.

Các góc của hình thang bằng $72^{\circ}, 72^{\circ}, 108^{\circ}, 108^{\circ}$.



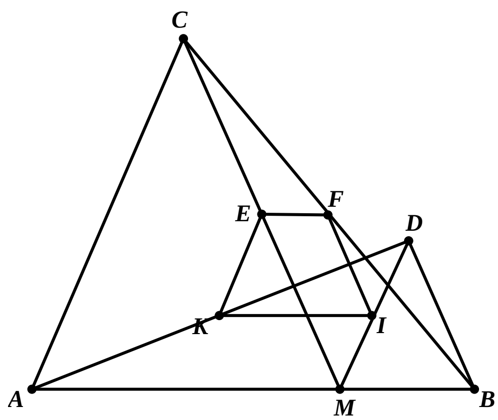
Bài 5.

Trên đoạn thẳng AB lấy một điểm $M(MA > MB)$. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ $AB,$ vẽ tam giác đều $AMC, BMD.$ Gọi E, F, I, K theo thứ tự là trung điểm của $CM, CB, DM, DA.$ Chứng minh rằng $EFIK$ là hình thang cân và $KF = \frac{1}{2}CD.$

Lời giải

Chứng minh $EF \parallel KI, \widehat{EKI} = \widehat{FIK} = 60^\circ$

Suy ra $KF = EI = \frac{CD}{2}$

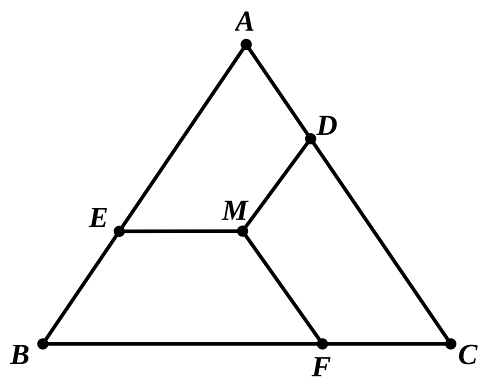


Bài 6.

Cho điểm M nằm bên trong tam giác đều $ABC.$ Chứng minh rằng trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng hai đoạn kia.

Lời giải

Qua M vẽ $MD \parallel AB$, vẽ $ME \parallel BC$, vẽ $MF \parallel AC$, được ba hình thang cân, do đó $MA = DE, MB = EF, MC = DF$ các đoạn thẳng MA, MB, MC là độ dài của các cạnh của ΔDEF nên đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng của hai đoạn kia.



Bài 7.

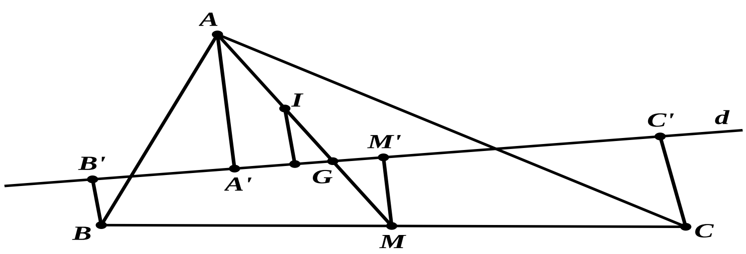
Cho tam giác ABC, trọng tâm G.

1) Vẽ đường thẳng d đi qua G, cắt các đoạn thẳng AB, AC. Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B, C trên d. Tìm mối liên hệ giữa các độ dài AA', BB', CC'.

2) Nếu đường thẳng d nằm ngoài tam giác ABC và G' là hình chiếu của G trên d thì các độ dài AA', BB', CC', GG' có liên hệ gì?

Lời giải

1) Lấy điểm I trên đường trung tuyến AM sao cho I là trung điểm của AG. Kẻ AA', BB', CC', II', MM' vuông góc với d. Khi đó $AA' = BB' + CC'$.



2) Gọi BE là đường trung tuyến của $\triangle ABC$, M là trung điểm của BG.

Vẽ $AA', BB', CC', EE', GG', MM'$ vuông góc với D

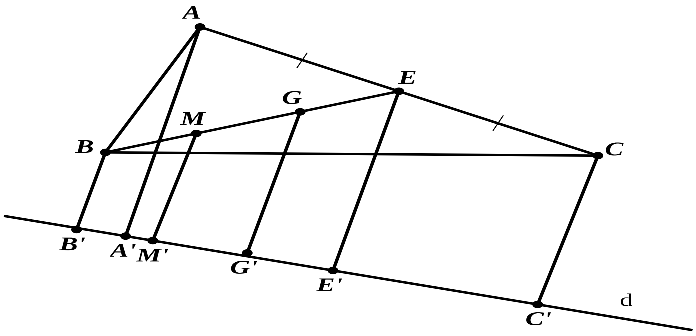
Ta có:

$MM' + EE' = 2GG'$

$\Rightarrow 2MM' + 2EE' = 4GG'$

$\Rightarrow BB' + GG' + AA' + CC' = 4GG'$

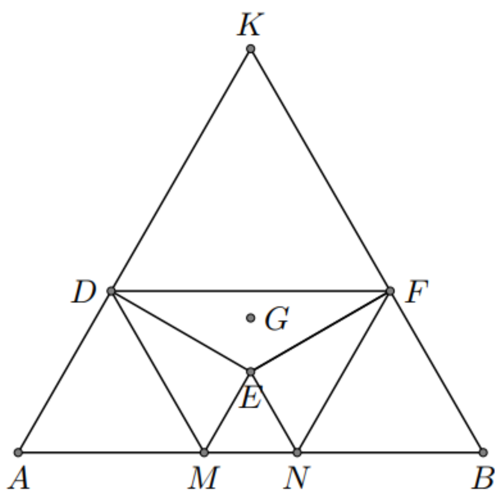
$\Rightarrow AA' + BB' + CC' = 3GG'$



Bài 8.

Trên đoạn thẳng AB lấy các điểm M và N (M nằm giữa A và N). Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMD, MNE, BNF. Gọi G là trọng tâm của tam giác DEF. Chứng minh rằng khoảng cách từ G đến AB không phụ thuộc vào vị trí của điểm M, N trên đoạn AB.

Lời giải



Gọi K là giao điểm của AD, BF thì ΔABK đều.

Trước hết chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ D, E, F đến AB bằng đường cao $KH = h$ của ΔKAB (h không đổi).

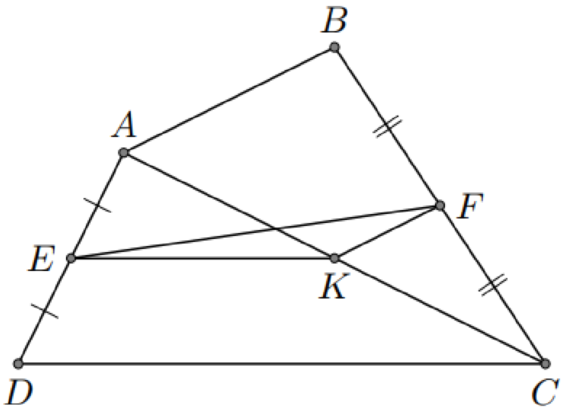
Do đó khoảng cách từ G đến AB bằng $\frac{h}{3}$.

Bài 9. Tứ giác $ABCD$ có E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC.

1) Chứng minh rằng $EF \le \frac{AB+CD}{2}$.

2) Tứ giác $ABCD$ có điều kiện gì thì $EF = \frac{AB+CD}{2}$.

Lời giải



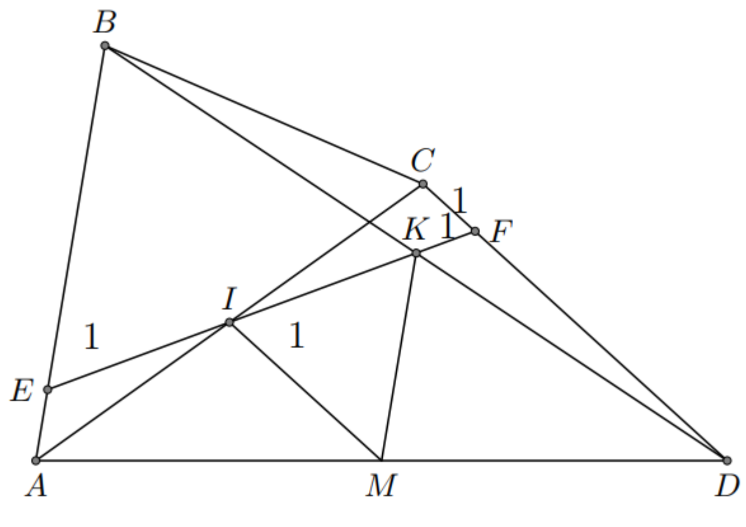
1) Gọi K là trung điểm AC.

Ta có $EF \le KF + KE$, từ đó $2EF \le AB + CD$ nên $EF \le \dfrac{AB+CD}{2}$

2) Ta có $EF = \dfrac{AB+CD}{2} \Leftrightarrow E, K, F$ thẳng hàng $\Leftrightarrow AB \,//\, CD$.

🗁 **Bài 10.** Tứ giác $ABCD$ có $AB = CD$. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của hai đường chéo tạo với AB và CD các góc bằng nhau.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AD, I, K là

trung điểm của AC, BD.

Đường thẳng IK cắt AB, CD ở E, F.

Tam giác MIK cân nên $\hat{K}_1 = \hat{I}_1$

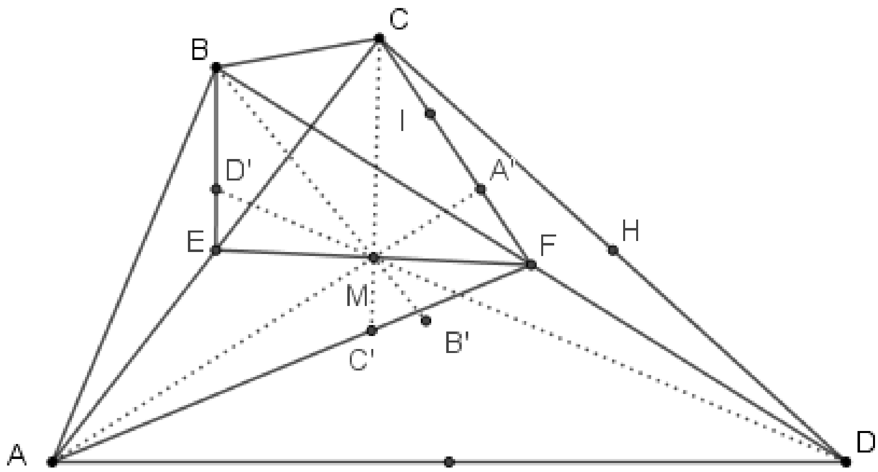
Ta lại có $\hat{K}_1 = \hat{E}_1$ (so le trong, $AB \,//\, KM$)

Lại có $\hat{I}_1 = \hat{F}_1$ (so le trong, $IM \parallel CD$)

Vậy $\hat{E}_1 = \hat{F}_1$

Bài 11. Trong tứ giác $ABCD$, gọi A', B', C', D' thứ tự là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng bốn đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy.

Lời giải



Gọi E, F là trung điểm của AC và BD

Điểm I là trung điểm của $A'C$.

Ta có $EI \parallel AA'$, so đó AA' đi qua trung điểm M của EF.

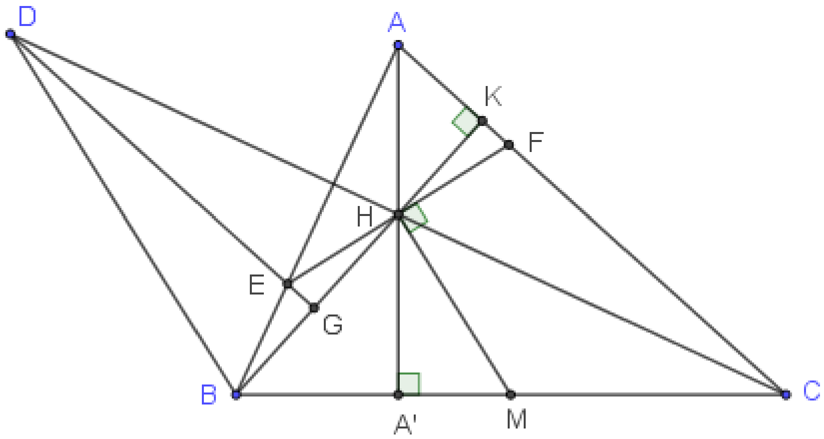
Tương tự BB', CC', DD' cũng đi qua M

Bài 12. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H, M là trung điểm BC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F.

1) Trên tia đối của tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HC$. Chứng minh rằng E là trực tâm của tam giác DBH.

2) Chứng minh rằng $HE = HF$

Lời giải



1) Vì MH là đường trung bình của $\triangle CBD$ nên $MH \,//\, BD$.

Do $MH \perp EF$ nên $BD \perp EF$

Ta có $BA \perp HD$, do đó E là trực tâm của ΔBDH.

2) Gọi G là giao điểm của DE và BH, K là giao điểm của BH và AC.

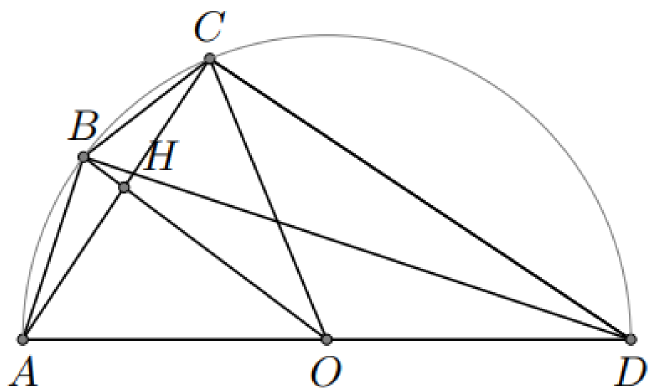
Khi đó $\triangle DHG = \triangle CHK$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Suy ra $HG = HK \Rightarrow \triangle HGE = \triangle HKF$ (g.c.g).

Vậy $HE = HF$.

Bài 13. Tứ giác $ABCD$ có B và C nằm trên đường tròn có đường kính là AD. Tính độ dài CD biết rằng $AD = 8, AB = BC = 2$.

Lời giải



Gọi O là tâm của đường tròn, H là giao điểm của OB và AC

Ta có $\begin{cases} BA = BC \\ OA = OC \end{cases}$ nên OB là đường trung trực của AC,

do đó $OB \perp AC$ và $AH = HC$.

OH là đường trung bình của $\triangle ACD$.

Đặt $CD = x$ thì $OH = \frac{x}{2}$ nên $BH = 4 - \frac{x}{2}$.

Ta có $AB^2 - BH^2 = OA^2 - OH^2$ (cùng bằng AH^2)

$$\text{Nên } 4 - \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 = 16 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow CD = 7$$

Bài 3

Dựng hình bằng thước và compa

1 Tóm tắt lý thuyết

Giải bài toán dựng hình (bằng thước và compa) là chỉ ra một số hữu hạn lần các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản rồi chứng tỏ hình dựng được có đủ các điều kiện mà bài toán đòi hỏi.

Lời giải đầy đủ của một bài toán dựng hình gồm bốn phần:

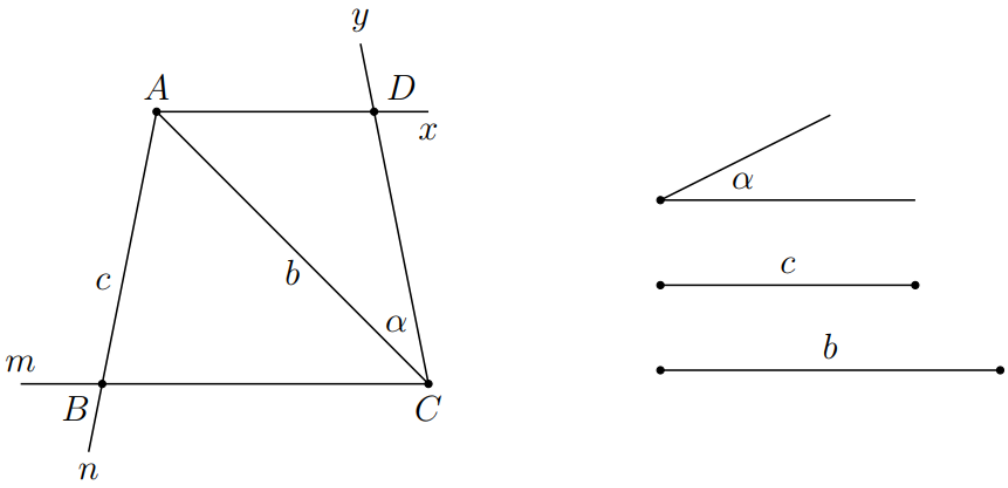
1) **Phân tích.** Giả sử đã có một hình thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Có thể vẽ thêm hình mới làm xuất hiện những yếu tố nêu trong đề bài hoặc làm xuất hiện những hình có thể dựng được ngay. Đưa việc dựng các yếu tố còn lại của hình phải dựng về các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản đã biết.
2) **Cách dựng.** Nêu thứ tự từng bước dựng hình dựa vào các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản, đồng thời thể hiện các bước dựng đó trên hình vẽ.
3) **Chứng minh.** Dùng lập luận chứng tỏ rằng với cách dựng như trên, hình đã dựng thỏa mãn các điều kiện của bài toán.
4) **Biện luận.** Chỉ rõ trong trường hợp nào bài toán dựng được và dựng được bao nhiêu hình thỏa mãn đề bài (hình thỏa mãn đề bài gọi là nghiệm hình).

2 Một số ví dụ

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Dựng tam giác ABC biết $AC = b, AB = C, \widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$.

Lời giải



1. Phân tích.

Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ có $AC = b, AB = c, \hat{B} - \hat{C} = \alpha$

Kẻ $Ax \| BC$, kẻ tia Cy sao $\widehat{BCy} = \hat{B}$(Cy và A cùng phía đối với BC). $ABCD$ là hình thang nên

$$CD = AB = c, \widehat{ACD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCA} = \hat{B} - \widehat{BCA} = \alpha$$

Tam giác ACD dựng được (biết hai cạnh và góc xen giữa).

Điểm B thỏa mãn hai điều kiện: nằm trên đường thẳng qua C song song với AD và $\widehat{DAB} = \widehat{ADC}$

2. Cách dựng.

- Dựng ΔACD có $AC = b, CD = c, \widehat{ACD} = \alpha$.
- Qua C dựng đường thẳng $Cm // AD$
- Dựng tia An sao cho $\widehat{DAn} = \widehat{ADC}$ cắt Cm ở B.

3. Chứng minh. Tứ giác $ABCD$ có $AD//BC, \widehat{DAB} = \widehat{ADC}$ nên là hình thang cân. Do đó $AB = CD = c, \widehat{ABC} = \widehat{DCB}$. Ta có $\widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \widehat{DBC} - \widehat{ACB} = \widehat{ACD} = \alpha$.

4. Biện luận. Bài toán có một nghiệm hình nếu $b > c, \alpha < 180^o$.

Phương pháp lấy giao của hai quỹ tích gọi là phương pháp quỹ tích tương giao. Nội dung của phương pháp là: Để dựng một điểm, ta phân tích điểm đó thỏa mãn hai điều kiện, do điều kiện thứ nhất điểm thuộc một quỹ tích, do điều kiện thứ hai điểm thuộc một quỹ tích khác, giao điểm của hai quỹ tích ấy cho ta điểm phải dựng.

Khi phân tích một điểm thuộc đường nào, cần nhớ các kiến thức sau:

- Điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng AB thì nằm trên đường trung trực của AB.

- Điểm cách đều điểm O một khoảng r thì nằm trên đường tròn $(O;r)$

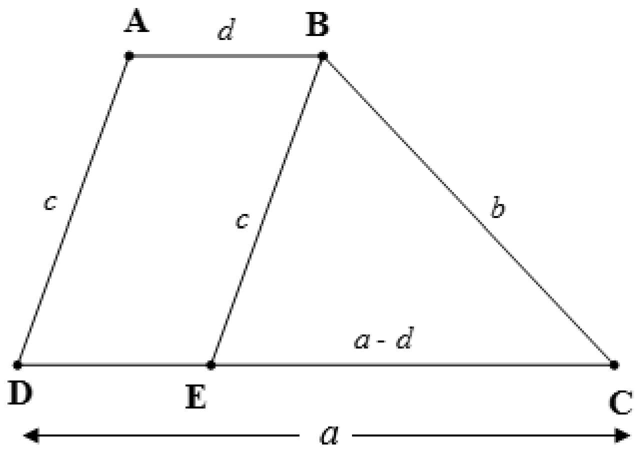
- Điểm nằm trong góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc ấy.

Cũng cần chú ý đến số giao điểm của hai đường. Hai đường thẳng có thể có $0,1$ hoặc vô số giao điểm tùy theo chúng song song, cắt nhau hay trùng nhau. Đường thẳng và đường tròn $(O;r)$ có thể có $0,1$ hoặc 2 giao điểm tùy theo $r<h, r=h$ hoặc $r>h$ (h là khoảng cách từ O đến đường thẳng). Hai đường tròn có thể có $0,1,2$ hoặc vô số giao điểm.

Dựa vào số giao điểm ấy mà ta biện luận bài toán.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng tồn tại một hình thang có độ dài bốn cạnh bằng độ dài bốn cạnh của một tứ giác cho trước.

Lời giải



Gọi a,b,c,d là độ dài bốn cạnh của tứ giác $(a \geq b \geq c \geq d)$. Cần chứng minh tồn tại hình thang có bốn cạnh như trên: Chọn đáy lớn bằng a, đáy nhỏ bằng d. Ta dựng ΔBEC rồi dựng D và A. Để chứng minh tồn tại hình thang $ABCD$, ta sẽ chứng tỏ tồn tại ΔBEC (tam giác này có thể suy biến thành đoạn thẳng).

Thật vậy, ta có: $b+c>a-d$ (vì $d+b+c>a$ do a,b,c,d là bốn cạnh của tứ giác).

$a-d+b \geq c$ (vì $a \geq c, c \geq d$), $a-d+c \geq b$ (vì $a \geq b, c \geq d$)

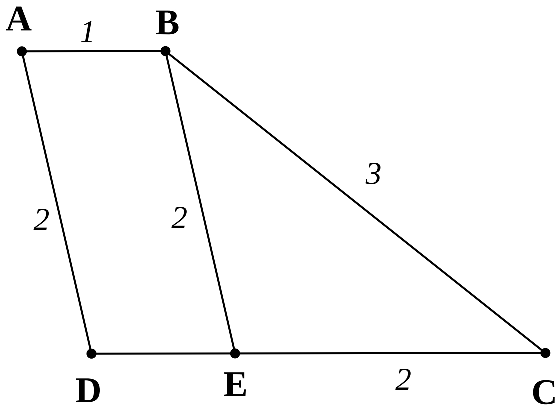
3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Dựng hình thang $ABCD(AB//CD)$, biết:

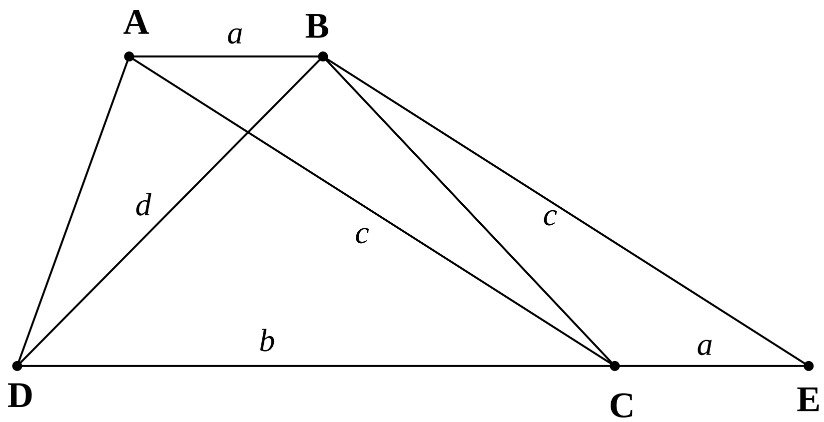
1) $AB = 1cm, AD = 2cm, BC = 3cm, CD = 3cm.$

2) $AB = a, CD = b, AC = c, BD = d.$

Lời giải



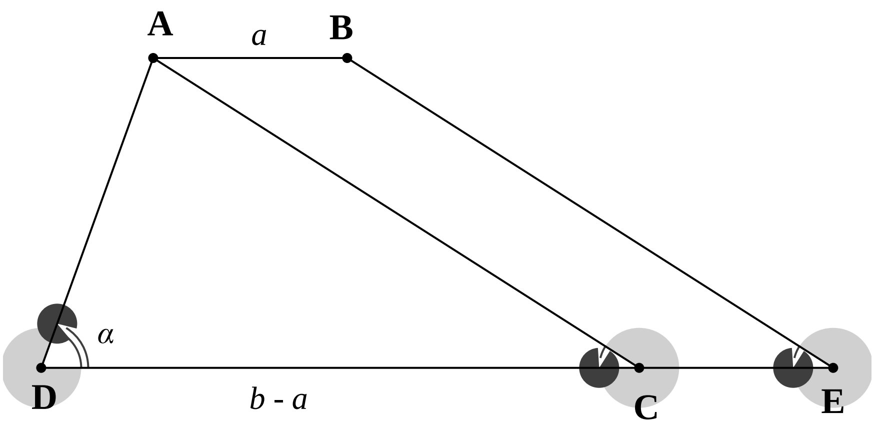
1) Trước hết dựng ΔBEC biết ba cạnh $BC = 3cm, BE = CD = 3cm$. Sau đó dựng điểm D và điểm A.



2) Trước hết dựng ΔBDE biết ba cạnh $DE = a + b, BE = c, BD = d$. Sau đó điểm A.

🗁 **Bài 2.** Dựng hình thang cân $ABCD\left(AB//CD\right)$, biết $AB = a, CD = b, \widehat{D} = \alpha$.

Lời giải



Trước hết dựng ΔADE có $DE = b - a, \widehat{D} = \widehat{AED} = \alpha$. Sau đó dựng các điểm C và điểm B.

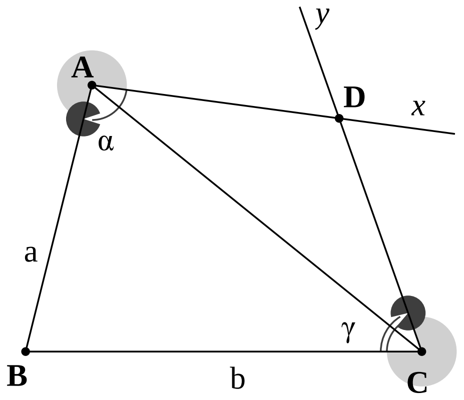
🗁 **Bài 3.** Dựng tứ giác $ABCD$, biết ba góc và

a) Hai cạnh kề nhau

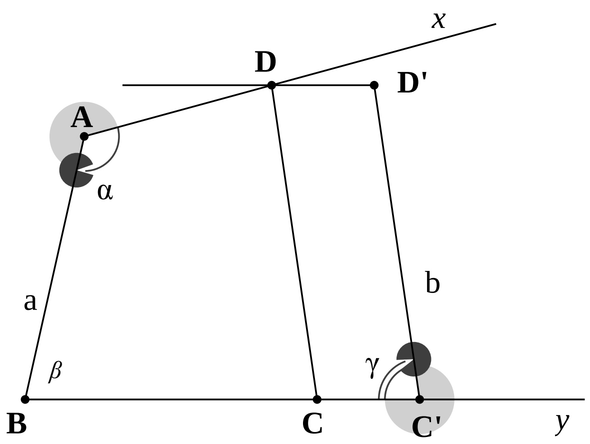
b) Hai cạnh đối nhau

Lời giải

a) Cách dựng thể hiện trên hình



b) Cách dựng thể hiện trên hình



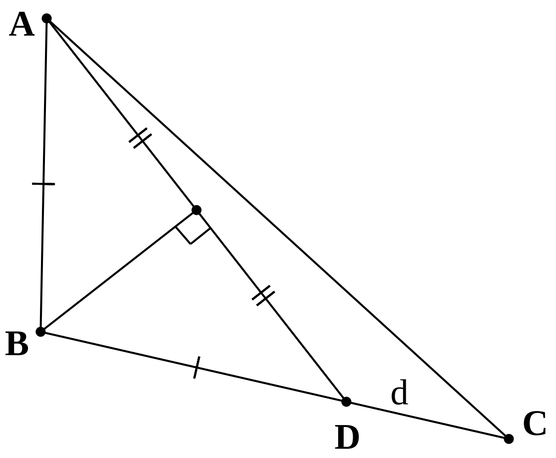
🗁 **Bài 4.** Dựng ΔABC, biết $\widehat{B} = \beta, \widehat{C} = \alpha, BC - AB = d$.

Lời giải

1) Phân tích. Giả sử đã dựng được ΔABC có $\widehat{B} = \beta, \widehat{C} = \alpha, BC - AB = d$. Trên BC lấy điểm D sao cho $BD = AB$ thì $DC = BC - BD = BC - AB = d$. Ta có ΔABD cân nên $\widehat{ADC} = 90^o + \frac{\widehat{B}}{2} = 90^o + \frac{\beta}{2}$ (góc này dựng được bằng thước và compa).

- ΔADC xác định ngay vì biết một cạnh và hai góc kề với nó.

- Điểm B thuộc tia đối của tia DC. Mặt khác do $BA = BD$ nên B thuộc đường trung trực của AD.



2) Cách dựng.

- Dựng ΔADC có $\widehat{D} = 90^o + \frac{\beta}{2}, \widehat{C} = \alpha, DC = d$.

- Dựng đường trung trực của AD, cắt tia đối của tia DC ở B. Nối AB.

3) Chứng minh. B thuộc đường trung trực của AD nên $AB = BD$. Do đó $BC - AB = BC - BD = DC = d$.

ΔABD cân mà $\widehat{ADC} = 90^o + \frac{\beta}{2}$ nên $\widehat{ADB} = 90^o - \frac{\beta}{2}$, do đó $\widehat{B} = \beta, \widehat{C} = \alpha$.

4) Biện luận. Bài toán có một nghiệm hình nếu dựng được ΔADC, tức là nếu $90^o + \frac{\beta}{2} + \alpha < 180^o \Leftrightarrow \alpha < 90^o - \frac{\beta}{2}$

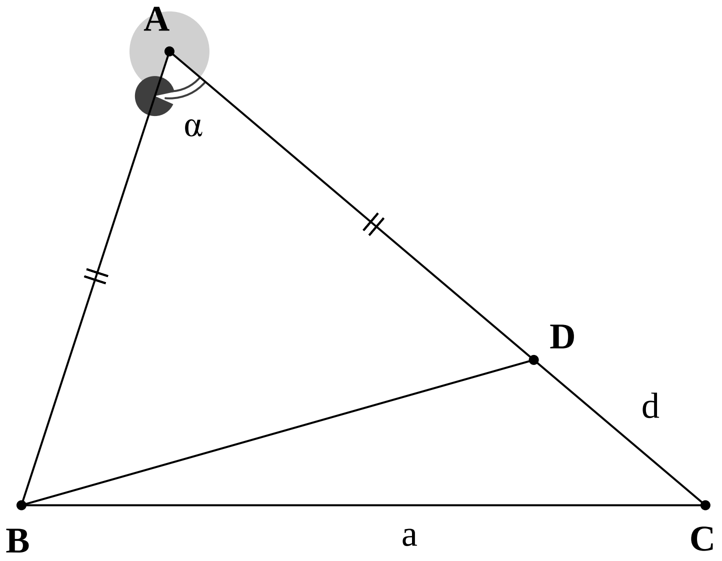
🗁 **Bài 5.** Dựng ΔABC, biết:

1) $\widehat{A} = \alpha, BC = a, AC - AB = d$.

2) $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha, BC = a, AC - AB = d$.

Lời giải

1) Trên AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$ thì $DC = d, \widehat{BDC} = 90^o + \frac{\alpha}{2}$. Dựng tam giác ΔDBC, rồi dựng điểm A.



2) Trên AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$ thì $DC = AC - AB = d$. Tính

$$\widehat{DBC} = \widehat{ADB} - \widehat{C} = \left(90^o - \frac{\widehat{A}}{2}\right) - \widehat{C} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} - \widehat{C} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Dựng ΔBDC, rồi dựng điểm A. Chú ý rằng có thể dựng được hai điểm D nhưng chỉ chọn D sao cho $\widehat{BDC} > 90^o$.

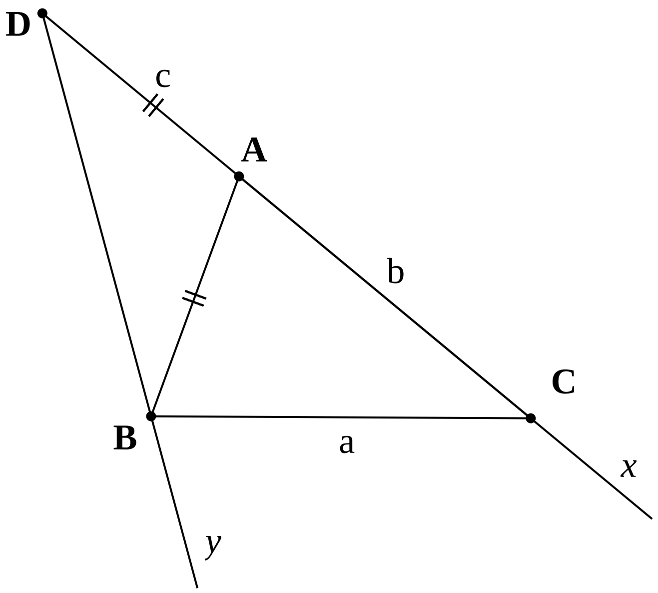
🗁 **Bài 6.** Dựng ΔABC, biết:

1) $\widehat{A} = \alpha, BC = a, AC + AB = s$.

2) $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha, BC = a, AC + AB = s$.

Lời giải

1) Phân tích. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$ thì ΔABD cân nên $\widehat{D} = \frac{\alpha}{2}$. Dựng ΔBDC, rồi dựng điểm A.



Cách dựng.

- Dựng $\widehat{xDy} = \frac{\alpha}{2}$

- Trên tia Dx lấy $DC = s$.

- Dựng đường tròn $(C;a)$ cắt tia Dy ở B.

- Dựng đường trung trực của DB cắt cạnh DC ở A.

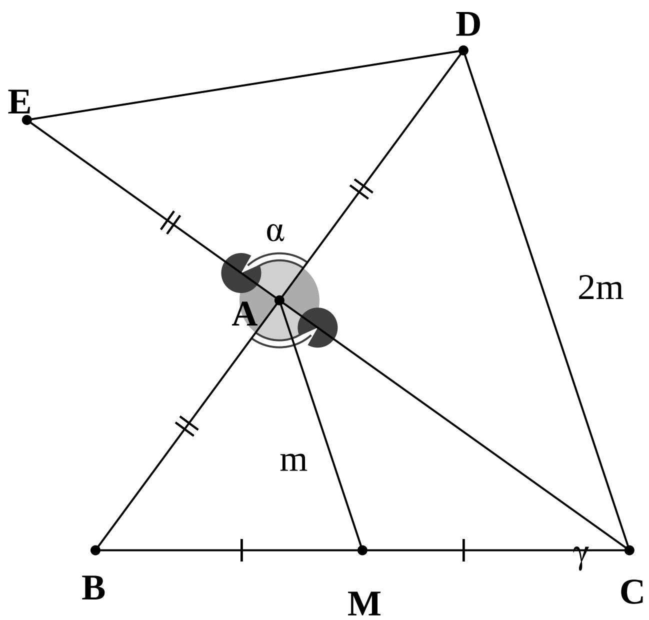
Biện luận. Gọi h là khoảng cách từ C đến Dy. Điều kiện để bài toán có nghiệm hình là $h \le a < s$.

2) Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Tính $\widehat{DBC} = \widehat{B} + \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{B} + \left(90^o - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2}\right) = 90^o + \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = 90^o + \frac{\alpha}{2}$ (góc này dựng được bằng thước và compa). Dựng ΔBDC, rồi dựng điểm A.

🗁 **Bài 7.** Dựng ΔABC, biết: $\widehat{A} = \alpha, AC + AB = s$, đường trung tuyến $AM = m$.

Lời giải

Trên tia đối của tia AB lấy điểm D, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AD = AE = AB$. Ta có $EC = s, DC = 2m, \widehat{DEC} = 90^o - \frac{\alpha}{2}$. Dựng ΔEDC, rồi dựng điểm A, sau đó dựng B.



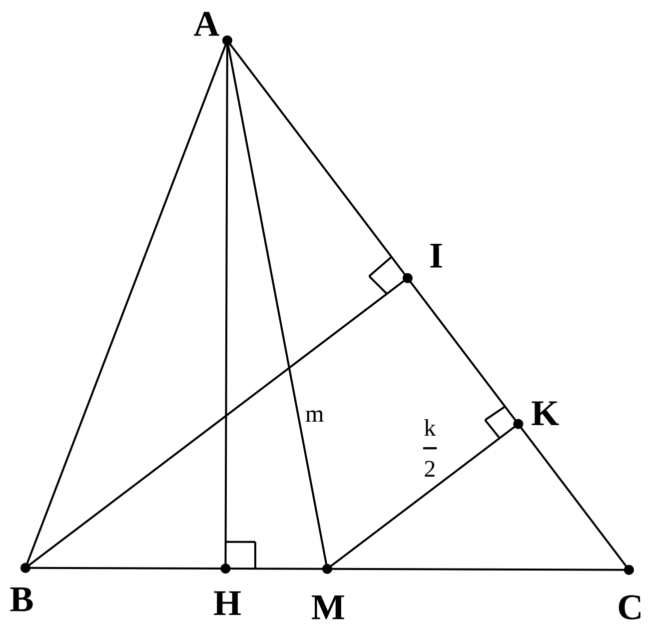
🗁 **Bài 8.** Dựng ΔABC, biết: $BC = a$, đường cao $AH = h$, đường trung tuyến $BM = m$.

✍ Lời giải

Vẽ MK vuông góc với BC thì $MK = \frac{h}{2}$. Dựng ΔBMK, rồi dựng điểm C, sau đó dựng A.

🗁 **Bài 9.** Dựng ΔABC, biết: đường cao $AH = h$, đường cao $BI = k$, đường trung tuyến $AM = m$.

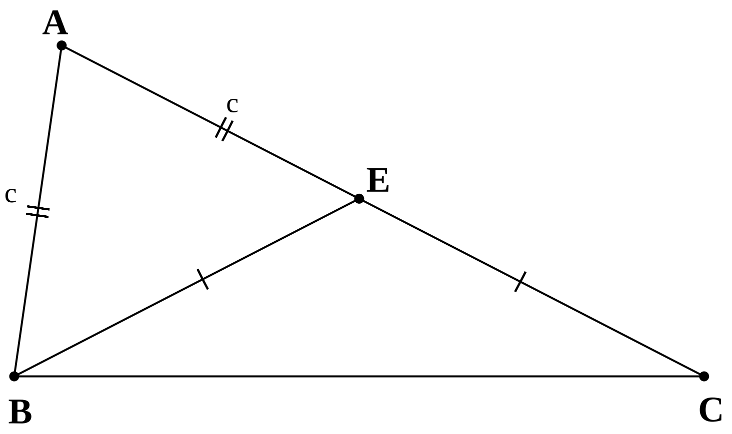
✍ Lời giải



Tam giác vuông AHM dựng được. Vẽ AK vuông góc với AC thì $MK = \frac{BI}{2} = \frac{k}{2}$. Dựng tiếp tam giác vuông AMK. Điều kiện để có nghiệm hình $\frac{k}{2} < m, h \le m$.

🗁 **Bài 10.** Dựng ΔABC có $\widehat{B} = 3\widehat{C}$ biết $AB = c, AC = b$.

Lời giải



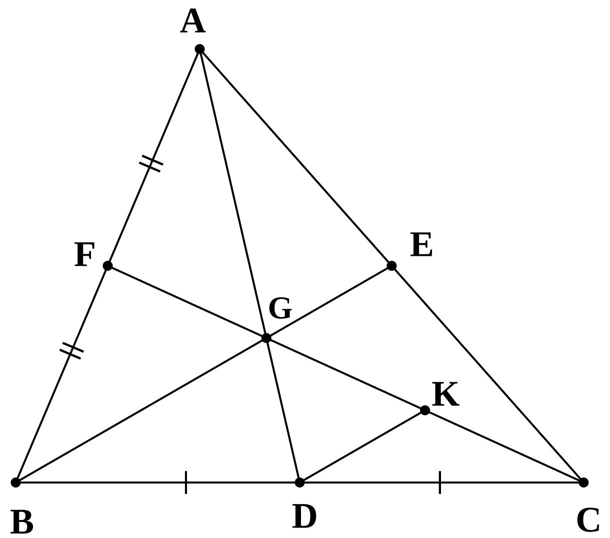
Lấy E trên AC sao cho $\widehat{CBE} = \widehat{C}$ thì $\widehat{ABE} = 2\widehat{C}, \widehat{AEB} = 2\widehat{C}$. Do đó ΔABE cân.

Suy ra $EC = b - c, BE = b - c$.

Dựng ΔABE biết độ dài ba cạnh $c, c, b - c$. Sau đó dựng tiếp điểm C.

🗁 **Bài 11.** Dựng tam giác, biết độ dài ba đường trung tuyến.

Lời giải

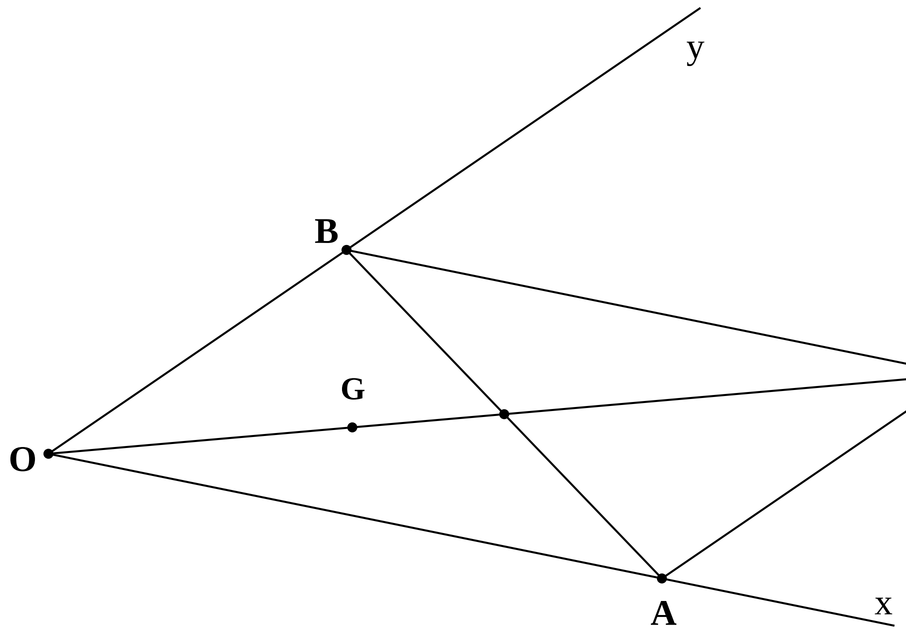


Gọi K là trung điểm của CG. ΔGDK có ba cạnh bên bằng $\frac{1}{3}$ độ dài các đường trung tuyến của ΔABC. Dựng ΔGDK, rồi dựng F, C. Sau đó dựng B, A.

Điều kiện để có nghiệm hình là $|m-n| < p < m+n$ với m, n, p là độ dài ba đường trung tuyến đã cho.

🗁 **Bài 12.** Cho góc xOy và điểm G ở trong góc. Dựng ΔOAB nhận G làm trọng tâm, có A thuộc Ox, B thuộc Oy.

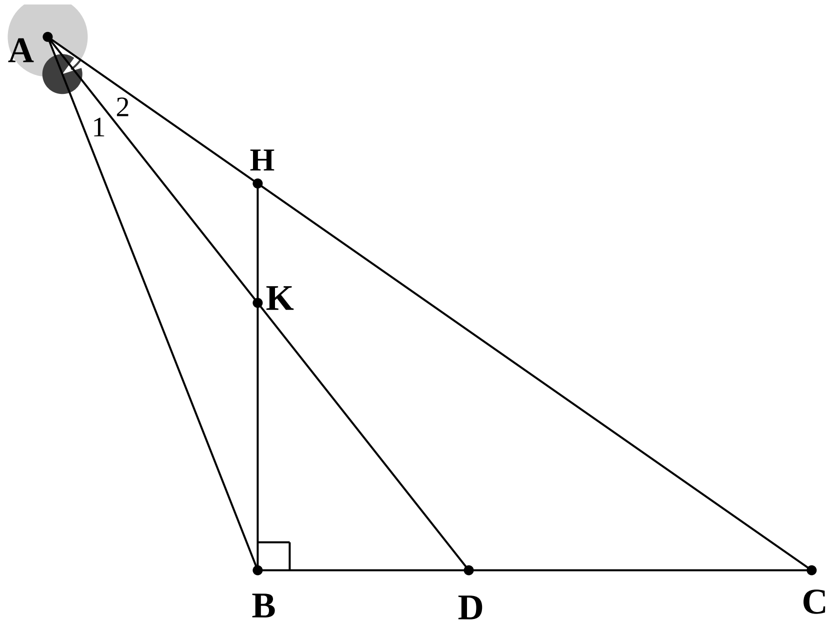
Lời giải



Trên tia OG lấy điểm C sao $OC = 3OG$. Qua C vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của góc.

🗁 **Bài 13.** Dựng ΔABC có $\widehat{B} - \widehat{C} = 90^o$ biết đường phân giác $AD = d, DC = m$.

Lời giải



Vẽ đường vuông góc với BC tại B, cắt AD ở K, cắt AC ở H.

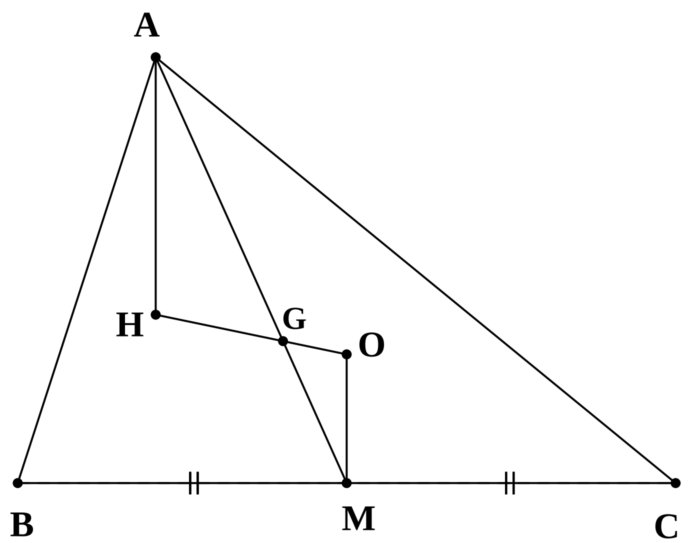
Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{C}, \widehat{ADB} = \widehat{A_2} + \widehat{C}, \widehat{BKD} = \widehat{A_1} + \widehat{ABH}$ nên $\widehat{ADB} = \widehat{BKD}$.

Do đó $\widehat{ADB} = 45^o, \widehat{ADC} = 135^o$

Dựng $\Delta ADC\left(c.g.c\right)$ rồi dựng B.

🗁 **Bài 14.** Cho đường thẳng m và hai điểm H, G thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ m. Dựng ΔABC có B và C thuộc m, nhận H làm trực tâm, G làm trọng tâm.

Lời giải



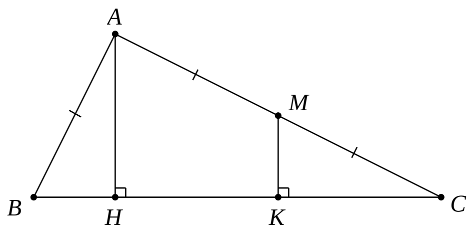
Gọi O là giao điểm các đường trung trực của ΔABC thì G nằm giữa H và O, đồng thời $HG = 2GO$. Do đó biết vị trí H, G thì dựng được O. Sau đó dựng $OM \perp m$. Trên tia MG lấy $MA = 3MG$.

Dựng $(O;OA)$ cắt m ở B và C.

Bài toán luôn có một nghiệm hình vì đường tròn $(O;OA)$ luôn cắt m.

BÀI 15. Dựng tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2AB$, biết $BC = 5cm$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AC. Vẽ $AH, MK \perp BC$

$\Delta ABH = \Delta CMK$ (cạnh huyền - góc nhọn) nên

$BH = MK$, $AH = CK$.

Ta lại có $MK = \dfrac{AH}{2}$. Suy ra $BH = \dfrac{CK}{2}$.

Mà . $CK = HK$. nên $BH = \dfrac{1}{5}BC = 1cm$, $AH = 2cm$

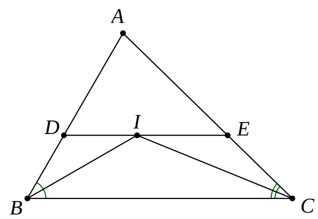
Dựng được ΔABH, rồi dựng C.

BÀI 16. Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng DE song song với BC (D thuộc AB, E thuộc AC) sao cho $DE = DB + CE$.

Lời giải

Dựng tia phân giác của các góc B và C chúng cắt nhau ở I.

Qua I dựng $DE // BC$.



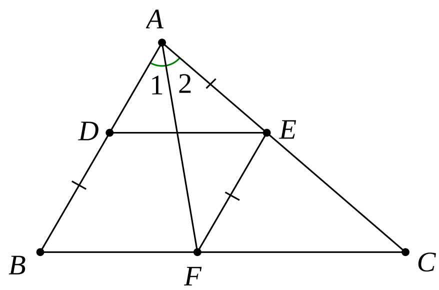
BÀI 17. Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng DE song song với BC (D thuộc AB, E thuộc AC) sao cho $AE = BD$.

Lời giải

Qua E vẽ đường thẳng song song với AB cắt BC ở F.

Chứng minh rằng AF là tia phân giác của góc A.

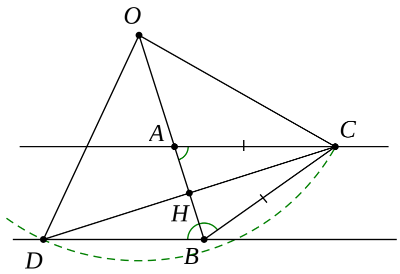
Trước hết dựng F, rồi dựng E.



BÀI 18. Cho hai đường thẳng song song a và b, điểm C thuộc a, điểm O thuộc nửa mặt phẳng không chứa b có bờ a. Qua O dựng đường thẳng m cắt a, b theo thứ tự ở A, B sao cho $CA = CB$

Lời giải

Phân tích:
Qua C vẽ $CH \perp AB$, cắt b ở D.
ΔACB cân nên $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$, mà $\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$.
Do đó $\widehat{CBA} = \widehat{DBA}$, suy ra $OD = OC$.
Cách dựng:
Dựng $(O;OC)$ cắt b ở D.
Qua O dựng đường vuông góc với CD cắt a, b ở A, B.



Biện luận:

Gọi h là khoảng cách từ O đến b.

Tùy theo $OC > h$, $OC = h$, $OC < h$ mà bài toán có 2, 1, 0 nghiệm hình.

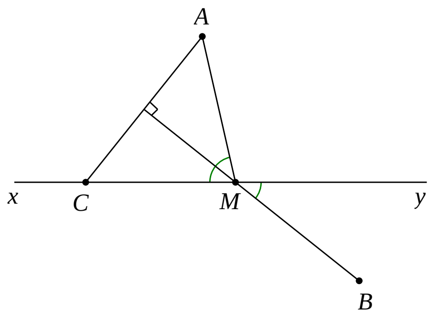
BÀI 19.

1) Cho đường thẳng xy và hai điểm A, B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ xy. Dựng điểm M thuộc xy sao cho $\widehat{AMx} = 2\widehat{BMy}$.

2) Giải bài toán trên trong trường hợp A và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ xy.

Lời giải

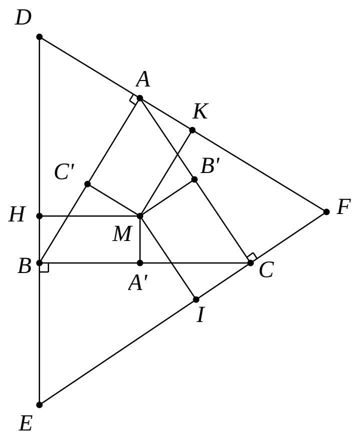
1) *Phân tích:*
Qua A vẽ đường vuông góc với BM, cắt xy ở C.
Ta chứng minh được $BA = BC$, vì thế xác định được C, do đó xác định được M.
2) Dựng B' sao cho xy là đường trung trực của BB'. Đưa về ý trên.



BÀI 20. Cho tam giác ABC. Dựng điểm M sao cho nếu vẽ $MA' \perp BC$, $MB' \perp Ac$, $MC' \perp AB$ thì $A'B = B'C = C'A$.

Lời giải

Để cho ba đoạn thẳng bằng nhau $A'B'$, $B'C$, $C'A$ có liên hệ với nhau, ta "dịch" chúng đến M. Vẽ đường thẳng qua M song song với $A'B$ và đường thẳng qua B song song với $A'M$, chúng cắt nhau ở H. Vẽ đường thẳng qua M song song với $B'C$ và đường thẳng qua C song song với $B'M$, chúng cắt nhau ở I. Vẽ đường thẳng qua M song song với $C'A$ và đường thẳng qua A song song với $C'M$, chúng cắt nhau ở K
Các đường thẳng AK, BH, CI cắt nhau ở D, E, F. ΔDEF xác định được vì có các cạnh theo thứ tự vuông góc với AB ở A, với BC ở B, với CA ở C. Còn M là điểm cách đều ba cạnh của ΔDEF nên giao điểm của các đường phân giác (trong hoặc ngoài) của tam giác. Bài toán có bốn nghiệm hình.



Bài 4

ĐỐI XỨNG TRỤC

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1. Hai điểm gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó. Khi một điểm nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với nó qua đường thẳng d chính là điểm đó.

Định lí 1. *Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.*

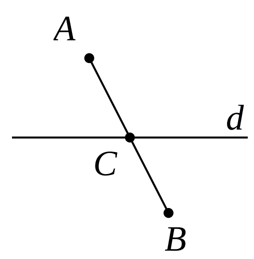
Định lí 2. *Hình thang cân nhận đường thẳng đi qua hai trung điểm hai đáy làm trục đối xúng*

2 Một số ví dụ

VÍ DỤ 1. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng d. Dựng điểm C thuộc d sao cho $CA+CB$ có độ dài ngắn nhất.

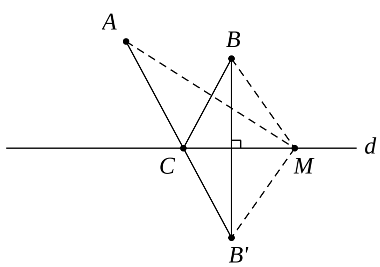
Lời giải

Hướng suy nghĩ.



Bài toán trở nên đơn giản nếu cho A, B nằm khác phía với đường thẳng d. Khi đó C là giao điểm của d với đoạn thẳng AB (Hình 10a).
Trong trường hợp A, B nằm cùng phía với đường thẳng d, ta có thể tạo ra điểm B' nằm khác phía với A đối với d mà độ dài CB' luôn luôn bằng CB khi C thay đổi vị trí trên đường thẳng d. Điểm B' chính là điểm đối xứng với B qua d.

Phân tích:



Vẽ B' đối xứng với B qua d. Gọi M là điểm bất kì thuộc d.
Ta có $MB'=MB$. Do đó:
$AM+MB=AM+MB'\geq AB'$ (hằng số)
Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM+MB$ bằng AB' khi M thuộc đoạn AB'.

Cách dựng.
Dựng B' đối xứng với B qua d. Nối A với B', cắt d ở C.

Chứng minh.

Gọi M là điểm bất kì thuộc d. Ta có:

$AM+MB=AM+MB'\geq AB'$

$AC + CB = AC + CB' = AB'$

Vậy $AC + CB \le AM + MB$.

Biện luận.

Bài toán có một nghiệm hình.

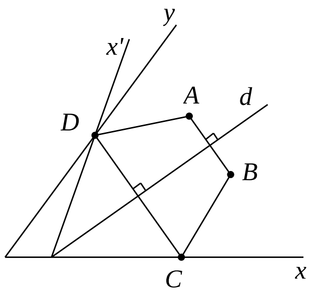
VÍ DỤ 2. Cho hai đường thẳng x, y và hai điểm A, B. Dựng điểm C thuộc x và điểm D thuộc y sao cho A, B, C, D là các đỉnh của hình thang cân có AB là một cạnh đáy.

Lời giải

Phân tích.

Giả sử đã dựng được hình thang cân thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Gọi d là đường trung trực của AB. Dựng đường thẳng x' qua D và giao điểm của d và x (nếu $d // x$ thì x' là đường thẳng đi qua D và song song với x). Khi đó, x' đối xứng với x qua d. Điểm D thỏa mãn hai điều kiện: thuộc x' và thuộc y. Từ đó dựng được điểm C.



Cách dựng

- Dựng đường trung trực d của AB.

- Dựng đường thẳng x' đối xứng với x qua d

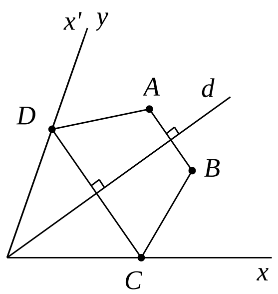
- Gọi D là giao điểm của x' và y. Dựng C đối xứng với D qua d.

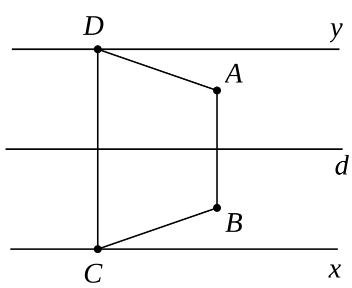
Chứng minh.

Theo cách dựng thì $AB // CD$ do cùng vuông góc với d. Mặt khác AC đối xứng với BD qua d nên $AC = BD$. Vậy tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

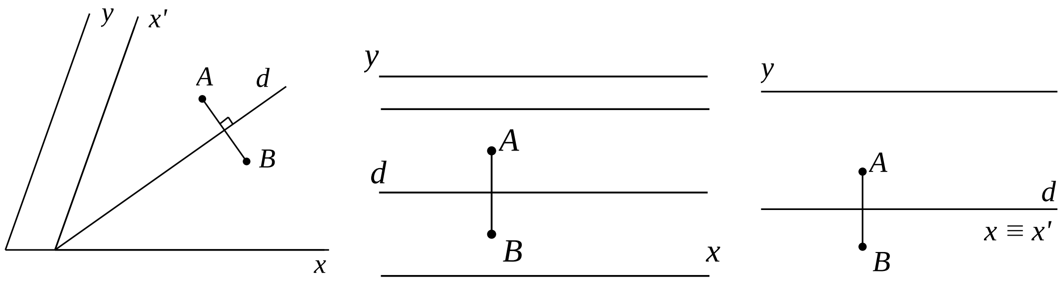
Biện luận.

- Nếu x' trùng y thì bài toán có vô số nghiệm hình (Hình 12). Khi đó x và x' đối xứng nhau qua d; nói cách khác d trùng với phân giác của góc tạo bởi x và y (Hình 12a) hoặc d là đường thẳng song song cách đều x và y. (Hình 12b).

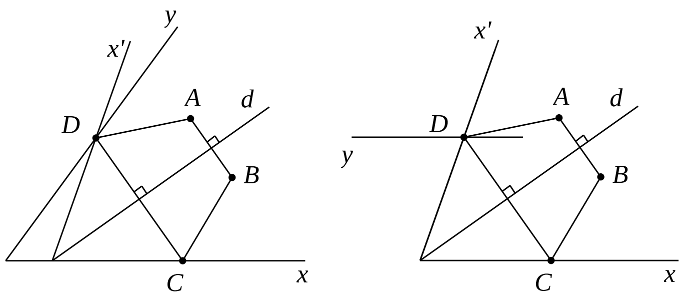




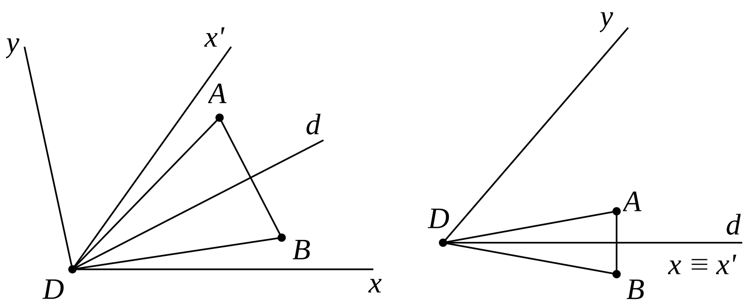
- Nếu $x' // y$ thì bài toán không có nghiệm hình (Hình 13). Khi đó d song song với một tia phân giác của góc tạo bởi x và y. (Hình 13b, c).



- Nếu x' cắt y thì bài toán có một nghiệm hình (Hình 14). Khi đó d cắt cả hai đường thẳng chứa tia phân giác của góc tạo bởi x và y (Hình 14a) hoặc d cắt đường thẳng song song cách đều x và y (Hình 14b).



- Riêng nếu x' cắt y tại điểm D thuộc d thì bài toán không có nghiệm hình (hình thang cân suy biến thành tam giác cân, Hình 15a, b); nếu x' cắt y tại điểm D thẳng hàng với AB, bài toán không có nghiệm hình (hình thang cân suy biến thành đoạn thẳng).



Chú ý:

1. Trong cách dựng trên, do chú ý đến tính đối xứng trục, ta đã dựng d là đường trung trực của AB, khi đó đường thẳng d xác định, các điểm C và D đối xứng nhau qua d. Ta thấy: D đối xúng với C qua d, mà C thuộc đường thẳng x thì D thuộc đường thẳng x' đối xứng với x qua d. Giao điểm của x' và y cho ta điểm D.

2. Cũng có thể phân tích: C đối xứng với D qua d, mà D thuộc y nên C thuộc đường thẳng y' đối xứng với y qua d. Giao điểm của x và y' cho ta điểm C.

3 Bài tập tự luyện

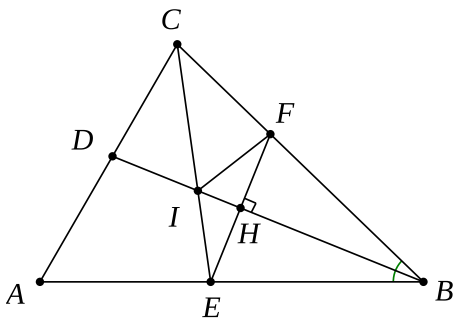
BÀI 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=60°$, các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BD, cắt BC ở F. Chứng minh rằng

1. E và F đối xứng với nhau qua BD.

2. IF là tia phân giác của góc BIC.

3 D và F đối xứng nhau qua IC.

Lời giải



1. Gọi H là giao điểm của EF và BD.

Dễ thấy $\Delta BHE=\Delta BHF$ (cạnh góc vuông - góc nhọn).

Do đó $HE=HF$ hay H là trung điểm của EF.

Vậy E và F đối xứng qua BD.

2. Theo ý a), góc $\widehat{BIE}$ và góc $\widehat{BIF}$ đối xứng qua BD nên $\widehat{BIE}=\widehat{BIF}$.

Mặt khác: $\widehat{BIC}=180^{\circ}-\dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=180^{\circ}-\dfrac{180^{\circ}-\hat{A}}{2}=120^{\circ}$ $

Nên $\widehat{BIF}=\widehat{BIE}=180^{\circ}-\widehat{BIC}=60^{\circ}$ $

Suy ra $\widehat{CIF}=\widehat{BIF}=60^{\circ}$. Vậy IF là tia phân giác góc $\widehat{BIC}$

3. Theo chứng minh trên ta có $\widehat{CID}=\widehat{BIE}=\widehat{CIF}$, do đó $\Delta CDI=\Delta CFI\left(g.c.g\right)$.

Suy ra $CD=CF$ và $ID=IF$, hay CI là đường trung trực của DF

Vậy D và F đối xứng nhau qua CI.

BÀI 2. Cho ba điểm O, D, E. Dựng tam giác ΔABC sao cho O là giao điểm của các đường phân giác BD và EC.

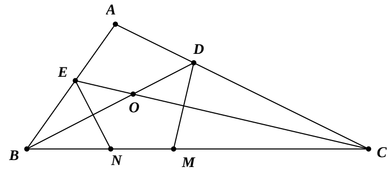
Lời giải

Phân tích.

Giả sử đã dựng được tam giác ΔABC thỏa mãn đề bài. Gọi M,N lần lượt là các điểm đối xứng với D qua OE, đối xứng với E qua OD. Chú ý rằng BC đối xứng với BA qua OD và BD đối xứng với

AC qua OE nên M,N thuộc BC. Từ đó B là giao điểm của MN và OD, C là giao điểm của MN và OE.

Cách dựng:
- Dựng M đối xứng với D qua OE, đối xứng với E qua OD.
- Dựng điểm B,C lần lượt là giao điểm MN với OD và OE.
- Dựng điểm A là giao điểm BE với CD.



Chứng minh.

Do D và M đối xứng qua OC nên $\widehat{MCO} = \widehat{DCO}$ hay OC là tia phân giác góc $\widehat{BCA}$. Tương tự OC là tia phân giác góc $\widehat{CBA}$. Ta có điều phải chứng minh.

Biện luận.

- Nếu $\widehat{DOE} \le 90°$ hoặc O,D,E thẳng hàng thì không có nghiệm hình.

- Nếu ΔODE cân tại O và $\widehat{DOE} = 120°$ thì M trùng N, bài toán có vô số nghiệm hình.

- Các trường hợp còn lại, bài toán có một nghiệm hình.

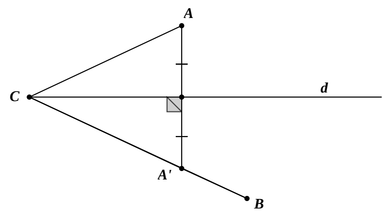
🗁 **BÀI 3.** Cho đường thẳng d và hai điểm A,B nằm khác phía đối với d. Dựng điểm C thuộc d sao cho tia phân giác của góc ACB nằm trên d.

✍ Lời giải

Phân tích.

Giả sử đã dựng được hình vẽ thỏa mãn bài toán. Khi đó hai đường thẳng CA và CB đối xứng nhau qua d. Do đó điểm A' đối xứng với A qua d thuộc đường thẳng BC. Khi đó C là giao điểm của BA' và d.

Cách dựng.
- Dựng điểm A' đối xứng với A qua d.
- Dựng điểm C là giao điểm của BA' và d.



Chứng minh.

Theo các dựng thì CA và CB là hai đường thẳng đối xứng với nhau qua d nên d là đường phân giác của góc $\widehat{ACB}$. Ta có điều phải chứng minh.

Biện luận
- Nếu khoảng cách từ A và B dến d bằng nhau thì bài toán không có nghiệm hình.

- Nếu khoảng cách từ A và B đến d khác nhau thì bài toán có một nghiệm hình.

🗁 **BÀI 4.** Dựng hình thang cân $ABCD$ $(AB // CD)$ có $\widehat{D} = 2\widehat{ACD}$, biết $CD = a$, đường cao $AH = h$.

✍ Lời giải

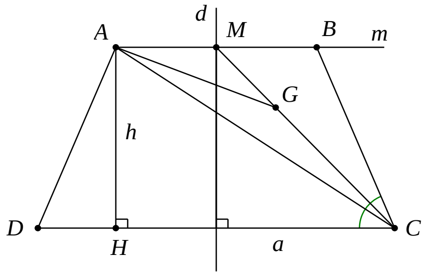
Phân tích.

Giả sử đã dựng được hình thang $ABCD$ thỏa mãn bài toán.

Khi đó $\widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 2\widehat{ACD}$ nên CA là tia phân giác góc $\widehat{CBD}$. Lại có $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ hay tam giác BAC cân tại B. Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác BAC. Do tam giác BAC cân nên $GA = GC$.

Cách dựng.

- Dựng đoạn thẳng CD. Dựng đường thẳng m song song với CD và cách CD một đoạn bằng h.
- Dựng đường trung trực d của CD, cắt m tại M.
- Dựng điểm G trên đoạn CM sao cho $GC = 2GM$ (dựng tam giác CXY bất kì có M là trung điểm XY, G là trọng tâm tam giác CXY).



- Dựng điểm A là giao điểm đường tròn $(G;GC)$ với đường thẳng m sao cho A và C khác phía đối với d (chú ý $GC = 2GM > GM > x$ với x là khoảng cách từ G đến m nên luôn dựng được điểm A).

- Dựng điểm B đối xứng với A qua d.

Chứng minh.

Theo cách dựng, G là trọng tâm tam giác ABC, hơn nữa do $GA = GC$ nên G nằm trên đường trung trực của AC, do đó BG là trung trực của AC.

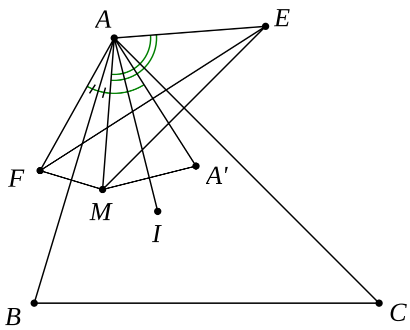
Suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{BAC} = \widehat{ACD}$. Hiển nhiên theo cách dựng thì $ABCD$ là hình thang cân. Do đó $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 2\widehat{ACD}$

Biện luân.

Bài toán có hai nghiệm hình.

🗁 **BÀI 5.** Cho điểm M nằm bên trong tam giác ABC, A' đối xứng với M qua đường phân giác của góc A, B' đối xứng với M qua đường phân giác của góc B, C' đối xứng với M qua đường phân giác của góc C. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy hoặc song song từng đôi một.

Lời giải



Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng với M qua BC, CA, AB. Ta sẽ chứng minh AA' là đường trung trực của đoạn thẳng EF.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Do các dựng các điểm A', E, F nên ta có

$\widehat{MAI} = \widehat{A'AI} = \alpha$, $\widehat{FAB} = \widehat{MAB} = \beta$, $\widehat{EAC} = \widehat{MAC} = \gamma$.

Suy ra $\widehat{FAA'} = 2\beta + 2\alpha$, $\widehat{EAA'} = 2\gamma - 2\alpha$

Để ý rằng $\alpha + \beta = \gamma - \alpha = \dfrac{\widehat{A}}{2}$, nên từ (1) ta có $\widehat{FAA'} = \widehat{EAA'}$, tức AA' là đường phân giác góc $\widehat{EAF}$

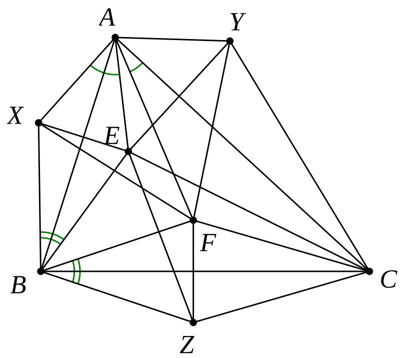
Hơn nữa do tính đối xứng nên $AF = AM = AA' = AE$

Hay tam giác EAF cân tại A, suy ra AA' là đường trung trực của đoạn EF.

Hoàn toàn tương tự, BB', CC' lần lượt là đường trung trực của các đoạn thẳng DE, FD. Vậy AA', BB', CC' đôi một song song hoặc đồng quy.

🗁 **BÀI 6.** Cho tam giác ABC. Vẽ các tia Ax, Ay trong góc A sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{CAy}$, vẽ các tia Bz, Bt trong góc B sao cho $\widehat{ABz} = \widehat{CBt}$. Gọi E là giao điểm của Ax và Bz, gọi F là giao điểm của Ay và Bt. Chứng minh $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$.

✍ Lời giải



Dựng các điểm X, Y lần lượt đối xứng với E qua AB, AC, dựng điểm Z đối xứng với F qua BC. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} \widehat{XAY} = 2(\widehat{EAB} + \widehat{EAC}) = 2\widehat{BAC} \\ \widehat{XAF} = \widehat{XAB} + \widehat{BAF} = \widehat{BAF} + \widehat{FAC} = \widehat{BAC} \end{cases}$$

Suy ra AF là tia phân giác góc $\widehat{XAY}$, hơn nữa $AX = AY\left(= AE\right)$ nên AF là đường trung trực của XY, suy ra $FX = FY$.

Xét hai tam giác XBF và EBZ, ta có $XB = EB$, $FB = ZB$ và $\widehat{XBF} = \widehat{EBZ}$ (tương tự chứng minh trên) nên $\Delta XBF = \Delta EBZ$. Suy ra $FX = EZ$, hay $EZ = YF$. Do đó $\Delta ECZ = \Delta YCF$, từ đó $\widehat{ECZ} = \widehat{YCF}$.

Vậy $\widehat{ACE} = \dfrac{\widehat{ECY}}{2} = \dfrac{\widehat{YCF} - \widehat{ECF}}{2} = \dfrac{\widehat{ECZ} - \widehat{ECF}}{2} = \dfrac{\widehat{FCZ}}{2} = \widehat{BFC}$

Bài 5

HÌNH BÌNH HÀNH

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1. Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

Định lí 1. Trong hình bình hành: các canh đối bang nhau, các góc đối bằng nhau, các đường chéo cắt nhau tai trung điểm mỗi đường.

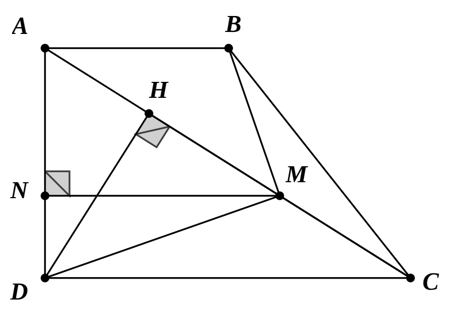
Định lí 2. Một tứ giác là hình bình hành nếu có một một trong các d\hatu hiệu sau:

- Các canh đối song song.
- Các canh đối bằng nhau.
- Hai canh đối song song và bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tai trung điểm của mối đường.

2 Một số ví dụ

VÍ DỤ 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ $\left(\widehat{A}=\widehat{D}=90^\circ\right)$, ta có $AB=\frac{1}{2}CD$. Gọi H là hình chiếu của D trên AC là trung điểm của HC. Chứng minh rằng $\widehat{BMD}=90^\circ$

Lời giải



Gọi N là trung điểm của DH.

Ta có MN là đường trung bình của ΔHDC nên $MN // DC$, $MN=\frac{1}{2}DC$.

Ta lại có: $AB // DC$, $AB=\frac{1}{2}DC$ do đó: $AB=MN$.

Vậy $ABMN$ là hình bình hành suy ra: $AN // BM$ (1)

ΔADM có $DH\perp AM$, $MN\perp AD$ suy ra $AN\perp DM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BMD}=90°$.

📖 **VÍ DỤ 2:** Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC có $\widehat{A}=120°$, $AB=4cm$, $AC=6cm$.

Lời giải

Cách 1. Vẽ điểm E sao cho M là trung điểm của AE. Tứ giác $ABEC$ là hình bình hành, $\widehat{ABE}=180°-\widehat{BAC}=180°-120°=60°$

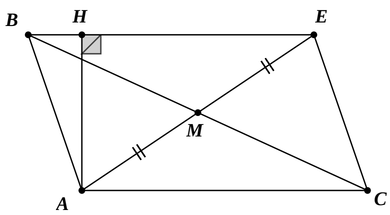
Kẻ $AH\perp BE$. Tam giác vuông ABH có $\widehat{B}=60°$ nên $BH=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{4}{2}=2\text{cm}$.

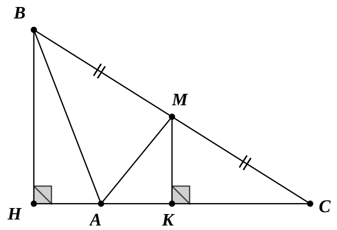
Suy ra $HE=BE=BH=6-2=4cm$

Trong tam giác vuông ABH ta có $AH^2=AB^2-BH^2=16-4=12$.

Trong tam giác vuông AHE ta có $AE^2=AH^2+HE^2=12+16=18$.

Do đó $AE=2\sqrt{7}$. Suy ra $AM=\sqrt{7}cm$.





Cách 2. Kẻ $BH\perp AC; MK\perp AC$, lần lượt tính được $AH=2cm$,

$HB=2\sqrt{3}cm, MK=\sqrt{3}, HK=\dfrac{HC}{2}=4cm, AK=2cm$ Suy ra $AM=\sqrt{7}cm$.

3 Bài tập tự luyện

🗁 **BÀI 1.** Cho điểm D nằm bên trong tam giác đều ABC. Vẽ các tam giác đều BDE, CDF (D, E, F nằm cùng phía với BC). Chứng minh rằng $AEDF$ là hình bình hành

Lời giải

Xét ΔDBC và ΔEBA có

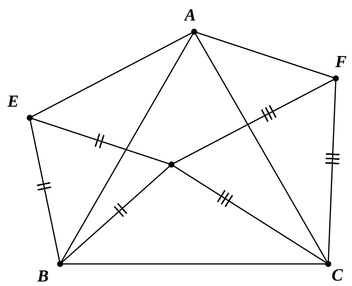
$BC=AB$

$\widehat{DBC}=\widehat{ABE}\left(=60°-\widehat{ABD}\right)$

$BD=BE$

Suy ra $\Delta DBC=\Delta EBA$ (c-g-c) nên $DC=EA$.

Do đó $DF=EA$. (1)

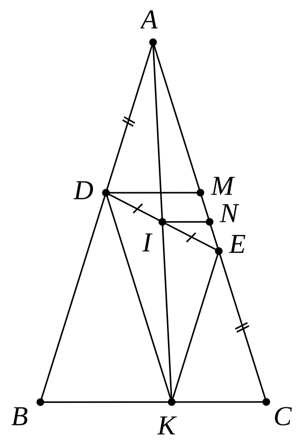


Chứng minh tương tự có $DE = FA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AEDF$ là hình bình hành.

BÀI 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = CE$. Gọi I là trung điểm của D, E, K là giao điểm của AI và BC. Chứng minh rằng $ADKE$ là hình bình hành.

Lời giải



Kẻ DM và IN song song với BC (M, N thuộc AC).

Xét ΔEMD có $IN // DM$, I là trung điểm của DE nên suy ra N là trung điểm của ME

hay $AD = NE$ (1)

Vì $BC // DM$ nên $\widehat{ADM} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{AMD}$, do đó ΔADM cân tại A, hay $AD = AM$. (2)

Lại có: $AD = EC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra N là trung điểm của AC.

Xét ΔAKC có $IN // BC$, N là trung điểm của AC nên I là trung điểm của AK.

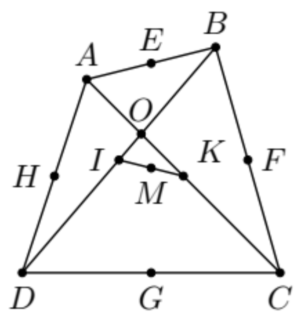
Tứ giác $ADKE$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên $ADKE$ là hình bình hành.

BÀI 3.

1. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm hai đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối của tứ giác gặp nhau tại một điểm. (Bài toán của Giéc-gôn (Gergonme nhà toán học Pháp, 1771-1859))

2 Dùng định lí trên chứng tỏ rằng nếu một tứ giác các đường thẳng nối trung điểm các cạnh đối đi qua giao điểm hai đường chéo thì tứ giác đó là hình bình hành.

Lời giải



Gọi E, F, G, H là trung điểm của $AB, BC, CD, DA; I, K$ là trung điểm của BD, AC.

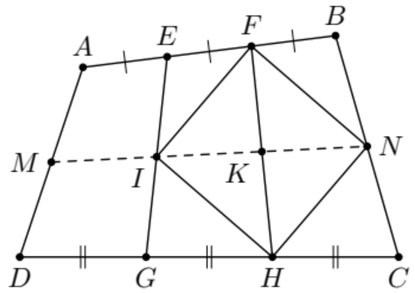
Tứ giác $EFGH$ có $EF // GH\, (// AC), EF = GH \left(= \frac{1}{2}AC\right)$ nên $EFGH$ là hình bình hành. Chứng minh tương tự $EIGK$ là hình bình hành, do đó FH và IK cùng đi qua trung điểm cùng EG

1. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo và M là trung điểm của IK. Nếu EG, FH cắt nhau tại O thì

theo câu a), M trùng với O, do đó I và K trùng O. Tứ giác $ABCD$ có O là trung điểm của hai đường chéo nên là hình bình hành.

🗁 **Bài 4.** Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB lấy các điểm E,F sao cho $AE = AF = FB$. Trên canh CD lấy điểm G,H sao cho $DG = GH = HC$. Gọi M,I,K,N theo thứ tự là trung điểm của AD,EG,FH,BC. Chứng minh rằng bốn điểm M,I,K,N thẳng hàng và $MI = IK = KN$.

Lời giải

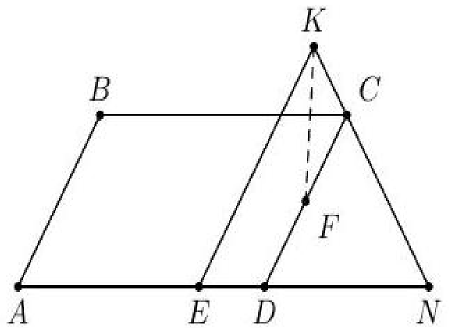


Ta có IF và HN song song và bằng nhau vì cùng song song và bằng một nửa BG. Do đó tứ giác $IFNH$ là hình bình hành. Ta lại có K là trung điểm của FH nên I,K,N thẳng hàng và K là trung điểm của IN.

Chứng minh tương tự, M,I,K thẳng hàng và I là trung điểm của MK. Vậy M,I,K,N thẳng hàng và $MI = IK = KN$

🗁 **Bài 5.** Hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Lấy các điểm E,F theo thứ tự thuộc các cạnh AD,CD sao cho $DE = CF$. Gọi K là điểm đối xứng với F qua BC. Chứng minh rằng EK song song với AB.

Lời giải

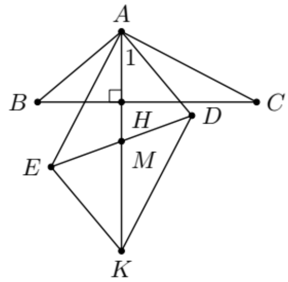


Gọi N là giao điểm của ED và KC, khi đó tam giác NCD đều mà $CK = DE$ (cùng bằn CF) nên tam giác NKE đều. Vậy $EK // AB$.

🗁 **Bài 6.** Cho tam giác ABC có $\hat{A} > 90^\circ$. Trong góc A vẽ các đoạn thẳng AD, AE sao cho AD vuông góc và bằng AB, AE vuông góc và bằng AC. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng AM vuông góc với BC.

Lời giải

Vẽ hình bình hành $ADKE$, khi đó $\Delta ADK = \Delta BAC$ (c.g.c) (chú ý rằng $\widehat{ADK} = \widehat{BAC}$ vì cùng bù với góc DAE) nên $\widehat{A_1} = \widehat{B}$. Gọi H là

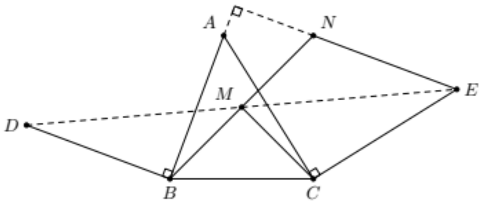


giao điểm của AM và BC. Ta có $\hat{B} + \widehat{BAH} = \widehat{A_1} + \widehat{BAH} = 90^\circ$

nên $AH \perp BC$

🗁 **Bài 7 .** Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABD vuông cân tại B, ACE vuông cân tại C. Gọi M là trung điểm của DE. Hãy xác định dạng của tam giác BMC

Lời giải



Trên tia đối của tia MB lấy $MN = MB$, khi đó tứ giác $BDNE$ là hình bình hành, suy ra $EN \perp AB$ và $EN = AB$. Ta lại có $EC \perp AC, EC = AC$. Từ đó ta có $\triangle ENC = \triangle ABC$ (c.g.c). Suy ra $NC = BC$ và $NC \perp BC$

Do đó tam giác BCN vuông cân, suy ra tam giác BMC vuông cân tại M

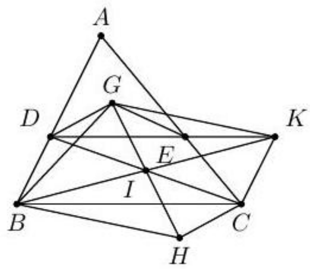
🗁 **Bài 8.** Cho tam giác đều ABC, một đường thẳng song song với BC cắt AB, AC ở D và E. Gọi G là trọng tâm của tam giác ADE, I là trung điểm của CD. Tính số đo các góc của tam giác GIB.

Lời giải

Cách 1. Qua C vẽ đường thẳng song song với BD, cắt DE ở K.

Ta có $BDKC$ là hình bình hành nên B, I, K thẳng hàng.

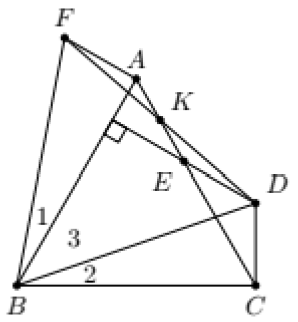
$\triangle GDB = \triangle GEK$(c.g.c) nên $GB = GK$. Suy ra $\triangle GBK$ cân tại G có $\widehat{KBG} = 120^\circ$. Do đó các góc của tam giác GIB bằng $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$



Cách 2 . Vẽ H sao cho I là trung điểm của GH. Ta chứng minh được $\triangle GBH$ đều.

🗁 **Bài 9**. Cho điểm E thuộc cạnh AC của tam giác đều ABC. Đường vuông góc với AB kẻ từ E cắt đường vuông góc với BC kẻ từ C tại điểm D. Gọi K là trung điểm của AE. Tính $\widehat{KBD}$.

Lời giải



Vẽ F sao cho K là trung điểm của DF thì $AF // DE, AF = DE$.

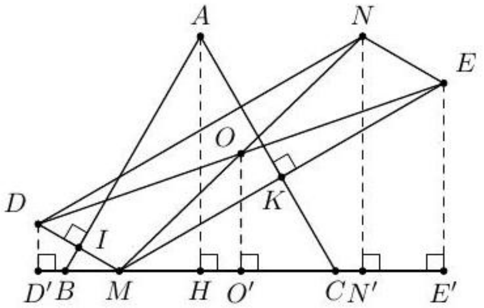
ΔDEC có $\hat{E} = \hat{C} = 30^\circ$ nên $DE = DC$, suy ra $AF = DC$

$\Delta BAF = \Delta BCD$(c.g.c) nên $BF = BD, \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$

Ta lại có $\widehat{B_1} + \widehat{B_3} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 60^\circ$, do đó ΔDBF đều, $\widehat{KBD} = 30^\circ$

Bài 10. Cho tam giác đều ABC, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đối xứng với M qua AC. Vẽ hình bình hành $MDNE$. Chứng minh rằng AN song song với BC

Lời giải



Gọi O là giao điểm của DE và MN. Kẻ DD', OO', AH, NN', EE' vuông góc với BC. Ta sẽ chứng minh$AH = NN'$

Ta có OO' là đường trung bình của tam giác MNN' nên $NN' = 2 \cdot OO'$.

Gọi I là giao điểm của MD và AB, K là giao điểm của ME và AC, dễ chứng minh$AH = MI + MK$

Vì OO' là đường trung bình của hình thang $DEE'D'$ nên $DD' + EE' = 2 \cdot OO'$.

Ta có $\widehat{EME'} = 30^\circ$ nên $EE' = \dfrac{ME}{2} = MK \quad 0.$

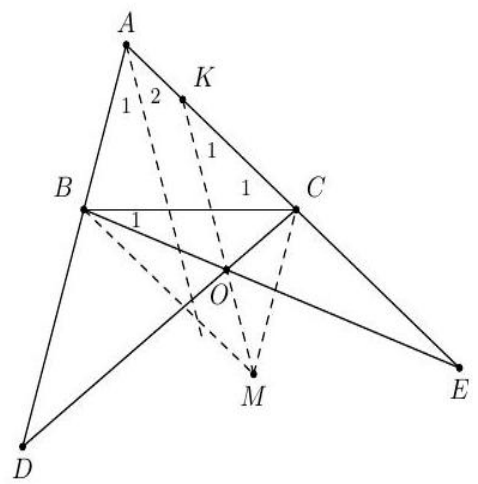
Tương tự, $DD' = MI$

Từ $(1),(2),(3),(4)$ suy ra $AH = 2OO'$.

Từ $(1),(5)$ suy ta $AH = NN'$. Từ đó chứng minh được $AN // HN'$, tức là $AN // BC$.

🗁 **Bài 11.** Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các tia đối của các tia BA, CA sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A, đường thẳng này cắt AC ở K. Chứng minh rằng $AB = CK$

Lời giải



Vẽ hình bình hành $ABMC$ thì $AB = CM$. Ta chứng minh rằng $CM = CK$

Trước hết ta chứng minh M, O, K thẳng hàng. Thật vậy, $\widehat{B_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{C_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{CBM}$ nên BO là tian phân giác của $\widehat{BCM}$. Tương tự, CD là tia phân giác của $\widehat{BCM}$.

Do đó MO là tia phân giác của $\widehat{BCM}$. Suy ra OM song song với tia phân giác của $\hat{A}$,vạy K, O, M thẳng hàng.

Ta có $\widehat{M_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{BCM} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{K_1}$ nên ΔCKM cân. Suy ra $CK = CM = AB$

Bài 6

ĐỐI XỨNG TÂM

1 Tóm tắt lý thuyết

Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó. Điểm đối xứng của điểm O qua điểm O chính là điểm O.

Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau. Hình bình hành nhận giao điểm của hai đường chéo làm tâm đối xứng.

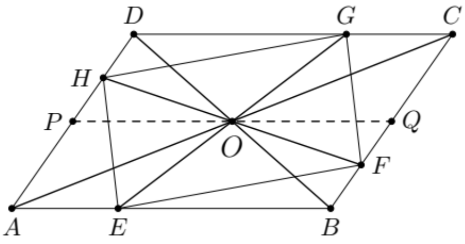
2 Một số ví dụ

Bài tập mẫu

VÍ DU 1. Một hình bình hành có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của một hình bình hành khác. Chứng minh rằng các tâm của hai hình bình hành đó là trùng nhau.

Lời giải

Gọi $EFGH$ là hình bình hành có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của hình bình hành $ABCD$ (như hình vẽ bên). Gọi O là tâm của hình bình hành $EFGH$, ta sẽ chứng minh O cũng là tâm của hình bình hành $ABCD$. Thật vậy



Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,BC. Ta có OP là đường trung bình của hình thang $AEGD$

Vì $EFGH$ là hình bình hành nên $GF//EH, GF = EH$ và $\widehat{GFC} = \widehat{EHA}, \widehat{FFC} = \widehat{HEA}$ (do $AD//BC$).
Từ đó suy ra $\Delta AEH = \Delta CGF$ (g-c-g), do vậy $CG = AE$

Mà $OQ = \dfrac{CG + BE}{2} = \dfrac{AE + EB}{2} = \dfrac{AB}{2}$

Lại có $AB = PQ$ nên $OP = \dfrac{PQ}{2}$, do vậy O là trung điểm của PQ.

Vì PQ là đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ nên O cũng là trung điểm của AC,BD. Do vậy O là tâm của hình bình hành $ABCD$.

> 🕮 **VÍ DU 2.** Cho tứ giác $ABCD$, điểm E thuộc đoạn AD và điểm G thuộc đoạn BC. Dựng điểm F thuộc đoạn AB và điểm H thuộc đoạn CD sao cho $EFGH$ là hình bình hành.

Lời giải

+) Phân tích: Gọi O là trung điểm EG thì O là điểm xác định và O là trung điểm của FH. 0.1

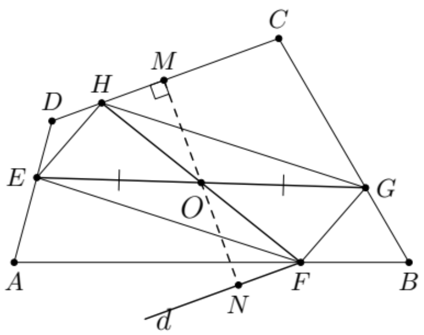
Vì F thuộc cạnh CD nên H sẽ nằm trên đường thẳng d là ảnh của đường thẳng CD qua phép đối xứng tâm O,

do đó F là giao điểm của d và AB.

+) *Cách dựng:*

Dựng trung điểm O của đoạn EG

Hạ $OM \perp CD$ tại M. Lấy đối xứng của M qua O ta được điểm N. Qua N kẻ đường thẳng d song song với CD, cắt AB tại F. Nối FO cắt CD tại H.



Vậy $EFGH$ là hình cần dựng.

+) Chứng minh:

Vì $\Delta OMH = \Delta ONF$ (g-c-g) nên $OH = OF$

Tứ giác $EFGH$ có $OE = OG, OH = OF$ nên $EFGH$ là hình bình hành.

+) Biện luận: Nếu d trùng với AB : khi đó $AB // CD, O$ cách đều AB và CD thì bài toán có vô số nghiệm hình. Nếu d song song với AB: khi đó $AB // CD, O$ không cách đều AB và CD thì bài toán không có nghiệm hình.

Nếu d cắt AB: khi đó AB không song song với CD thì bài toán có một nghiệm hình.

3 Bài tập tự luyện

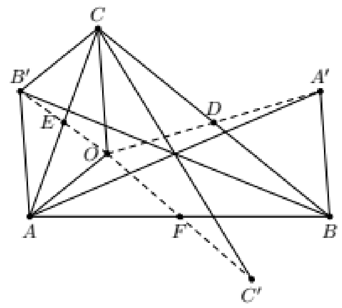
🗁 **Bài 1**. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB và O là điểm tùy ý. LvớiC là điểm đối xứng với O qua $ABA'B'$ D, B' là điểm đối xứng với O qua E, C' là điểm đối xứng với O qua F. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Lời giải

Vì AB' song song và bằng $A'B$ (do cùng song song và bằng OC) nên $ABA'B'$ là hình bình hành, do đó AA' và BB' cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. (1)

Tương tự, $BCB'C'$ là hình bình hành, do đó BB' cắt CC' tại trung điểm mỗi đường. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra các đường thẳng AA', BB', BB' đồng quy (tại trung điểm mỗi đường).



🗁 **Bài 2.** Cho góc $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt và M là điểm thuộc miền trong của góc.

1)Qua M dựng đường thẳng cắt các tia Ox, Oy theo thứ tự ở A và B sao cho M là trung điểm của AB

2) Chứng minh rằng tam giác OAB nhận được trong cách dựng trên có diện tích nhỏ nhất trong tất cả các tam giác tạo bởi tia Ox, Oy và một đường thẳng bất kỳ đi qua M.

Lời giải

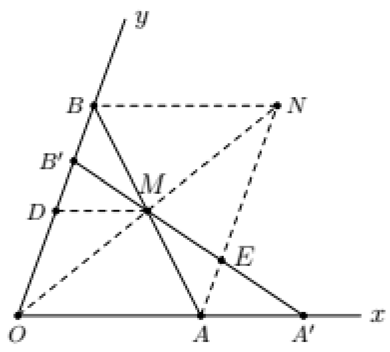
Ta có hai cách dựng như sau:

Cách 1. Qua M dựng đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở D. Dựng B đối

xứng với O qua D, đường thẳng BM cắt Ox tại A

Cách 2. Dựng N đối xứng với O qua M.

Qua N dựng các đường thẳng song song với Oy, Ox và lần lượt cắt Ox, Oy tại A, B



b) Qua M, vẽ đường thẳng bất kỳ (không trùng với AB), cắt Ox, Oy lần lượt tại A', B'. Ta sẽ chứng minh $S_{\triangle OAB} < S_{\triangle OA'B'}$. Thật vậy,

Có duy nhất một đường thẳng đi qua M và cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho M là trung điểm AB nên MA', MB' không bằng nhau (giả sử $MA' > MB'$).

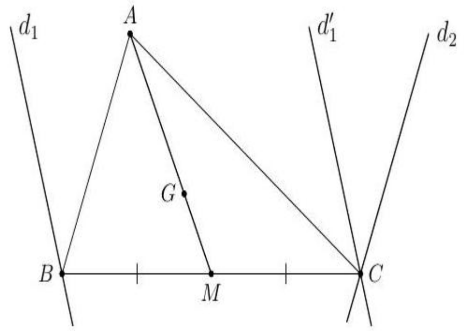
Trên tia MA' ta lấy điểm E sao cho $MB' = ME$, khi đó $S_{\Delta MBB'} = S_{\Delta MAE} < S_{\Delta MAA'}$

🗁 **Bài 3.** Dựng tam giác biết một đỉnh, trọng tâm và hai đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại.

Lời giải

Giả sử cần dựng tam giác ABC, ta biết đỉnh A, trọng tâm G và hai đỉnh B, C lần lượt nằm trên hai đường thẳng d_1, d_2. Lấy điểm B bất kỳ trên d_1

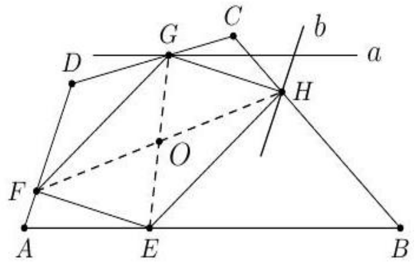
Do A, G xác định nên trung điểm M của BC xác định. Vì B, C đối xứng nhau qua M nên C nằm trên đường thẳng $d_1^{'}$ là ảnh của d_1 qua phép đối xứng tâm M. Do vậy C là giao điểm của $d_1^{'}$ và d_2.



🗁 **Bài 4.** Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm O nằm bên trong tứ giác. Dựng hình bình hành $EFGH$ nhận O làm tâm đối xứng, có bốn đỉnh nằm trên bốn đường thẳng chứa cạnh của tứ giác $ABCD$.

Lời giải

Giả sử cần dựng hình bình hành $EFGH$ có tâm $O, E \in AB, F \in AD, G \in CD, H \in BC$ (như hình vẽ bên). Gọi a, b lần lượt là ảnh của AB, AD qua phép đối xứng tâm O. Khi đó ta thấy G là giao điểm của a và CD, H là giao điểm của b và BC.



Biện luận:

+) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì bài toán có vô số nghiệm hình (khi O là tâm của $ABCD$) hoặc không có nghiệm hình (khi O không là tâm của $ABCD$).

+) Nếu $ABCD$ là hình thang mà không là hình bình hành thì bài toán có vô số nghiệm hình (khi O cách đều hai đáy) hoặc không có nghiệm hình (khi O không cách đều hai đáy).

+) Các trường hợp còn lại thì bài toán có một nghiệm hình.

Bài 1

HÌNH CHỮ NHẬT

1 Tóm tắt lý thuyết

Hình chữ nhật là một tứ giác có bốn góc vuông.

Hình chữ nhật có đầy đủ tính chất của hình thang cân và hình bình hành, trong đó đặc biệt chú ý đến tính chất: "Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường". Để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật, ta chứng minh tứ giác đó có ba góc vuông hoặc chứng minh tứ giác đó là hình bình hành có một trong các tính chất

a) Có một góc vuông;

b) Có hai đường chéo bằng nhau.

Áp dụng vào tam giác, ta có

1 Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền;

2 Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó vuông.

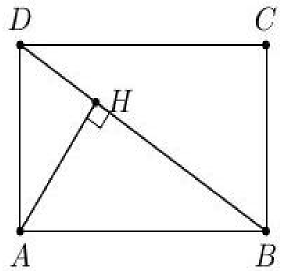
2 Một số ví dụ

BÀI TẬP MẪU

VÍ DU 1. Tính các cạnh AB, AD của hình chữ nhật $ABCD$ biết rằng đường vuông góc AH kẻ từ A đến BD chia thành hai đoạn $HD = 9$ cm, $HB = 16$ cm.

Lời giải

Ta có $BD = BH + HD = 16 + 9 = 25cm$



Xét tam giác ABD vuông tại A có

$AB^2 + AD^2 = 15^2 = 625$ (1)

Xét tam giác ADH vuông tại H có

$AH^2 + HD^2 = AD^2 \Leftrightarrow AD^2 = AH^2 + 9^2$ (2)

Xét tam giác AHB vuông tại H có

$AH^2 + HB^2 = AB^2 \Leftrightarrow AB^2 = AH^2 + 16^2$ (3)

Từ (2) và (3) Ta có $AB^2 - AD^2 = 16^2 - 9^2 = 175$ (4)

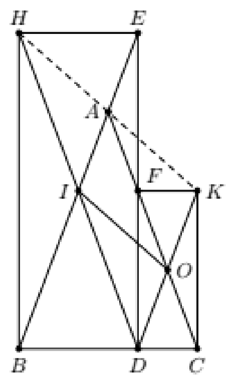
Từ (1) và (4) ta được

$AB^2 = (625 + 175) : 2 = 400 \Rightarrow AB = 20$ cm

$AD^2 = (625 - 175) : 2 = 225 \Rightarrow AD = 15$ cm

Lời giải

Gọi I,O lần lượt là tâm của hình chữ nhật $BDEH, CDFK$.



Ta có $\widehat{IBD}=\widehat{IDB}, \widehat{OCD}=\widehat{ODC}$ (tính chất hình chữ nhật).

Mà $\widehat{IBD}=\widehat{OCD}$ (do tam giác ABC cân tại A) nên
$\widehat{IBD}=\widehat{IDB}=\widehat{OCD}=\widehat{ODC}$

Do đó $BE//DK, DH//CA$, suy ra $AIDO$ là hình bình hành
$\Rightarrow AO = ID.$ Mà $HI = ID$ nên $AO = HI$

Lại có $AO//HI$ nên $AOIH$ là hình bình hành, do đó (1)
$AH//IO, AH = IO$

Chứng minh tương tự ta được $AIOK$ là hình bình hành nên (2)
$AK//IO, AK = IO$

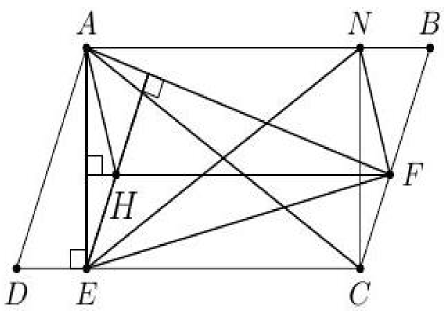
Từ (1) và (2) ta suy ra A,H,K thẳng hàng và $AH = AK$.

Vậy A là trung điểm của HK.

VÍ DU 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có các đường cao AE, AF. Tính khoảng cách từ A đến trực tâm H của tam giác AEF biết $AC = 25cm; EF = 24cm$

Lời giải

Kẻ $CN \perp AB$ tại $N \Rightarrow AECN$ là hình chữ nhật nên $AN = EC$. Xét tứ giác $EHFC$ có $EH//CF, HF//EC$ nên $EHFC$ là hình bình hành, do vậy $EC = HF \Rightarrow AN = HF$.



Xét tứ giác $ANFH$ có $AN//FH, AN = FH$ nên $ANFH$ là hình bình hành, do đó $AH = NF$ và $AH//NF$.

Lại có $AH \perp EF$ nên $FN \perp EF$.

Xét tam giác ENF vuông tại F có $EF = 24$ cm, $NE = AC = 25$ cm nên

$NF^2 = NE^2 - EF^2 = 25^2 - 24^2 = 4 NF = 7$ cm Vậy $AH = 7$ cm.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H. lên AB, AC và M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AM \perp IK$.

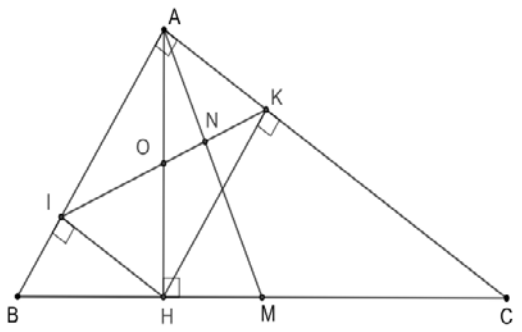
Lời giải

Gọi O, N lần lượt là giao điểm của AH, AM với IK.

Ta có $\widehat{MAK} = \widehat{MCK}; \widehat{OKA} = \widehat{OAK}$

nên $\widehat{MAK} + \widehat{OKA} = \widehat{MCK} + \widehat{OAK} = 90^0$

Do đó $AM \perp IK$.



BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo, H là hình chiếu vuông góc của A lên OD. Biết $\widehat{DAH} = \widehat{HAO} = \widehat{OAB}$, chứng minh rằng $ABCD$ là hình chữ nhật.

Lời giải

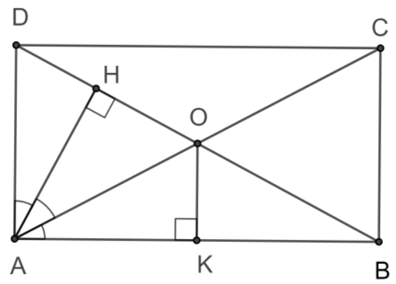
Kẻ $OK \perp AB$ tại K. Ta sẽ chứng minh $\widehat{BAD} = 90^\circ$.

Thật vậy, ta có

$\widehat{AOK} = 90^\circ - \widehat{OAK} = 90^\circ - \widehat{OAH} = \widehat{AOH}$.

Do đó $\Delta AOH = \Delta AOK\,(\text{g}-\text{c}-\text{g})$, suy ra $OK = OH$

Vì $OH \perp OD, \widehat{DAH} = \widehat{OAH}$ nên ΔADO cân tại A, do đó $OH = \frac{1}{2}OD$.



Mà $ABCD$ là hình bình hành nên $OB = OD$, do vậy $OK = OH = \frac{1}{2}OB$

Xét tam giác OKB vuông tại K có $OK = \frac{1}{2}OB$ nên $\widehat{OBK} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{OAB} = 30^\circ$

Do đó $\widehat{BAH} = 60^\circ, \widehat{BAD} = 90^\circ$. Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật.

BÀI 3. Cho tam giác ABC có trực tâm H và I là giao điểm của các đường trung trực. Gọi E là điểm đối xứng của A qua I. Chứng minh rằng $BHCE$ là hình bình hành.

Lời giải

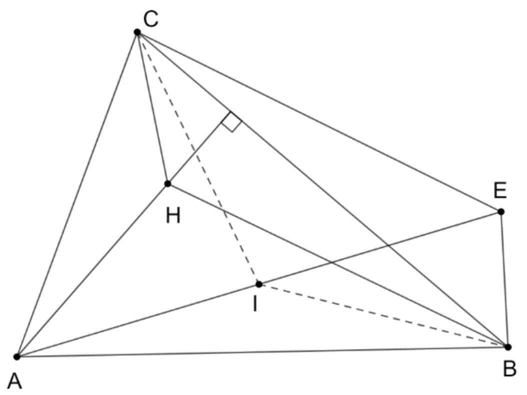
Vì I là giao điểm của các đường trung trực của ΔABC nên $IA = IB = IC$

Mà $IA = IE$ nên $IA = IB = IC = IE$. Xét tam giác AEC có I là trung điểm $AE, CI = \frac{1}{2}AE$ nên ΔACE vuông tại $C \Rightarrow CE \perp AC$

Mà $BH \perp AC$ nên $BH // CE$

Xét tam giác AEB có I là trung điểm $AE, BI = \frac{1}{2}AE$ nên $\triangle ABE$ vuông tại $B \Rightarrow BE \perp AB$. Mà $CH \perp AB$ nên $CH // BE$

Từ (1) và (2) ta suy ra $BHCE$ là hình bình hành.



BÀI 4. Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$ có đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh rằng HM là tia phân giác của góc $\widehat{AHC}$.

Lời giải

Kẻ $EK \perp BC$ tại $K, EI \perp AH$ tại $I \Rightarrow IHKE$ là hình chữ nhật, do đó $IE = HK$.

Mà $\widehat{EAI} + \widehat{HAB} = 90^\circ = \widehat{HAB} + \widehat{HBA}$

Nên $\widehat{HBA} = \widehat{EAI}$

Lại có $AB = AE$ nên $\Delta AHB = \Delta EIA$

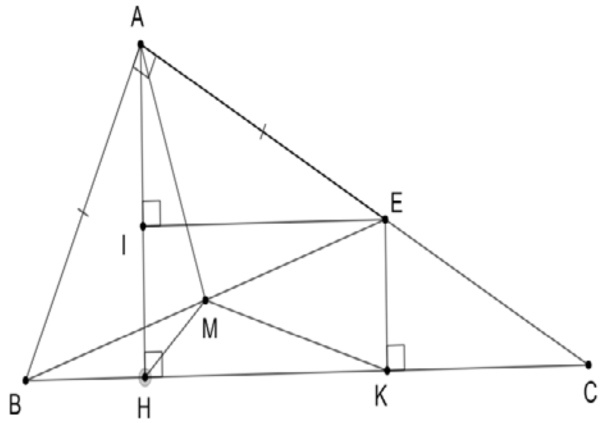
$\Rightarrow AH = IE = HK$

Vì các tam giác BAE, BKE lần lượt vuông và M là trung điểm BE.nên

$AM = KM = \frac{1}{2}BE.$

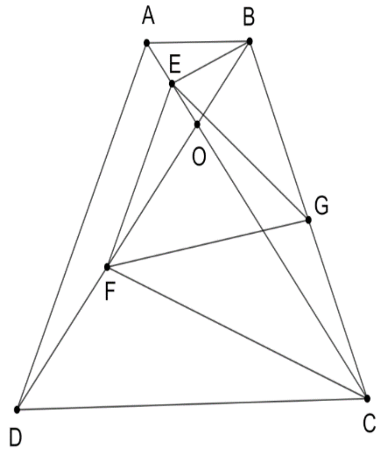
Do vậy $\Delta AHM = \Delta KHM$ $(\text{c} - \text{c} - \text{c})$

$\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{KHM}$, suy ra HM là tia phân giác của góc $\widehat{AHC}$



BÀI 5. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB // CD, \widehat{ACD} = 60^\circ$ và O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OA, OD, BC. Tam giác EFG là tam giác gì? Vì sao?

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $\Delta ACD = \Delta BDC$ (c.g.c). Mà $\widehat{ACD} = 60^\circ$ nên $\widehat{BDC} = 60^\circ$. Khi đó các tam giác OAB, OCD là các tam giác đều.

Vì E, F lần lượt là trung điểm của OA, OD nên

$BE \perp OA, CF \perp OD$ và $EF = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}BC$ $\quad (1)$

Xét các tam giác BEC , BFC lần lượt vuông tại E, F có G là trung điểm của BC nên $EG = FG = \dfrac{1}{2}BC$.

(2)

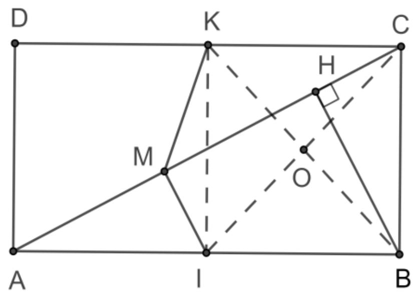
Từ (1) và (2) ta suy ra ΔEFG là tam giác đều.

BÀI 6. Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh B lên đường chéo AC của hình chữ nhật $ABCD$ và M,K lần lượt là trung điểm của AH,CD.

1 Gọi I,O lần lượt là trung điểm của AB,IC. Chứng minh rằng $MO=\frac{1}{2}IC$

2 Tính số đo góc $\widehat{BMK}$

Lời giải



1/ Vì $ABCD$ là hình chữ nhật và I,K lần lượt là trung điểm của AB,CD nên $BIKC$ là hình chữ nhật. Do đó O là trung điểm của CI,BK.

Xét tam giác IMC vuông tại M có

$MO=\frac{1}{2}IC$

2/ Xét tam giác MBK có $MO=\frac{1}{2}IC=\frac{1}{2}BK$

nên $\widehat{BMK}=90^\circ$.

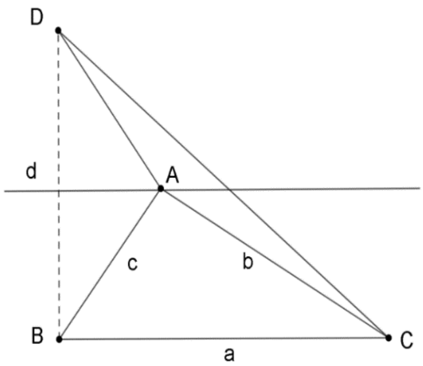
BÀI 7. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh bằng a,b,c, chu vi bằng $2p$ và các đường cao tương ứng lần lượt là h,m,n. Chứng minh rằng

a) $(b+c)^2\ge a^2+4h^2$

b) $h^2+m^2+n^2\le p^2$.

c) $h^2\le p\left(p-a\right)$

Lời giải



Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC và gọi D là điểm đối xứng của B qua d

a) Ta có $BD=2h$. Xét tam giác vuông BCD tại B có

$BD^2+BC^2=CD^2\le\left(AD+AC\right)^2\Rightarrow 4h^2+a^2=(b+c)^2(1)$

b) Từ (1) suy ra

$$4h^2\le\left(b+c\right)^2-a^2=\left(b+c+a\right)\left(b+c-a\right)=4(p-a)$$

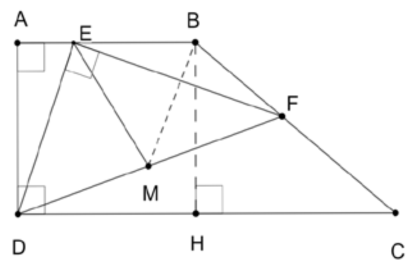
Do đó $h^2\le p(p-a)$

c) Tương tự câu b) ta có $m^2\le p\left(p-b\right)$ và $n^2\le p\left(p-c\right)$. Cộng các kết quả trên ta được

$h^2+m^2+n^2\le p\left(p-a+p-b+p-c\right)=p^2$.

BÀI 8. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A}=\hat{D}=90^{\circ}, AB=AD=\dfrac{CD}{2}$. Qua điểm E thuộc cạnh AB, kẻ đường thẳng vuông góc với DE, cắt BC tại F. Chứng minh rằng $ED=EF$.

Lời giải



Kẻ $BH \perp CD$ tai $H \Rightarrow ABHD$ là hình vuông, do đó $BH=a$ và $DH=a \Rightarrow CH=a$

Ta có $BH=HD=CH=a \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại B

Gọi M là trung điểm của DF

ta có $EM=BM=\dfrac{DF}{2} \Rightarrow$ các tam giác MEB, MFB cân tại M

Vì $ABHD$ là hình vuông nên $\widehat{DBH}=45^{\circ} \Rightarrow \widehat{ABC}=135^{\circ}$

Lại có $\widehat{MEB}+\widehat{MFB}=\widehat{MBE}+\widehat{MBF}=\widehat{EBF}=135^{\circ}$, do đó $\widehat{EMF}=360^{\circ}-2\cdot 135^{\circ}=90^{\circ}$

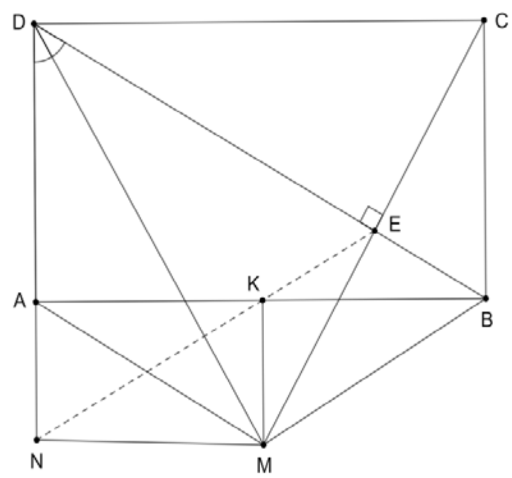
Xét tam giác DEF có EM là trung tuyến, đồng thời là đường cao nên ΔDEF cân tại E nên $ED=EF$

BÀI 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $\widehat{BDC}=30^{\circ}$. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại E và cắt tia phân giác của góc $\widehat{ADB}$ tại M. Gọi N, K lần lượt là hình chiếu của M lên AD, AB.

1/ Chứng minh rằng $AMBD$ là hình thang cân.

2/ Chứng minh rằng ba điểm N, K, E thẳng hàng

Lời giải



1) Vì N, K lần lượt là hình chiếu của M lên AD, AB nên $ANMK$ hình chữ nhật.

Vì $\widehat{BDC}=30^{\circ}$ nên $\widehat{ADB}=60^{\circ}$

$\Rightarrow \widehat{ADM}=\widehat{MDB}=\widehat{BDC}=30^{\circ}$ (do DM là tia phân giác $\widehat{BDC}$)

Vì DE là phân giác $\widehat{MDC}$ và $DE \perp MC$ nên ΔDMC là tam giác cân tại $D \Rightarrow DE$ là đường trung trực của $MC \Rightarrow BM=BC$

Vì $\widehat{BDC}=30^{\circ}$ nên $\widehat{DBC}=60^{\circ}$. Mà $\widehat{CEB}=90^{\circ}$ nên $\widehat{BCE}=30^{\circ}$.

Do đó $\widehat{CBM}=180^{\circ}-2\cdot 30^{\circ}=120^{\circ} \Rightarrow \widehat{MBA}=30^{\circ}$

Vì $\widehat{MCB}=\widehat{MDA}=30^{\circ}$ nên $\widehat{MCD}=\widehat{MDC}=60^{\circ}$, do vậy ΔMCD cân tại $M \Rightarrow MK$ là đường trung trực của CD (vì $MD \perp AB$ nên $MD \perp CD$) Từ đó ta có MK là trục đối xứng của hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow MK$ là đường trung trực của AB, vì vậy $MA = MB.$

Do đó $MA = MB = BC = AD$ (1)

Lại có $\widehat{AMD} = \widehat{ADM} = \widehat{MDB} = 30^\circ$ nên $AM \,//\, BD$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $AMBD$ là hình thang cân.

2) Vì M nằm trên tia phân giác góc $\widehat{NDE}$ nên $MN = ME$. Mà ΔNME cân tại M có $\widehat{NME} = 120^\circ$ nên $\widehat{MNE} = 30^\circ$. (3)

Lai có $MNAK$ là hình chữ nhật nên $\widehat{MNK} = \widehat{MAK} = \widehat{ABD} = 30^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra N, K, E thẳng hàng.

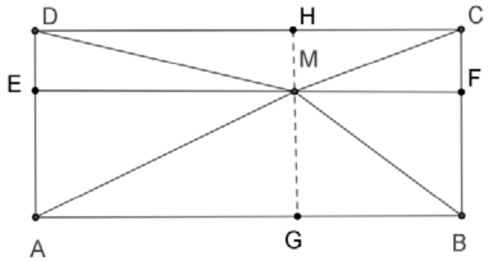
BÀI 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$.

1) Chứng minh rằng nếu M là điểm bất kỳ nằm trong $ABCD$ thì $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

2) Kết quả trên có thay đổi không nếu điểm M nằm ngoài hình chữ nhật?

Lời giải

1/Kẻ các đường $ME \perp AD, MG \perp AB, MF \perp BC, MH \perp CD$ (như hình vẽ bên).



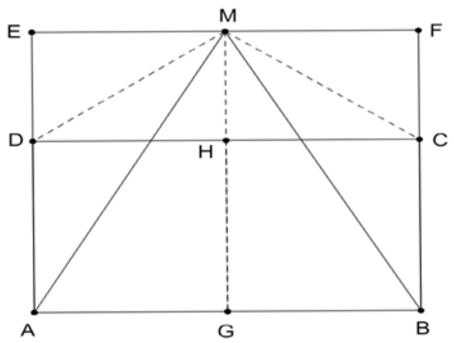
Ta có

$$MA^2 + MC^2 = ME^2 + MG^2 + MF^2 + MH^2 \quad (1)$$

$$MB^2 + MD^2 = MF^2 + MG^2 + ME^2 + MH^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

2) Trường hợp M nằm ngoài hình chữ nhật $ABCD$ ta có hình vẽ bên. Khi đó $MA^2 + MC^2 = ME^2 + EA^2 + MF^2 + FC^2$ (3)



$$MB^2 + MD^2 = MF^2 + FB^2 + ME^2 + ED^2$$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Vậy nếu M nằm ngoài hình chữ nhật $ABCD$ thì kết quả không thay đổi.

BÀI 11. Cho tam giác ABC. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các hình chữ nhật $ABDE, ACFG$, $BCHK$. Chứng minh rằng các đường trung trực của EG, FH, KD đồng quy

Lời giải

Gọi M là giao điểm của các đường trung trực
của các đoạn thẳng FH, DK. Ta có

$MA^2 + MD^2 = ME^2 + MB^2$

$MB^2 + MH^2 = MK^2 + MC^2$

$MC^2 + MG^2 = MF^2 + MA^2$

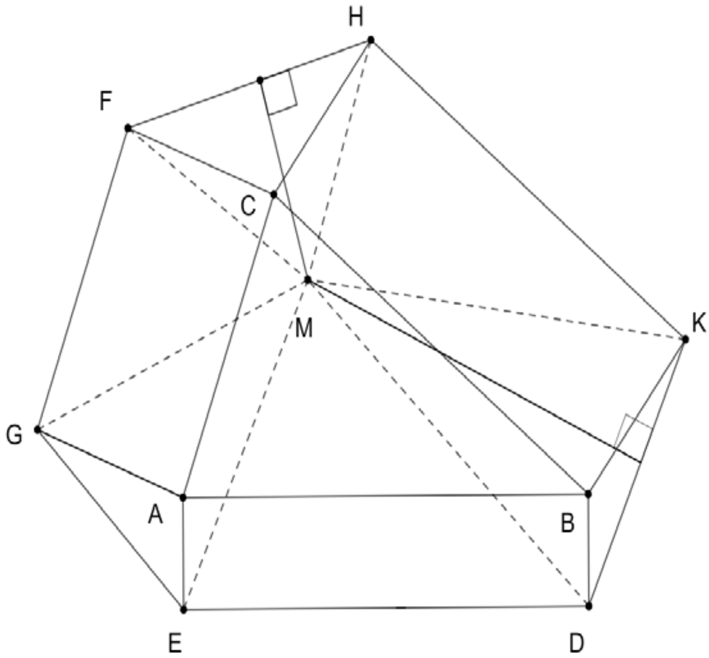
Cộng các kết quả trên ta được

$MD^2 + MH^2 + MG^2 = ME^2 + MK^2 + MF^2$

Vì $MD = MK, MH = MF$ Nên

$MG = ME$

Do đó M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng GE.Vậy các đường trung trực của EG, FH, KD đồng quy.



Bài 8

HÌNH THOI

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1 . Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
Định lí 1. Trong hình thoi

1 Hai đường chéo vuông góc với nhau.
2 Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

Hệ quả 1 . Dấu hiệu nhận biết
1 Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
2 Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi
3 Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
4 Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = 40^\circ, \widehat{D} = 80^\circ, AD = BC$. Gọi E và F là trung điểm của AB và CD. Tính $\widehat{EFD}, \widehat{EFC}$.

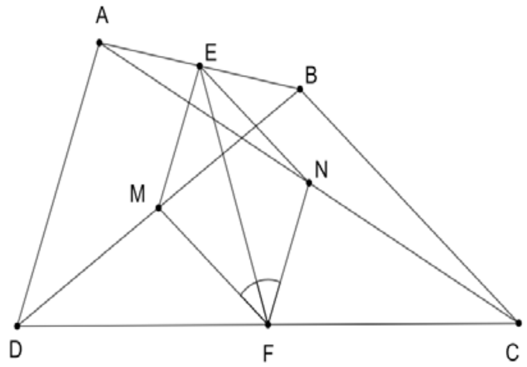
Lời giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BD, AC.

Ta có NF là đường trung bình của ΔADC nên $\widehat{NFC} = \widehat{ADC} = 80^\circ, MF$ là đường trung bình của ΔBDC nên $\widehat{MFD} = \widehat{BCD} = 40^\circ$.

Suy ra $\widehat{MFN} = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ$

Tứ giác $EMFN$ có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi.



Do đó $\widehat{F_1} = \widehat{F_2} = 60^\circ : 2 = 30^\circ$

Vậy

$\widehat{EFD} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ, \widehat{EFC} = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$.

3 Bài tập tự luyện

BÀI 1. Xác định dạng của một tứ giác, biết rằng

1/ Tứ giác đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau và không đi qua đỉnh của tứ giác.

2/ Tứ giác có hai trục đối xứng là hai đường chéo của nó.

Lời giải

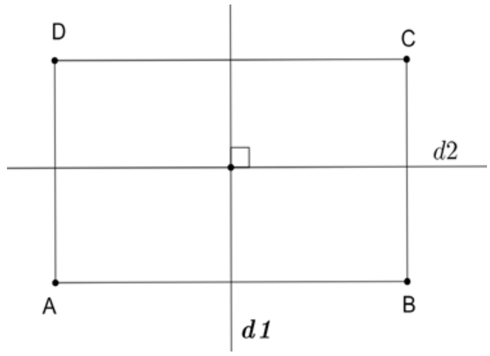
Giả sử tứ giác $ABCD$ có hai trục đối xứng vuông góc d_1 và d_2 như hình vẽ. Khi đó

d_1 là đường trung trực của AB và CD nên $AB // CD$

d_2 là đường trung trực của AD và BC nên $AB // BC$

Lại có $d_1 \perp d_2 \Rightarrow AB \perp BC$

Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật

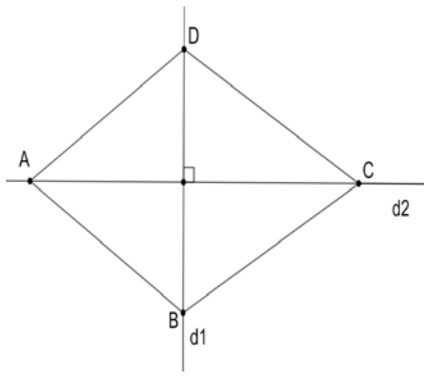


2/ Do BD là trục đối xứng nên BD là đường trung trực của AC

Nên $DA = DC, BA = BC$ và $AC \perp BD$

Do AC là trục đối xứng nên AC là đường trung trực của BD nên $AD = AB$

Vậy $ABCD$ là hình thoi.

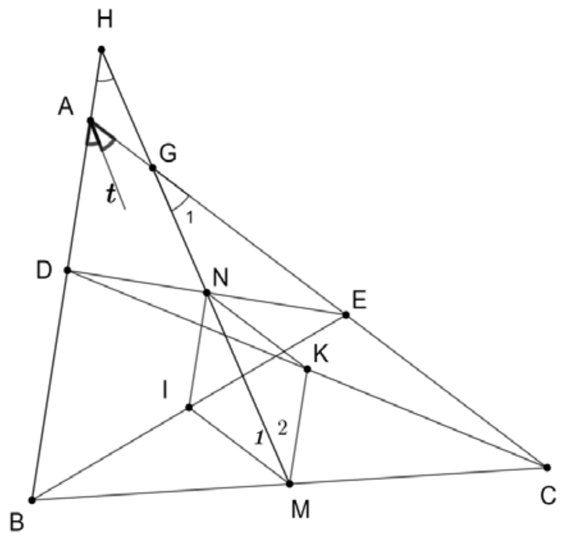


BÀI 2. Cho ΔABC. Điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC sao cho $BD = CE$. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, BC, DE

1/ Tứ giác $MINK$ là hình gì? Vì sao?

2/ Chứng minh rằng IK vuông góc với tia phân giác At của góc A.

Lời giải



1/ Có

$+MK$ là đường trung bình của ΔCBD (1)

$+NI$ là đường trung bình của ΔEBD (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MK = IN = \frac{1}{2}BD$ và

$MK // NI // DB$,

nên $MINK$ là hình bình hành. (3)

Lại có NK là đường trung bình của ΔDEC và $EC = BD$, suy ra $NK = IN$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra $MINK$ là hình thoi.

2/ Gọi G, H theo thứ tự là giao điểm của MN với AC, BD.

$+MI // CE \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{G_1}$ (hai góc so le trong)

$+MK // BD \Rightarrow \widehat{M_2} = \hat{H}$ (hai góc so le trong)

+ Mà $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (tính chất hình thoi). (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra ΔAHG cân tại A. Mà At là phân giác trong $\widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{BAt} = \widehat{AHG} \Rightarrow At // HG$ (do hai góc bằng nhau ở vị trí đồng vị)

Lại có $HG \perp IK \Rightarrow IK \perp At$

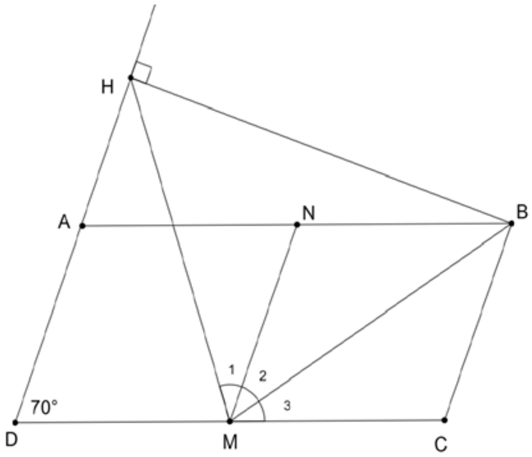
BÀI 3. Cho hình bình hành $ABCD, AB = 2AD, D = 70^\circ$. Gọi H là hình chiếu của B trên AD, M là trung điểm của CD. Tính số đo góc HMC.

Lời giải

Gọi N là trung điểm AB, có $\begin{cases} MN // DA \\ DA \perp BH \end{cases}$

$\Rightarrow MN \perp BH$ và MN đi qua trung điểm của $BH \Rightarrow MN$ là đường trung trực của $BH \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_2}$.

Lại có $\widehat{M_2} = \widehat{M_3}$ và $\widehat{NMC} = \widehat{ADM} = 70^\circ$. Vậy $\widehat{HMC} = 3 \cdot 35^\circ = 150^\circ$.



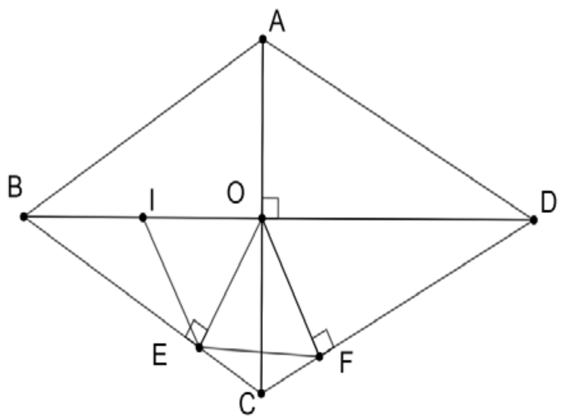
BÀI 4. Gọi O là giao điểm của các đường chéo hình thoi $ABCD, E$ và F theo thứ tự là hình chiếu của O trên BC và CD. Tính các góc của hình thoi biết rằng EF bằng một phần tư đường chéo của hình thoi.

Lời giải

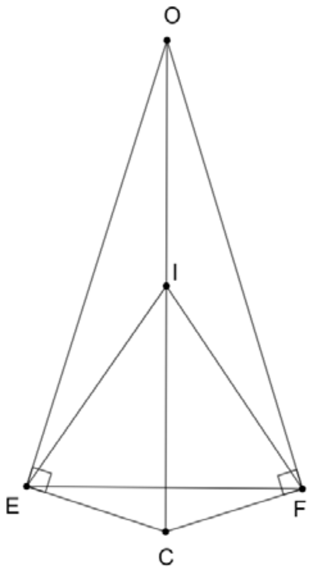
- Xét trường hợp $EF = \frac{1}{4}BD$.

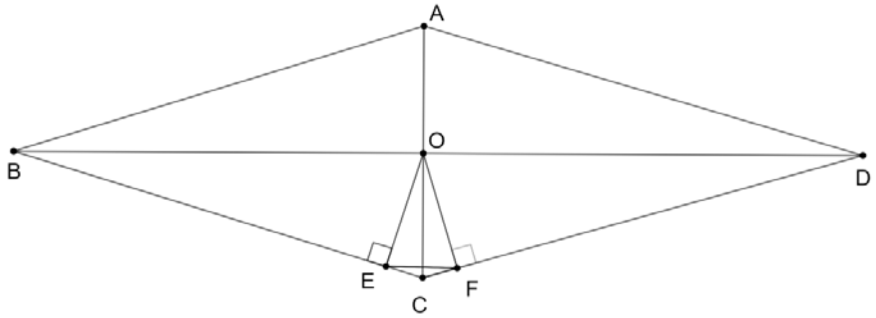
Gọi I là trung điểm OB . ΔEOB vuông tại E nên $EI = \frac{1}{2}BO = EF \Rightarrow EFOI$ là hình thoi, suy ra ΔOEF cân tại F, lại có $OE = OF$ nên ΔOEF đều $\Rightarrow \widehat{EOF} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ECF} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$

Vậy khi $EF = \frac{1}{4}BD$ thì $\hat{C} = \hat{A} = 120^\circ, \hat{B} = \hat{D} = 60^\circ$



Xét trường hợp $EF = \frac{1}{4}AC$.





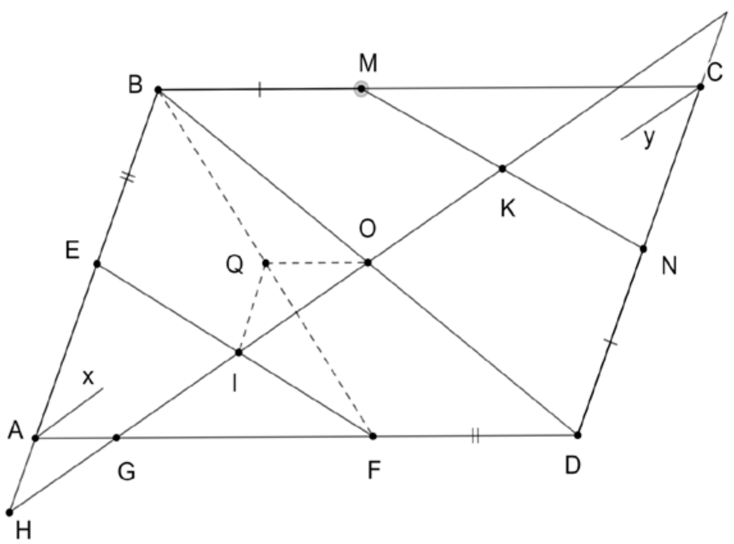
Gọi I là trung điểm $OC \Rightarrow EF = EI = IF \Rightarrow IEF$ đều $\Delta\widehat{CIF} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CIF} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{IOF}$
$15^\circ \Rightarrow \widehat{ODF} = 15^\circ \Rightarrow \hat{D} = 30^\circ = \hat{B}$ và $\hat{A} = \hat{C} = 150^\circ$

BÀI 5. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình bình hành $ABCD$, lấy theo thứ tự các điểm E, M, N, F sao cho $BM = DN, BE = DF$. Gọi I, O, K theo thứ tự là trung điểm của EF, BD, MN

1) Chứng minh rằng ba điểm I, O, K thẳng hàng.

2) Trong trường hợp nào thì cả năm điểm A, I, O, K, C thẳng hàng?

Lời giải



1/ Trước hết, ta chứng minh rằng đường thẳng OI tạo với AB và AD các góc bằng nhau.
Thậy vậy, gọi Q là trung điểm của BF ta có

$+IQ$ là đường trung bình của $\Delta FBE \Rightarrow IQ = \frac{1}{2}BE$.

$+OQ$ là đường trung bình của $\Delta BFD \Rightarrow OQ = \frac{1}{2}FD$.

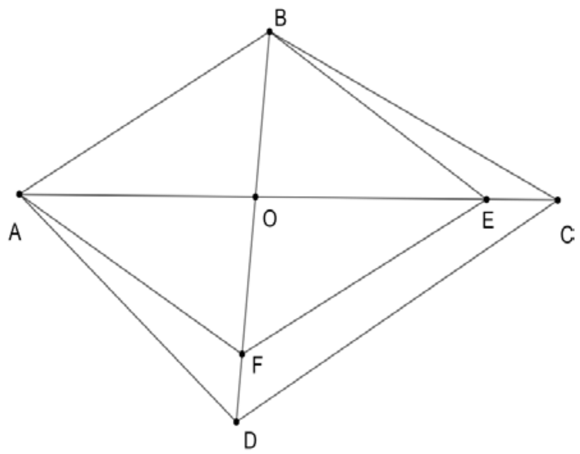
Mà $BE = FD \Rightarrow QI = QO$

- Nếu $ABCD$ là hình thoi thì I, O, A thẳng hàng. Tương tự K, O, C thẳng hàng. Do đó năm điểm A, I, O, K, C thẳng hàng.

Nếu $ABCD$ không là hình thoi, ta có ΔQIO cân. Gọi G, H là giao điểm của OI với AD, AB. Ta có $\hat{O} = \hat{I}, \widehat{QIO} = \hat{H}$ (góc đồng vị) và $\widehat{QOI} = \widehat{OGF}$ (góc so le trong) nên $\hat{G} = \hat{H}$ do đó HG song song với tia phân giác Ax của góc A. Tương tự, OK song song với phân giác Cy của góc C. Nhưng $Ax // Cy$, do đó I, O, K thẳng hàng.

BÀI 6. Tứ giác $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau tại O và chu vi các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA bằng nhau. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thoi.

Lời giải



Giả sử $OC \geq OA, OD \geq OB$. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm E, trên đoạn thẳng OD lấy điểm F sao cho $OE = OA, OF = OB$. Tứ giác $ABEF$ là hình bình hành, chu vi ΔOAB bằng chu vi ΔOEF Theo đề bài, chu vi ΔOAB bằng chu vi nên chu vi các tam giác OEF và OCD bằng nhau, tức là $EF = EC + CD + DF$. Điều này chỉ xảy ra khi C trùng E và D trùng F. Vậy $ABCD$ là hình bình hành. Theo đề bài, chu vi ΔOAB bằng chu vi ΔOBC, tức là $OA + AB + BO = OB + BC + CO$ mà $OA = CO$ nên $AB = BC$, vậy $ABCD$ là hình thoi.

BÀI 7. Gọi H là trực tâm của tam giác đều ABC, đường cao AD. Lấy điểm M bất kì thuộc cạnh BC. Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, AC. Gọi I là trung điểm của AM.

1 Xác định dạng của tứ giác $DEIF$.

2 Chứng minh rằng các đường thẳng MH, ID, EF đồng quy.

Lời giải

1/ ΔDAM vuông tại D, có DI là đường trung tuyến nên $DI = \frac{1}{2}AM$ (1)

ΔEAM vuông tại E, có EI là đường trung tuyến nên $EI = \frac{1}{2}AM$ (2)

Lại có $\widehat{MIE} = \widehat{IAE} + \widehat{IEA} = 2\widehat{IAE}$

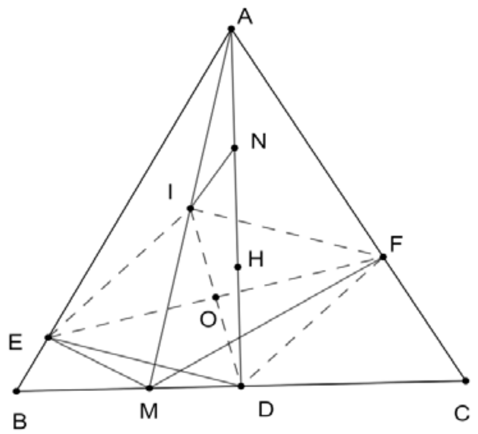
$\widehat{MIE} = \widehat{IAE} + \widehat{IEA} = 2\widehat{IAE}$

$\widehat{DIE} = \widehat{DIM} + \widehat{MIE} = 2(\widehat{IAD} + \widehat{IAE}) = 2\widehat{DAE} = 60^\circ$ (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra ΔDIE đều (4)

Chứng minh tương tự ΔDIF đều (5).

Từ (4) và (5), suy ra $DEIF$ là hình thoi.



b) Gọi O là giao điểm của ID và EF. Cần chứng minh M, O, H thẳng hàng. Gọi N là trung điểm của AH, ta có OH là đường trung bình của $\Delta DIN \Rightarrow OH // IN$.

IN là đường trung bình của $\Delta AMH \Rightarrow MH // IN$. Suy ra OH và MH cùng song song với IN hay H, O, M thẳng hàng. Vậy HM, ID, EF đồng quy.

Bài 9

HÌNH VUÔNG.

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1 . Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

Nhận xét. *Từ định nghĩa hình vuông, ta suy ra*

- *Hình vuông là hình chữ nhật có bốn canh bằng nhau.*
- *Hình vuông là hình thoi có bốn góc vuông.*

Hình vuông vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.

Tính chất 1 . Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

Hệ quả 1 . Dấu hiệu nhận biết

❶Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.

❷Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.

❸Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc vuông là hình vuông.

❹Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.

❺Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. VD 16 –tr 96

Gọi M là điểm bất kì trên đoạn thẳng AB.Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMCD$, $BMEF$.

1) Chứng minh rằng $AE \perp BC$.

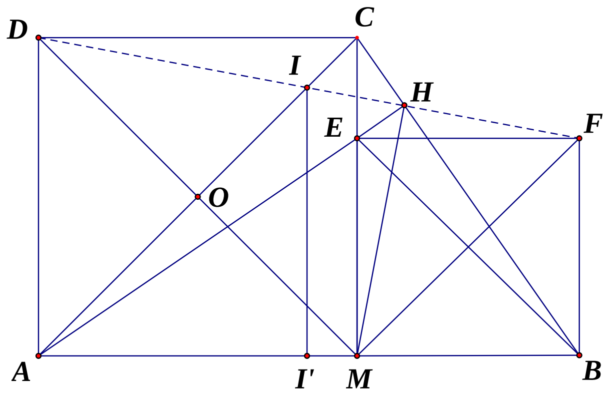
2) Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng ba điểm D, H, F thẳng hàng.

3) Chứng minh rằng đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M chuyển động trên đoạn thẳng AB cố định.

Lời giải

1) Xét ΔCAB, ta có $CM \perp AB, BE \perp AC$ (vì $BE \perp MF$, $MF // AC$). Suy ra $AE \perp BC$

2) Gọi O là giao điểm của AC và DM. Do $\widehat{AHC} = 90^\circ$ nên, $OH = \dfrac{AC}{2}$ do đó $OH = \dfrac{DM}{2}$.



Tam giác MHD có đường trung tuyến HO bằng nửa DM nên $\widehat{MHD} = 90^\circ$ (1)

Chứng minh tương tự

$$\widehat{MHF} = 90^\circ \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra D, H, F thẳng hàng.

3) Gọi I là giao điểm của DF và AC;

ΔDMF có $DO = OM$, $OI \,//\, MF$

nên I là trung điểm của DF

Kẻ $II' \perp AB$ thì I' là trung điểm của AB và

$$II' = \frac{AD + BF}{2} = \frac{AM + MB}{2} = \frac{AB}{2}$$

Do đó I là điểm cố định: I nằm trên đường trung trực của AB và cách AB một khoảng bằng $\dfrac{AB}{2}$

3 Bài tập tự luyện

BÀI 1. Tứ giác $ABCD$ có E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BD, DC, CA. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để $EFGH$ là hình vuông.

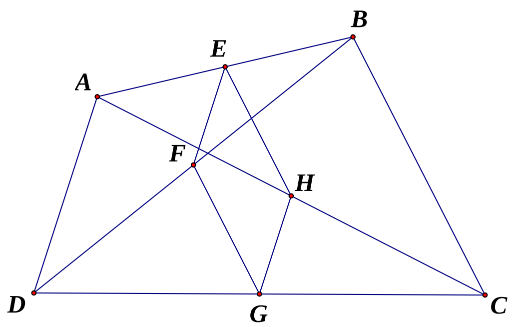
Lời giải

$+EF$ là đường trung bình của ΔBAD

$\Rightarrow EF = \dfrac{1}{2}AD$ và $EF \,//\, AD$

$+GH$ là đường trung bình của ΔCAD

$\Rightarrow GH = \dfrac{1}{2}AD$ và $GH \,//\, AD$

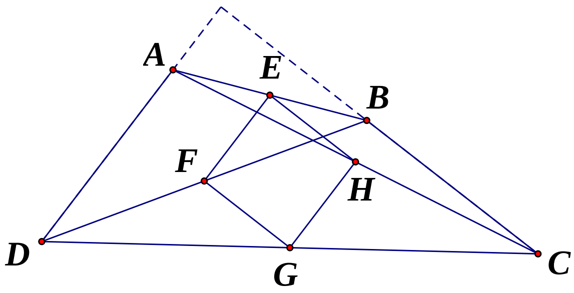


Tứ giác $EFGH$ có EF // GH và $EF = GH$. Suy ra $EFGH$ là hình bình hành.

+ Ta cũng có $EH // FG // BC$;

$EH = FG = \dfrac{BC}{2}$.

Điều kiện để hình bình hành $EFGH$ trở thành hình vuông là $EF \perp EH$ và $EF = EH \Leftrightarrow AD \perp BC$ và $AD = BC$ (hình vẽ bên).



BÀI 2 Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đường chéo AC. Gọi E, F theo thứ tự là các hình chiếu của M trên AD, CD. Chứng minh rằng:

1) BM vuông góc với EF.

2) Các đường thẳng BM, AF, CE đồng quy.

Lời giải

1) Gọi K là giao điểm của EM và BC. Vì M nằm trên đường chéo AC của hình vuông nên:

+ ΔEAM vuông cân tại E, suy ra

$EM = EA = BK$

$+ MFCK$ là hình vuông, suy ra $MF = MK$

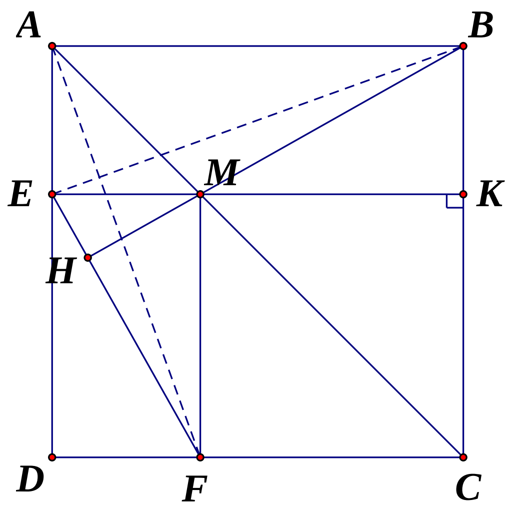
Vậy $\Delta EMF = \Delta BKM$ (c.g.c) nên $\widehat{MFE} = \widehat{KMB}$

Gọi H là giao điểm của BM và EF, ta có

$\widehat{EMH} = \widehat{BMK}$, suy ra $\widehat{EMH} = \widehat{MFH}$.

Mà $\widehat{EMH} + \widehat{HMF} = 90^\circ$

nên $\widehat{MFH} + \widehat{HMF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MHF} = 90^\circ$ hay $BH \perp EF$. Vậy $MB \perp EF$



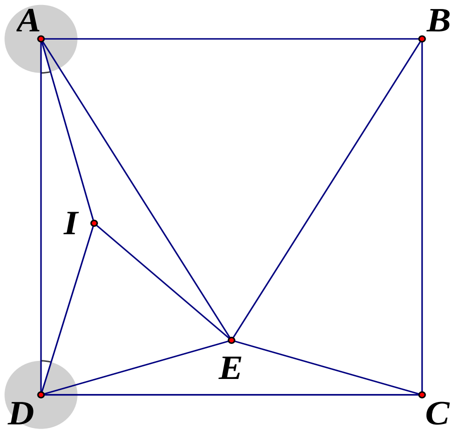
2) $\Delta ADF = \Delta BAE$ (c.g.c), suy ra $\widehat{DAF} = \widehat{ABE}$, mà $\widehat{EAF} + \widehat{FAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FAB} + \widehat{ABE} = 90^\circ$ suy ra $AF \perp EB$. Chứng minh tương tự, $CE \perp BF$.

Vậy BM, AF, CE là các đường cao của ΔBEF nên chúng đồng quy.

BÀI 3. Cho hình vuông $ABCD$. Điểm E nằm trong hình vuông sao cho tam giác ECD cân có góc đáy bằng 15°. Chứng minh rằng ΔABE là tam giác đều.

Lời giải

Vẽ điểm I trong hình vuông sao cho ΔIAD cân tại I có góc ở đáy bằng 15°



$\Delta IAD = \Delta EDC$ (g.c.g) $\Rightarrow ID = ED$

$\widehat{IDE} = \widehat{ADC} - \left(\widehat{ADI} + \widehat{EDC}\right) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Vậy ΔIED đều.

$\widehat{AIE} = 360^\circ - \left(\widehat{AID} + \widehat{DIE}\right) = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ) = 150^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AIE} = \widehat{AID}$

Suy ra $\Delta IAE = \Delta IAD$ (c.g.c) nên $EA = AD$.

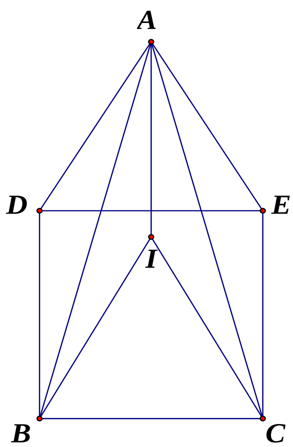
Chứng minh tương tự $\Delta ECB = \Delta EDA \Rightarrow BE = BC$.

Vậy $BE = AE = BC$.

BÀI 4. Cho ΔABC cân tại A, góc đáy 75° và hình vuông $BDEC$ (các điểm A, D, E nằm cùng phía đối với BC). Hãy xác định dạng của ΔADE.

Lời giải

Vẽ tam giác đều BIC vào trong hình vuông.



$\widehat{ABI} = \widehat{ABC} - \widehat{IBC} = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$

$\widehat{ABD} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 15^\circ$. Suy ra $\Delta BDA = \Delta BIA$ (c.g.c),

suy ra $DA = AI$ và $\widehat{DAB} = \widehat{IAB}$

Chứng minh tương tự $\Delta CAI = \Delta CAE \Rightarrow AE = AI$

và $\widehat{IAC} = \widehat{CAE}$. Suy ra $AD = AE = AI$ và

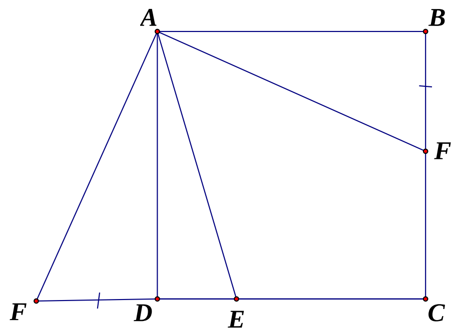
$\widehat{DAE} = 2\widehat{BAI} + 2\widehat{CAI} = 2\widehat{BAC} = 60^\circ$

Vậy ΔADE đều.

BÀI 5. Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh CD, điểm F thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng chu vi ΔCEF bằng nửa chu vi hình vuông khi và chỉ khi $\widehat{EAF} = 45^\circ$

Lời giải

Trên tia đối của tia DC lấy $DK = BF, \Delta ADK = \Delta ABF$ (c.g.c) nên $AK = AF, \widehat{KAF} = 90^\circ$.



*Ta chứng minh mệnh đề " $\widehat{EAF} = 45^\circ$ thì chu vi CEF bằng nửa chu vi hình vuông".

$\widehat{EAF} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EAK} = 45^\circ \Rightarrow \Delta EAK = \Delta EAF$ (c.g.c)

$\Rightarrow EK = EF$

Do đó chu vi ΔCEF bằng
$CE + CF + EF = CE + CF + EK =$

$CE + CF + ED + DK = CE + CF + ED + FB$ (bằng nửa chu vi hình vuông).

*Ta chứng minh mệnh đề "Chu vi CEF bằng nửa chu vi hình vuông thì $\widehat{EAF} = 45^\circ$ "

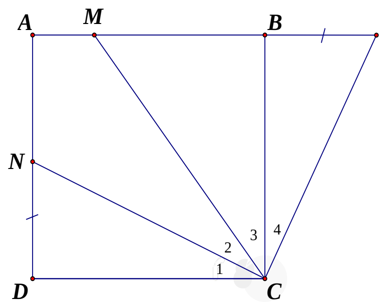
$$CE + CF + EF = CB + CD \Rightarrow EF = ED + BF \Rightarrow EF = ED + DK = EK$$

$\Delta EAK = \Delta EAF$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{EAF} \Rightarrow \widehat{EAF} = 45^\circ$

BÀI 6. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M thuộc canh AB. Tia phân giác của $\widehat{MCD}$ cắt cạnh AD ở N. Cho biết $BM = m, DN = n$. Tính độ dài CM theo m và n.

Lời Bài

Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho $BK = DN = n$;



$\Delta DCN = \Delta BCK \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_4$ và $\widehat{DNC} = \widehat{BKC}$ (1)

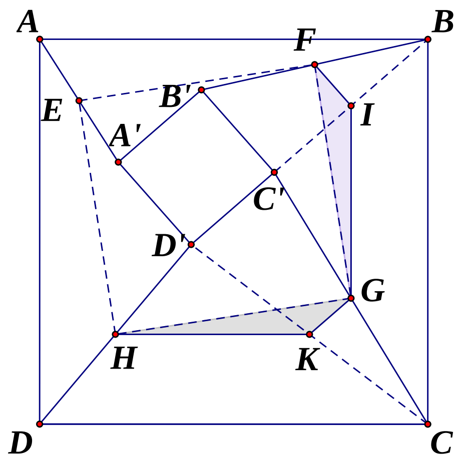
Mà $\widehat{DNC} = \widehat{NCB}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{NDC} = \hat{C}_2 + \hat{C}_3 = \hat{C}_4 + \hat{C}_3 = \widehat{MCK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔMCK cân tại M, vậy $CM = MK = m + n$

BÀI 7. Cho hình vuông $A'B'C'D'$ nằm trong hình vuông $ABCD$ sao cho thứ tự các đỉnh theo cùng một chiều như nhau (tức là nếu vẽ hai đường tròn, mỗi đường tròn đi qua các đỉnh của một hình vuông, thì chiều đi trên đường tròn từ A lần lượt B, C, D và từ A' lần lượt qua B', C', D' là như nhau). Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' là đỉnh của một hình vuông.

Lời giải

Gọi E, F, G,H thứ tự là trung điểm của AA’, BB’, CC’, DD’.
Gọi I , K là trung điểm BC’, CD’.



FI là đường trung bình $\Delta BB'C'$ nên $FI // B'C'$ và

$FI = \frac{1}{2}B'C'$ (1)

GK là đường trung bình $\Delta CC'D'$ nên $GK // C'D'$ và

$GK = \frac{1}{2}C'D'$ (2)

Lại có $B'C' = C'D'$ và $B'C' \perp C'D'$ (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra $\begin{cases} FI = GK \\ FI \perp KG \end{cases}$ (4)

Chứng minh tương tự ta có $\begin{cases} GI = HK \\ GI \perp HK \end{cases}$ (5)

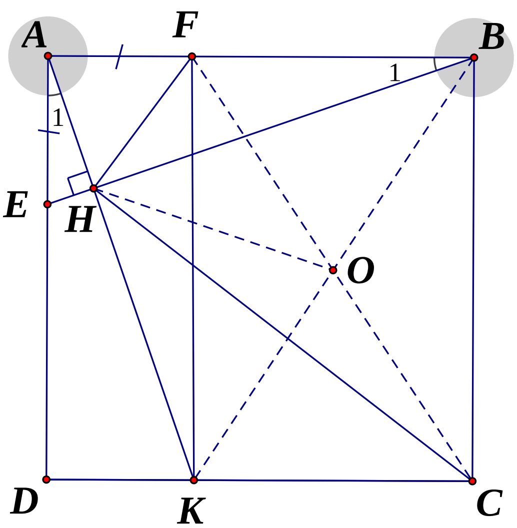
Từ (4) và (5) ta có $\begin{cases} FI = GK \\ \widehat{FIG} = \widehat{GKH} \\ IG = KH \end{cases} \Rightarrow \Delta FIG = \Delta GKH \Rightarrow FG = GK$ và $GF \perp GH$ (tính chất hai góc bằng nhau có cặp cạnh tương ứng vuông góc).

Chứng minh tương tự ta được $GH = HE = EF = FG$, từ đó suy ra $EFGH$ là hình vuông.

BÀI 8. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AD, AB sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu của A trên BE. Tính $\widehat{CHF}$

Lời giải

Gọi K là giao điểm của AK và DC



$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ AD = BA \Rightarrow \Delta ADK = \Delta BAE \\ \widehat{ADK} = \widehat{EAB} \end{cases}$

$\Rightarrow DK = AE = AF \Rightarrow BFKC$ là hình chữ nhật

Gọi O là tâm hình chữ nhật $BFKC$

Xét ΔHKB vuông tại H nên

$HO = \frac{1}{2}KB = \frac{1}{2}FC \Rightarrow \Delta HCF$ vuông tại H.

Vậy $\widehat{CHF} = 90^\circ$.

BÀI 9. Cho điểm M thuộc cạnh CD của hình vuông $ABCD$. Tia phân giác của góc ABM cắt AD ở I. Chứng minh: $BI \le 2MI$.

Lời giải

Vẽ $MH \perp BI, MH$ cắt AB tại E.Do BI là phân giác $\widehat{ABM}$

nên E đối xứng với M qua BI. Ta có

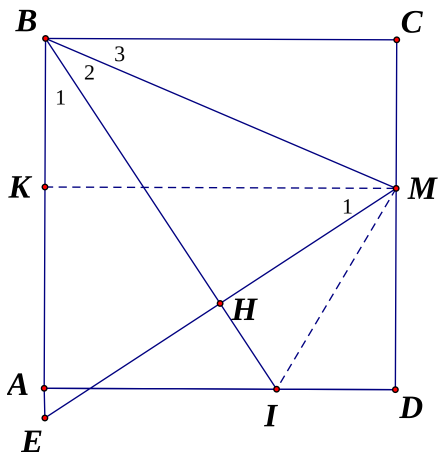
$ME = 2MH \le 2MI$ (1)

Kẻ $MK \perp AB$, xét ΔMKE và ΔBAI có

$\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{M}_1 \text{ (Góc có cạnh tương ứng vuông góc)} \\ MK = BA \\ \hat{K} = \hat{A} = 90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta MKE = \Delta BAI \Rightarrow ME = BI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BI \le 2MI$.



BÀI 10. Vẽ ra phía ngoài của một tam giác các hình vuông cạnh là cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

1) Các đoạn thẳng nối trung điểm một cạnh của tam giác với tâm các hình vuông dựng trên hai cạnh kia bằng nhau và vuông góc với nhau.

2) Đoạn thẳng nối tâm hai hình vuông bằng và vuông góc với đoạn thẳng nối tâm hình vuông thứ ba với đỉnh chung của hai hình vuông trước.

Lời giải

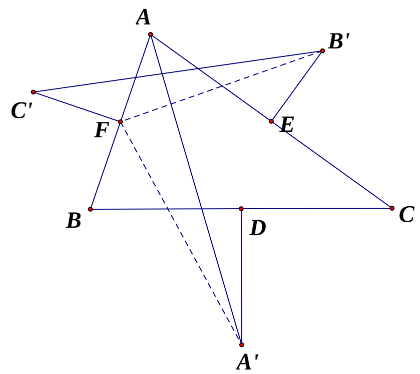
1) Vì A' là tâm hình vuông cạnh BC nên $A'D = \frac{1}{2}BC$.

Vì EF là đường trung bình ΔABC nên $EF = \frac{1}{2}BC$

Vây $A'D = EF$. (1)

Chứng minh tương tự: $FD = EB'$. (2)

Có $A'D \perp BC \Rightarrow A'D \perp FE$ (3)



Lại có $\begin{cases} FD \parallel AC \\ AC \perp EB' \end{cases} \Rightarrow FD \perp EB'$ (4)

Từ $(3),(4) \Rightarrow \widehat{B'EF} = \widehat{FDA'}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) (5)

Từ $(1),(2)$ và (5) suy ra $\Delta ADF = \Delta FEB'$(c.g.c)

$\Rightarrow FA' = FB'$ và $\widehat{FB'E} = \widehat{A'FD}$, mà $EB' \perp FD \Rightarrow FB' \perp FA'$

b) Xét $\Delta AFA'$ và $\Delta C'FB'$ có

$$\begin{cases} AF = C'F & \text{(do C' là tâm hình vuông cạnh AB)} \\ FB' = FA'(cmt) \\ \widehat{AFA'} = \widehat{B'FC'} & \text{(góc có cạnh tương ứng vuông góc)} \end{cases}$$

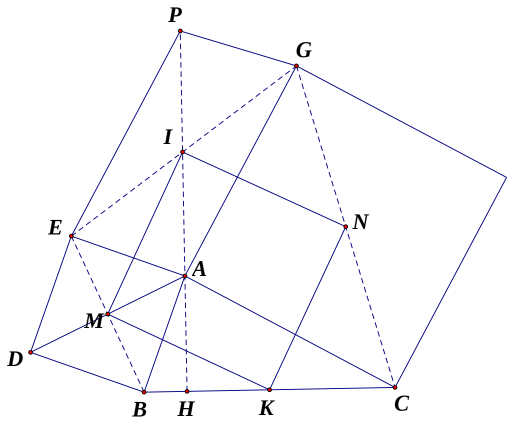
$\Rightarrow \Delta AFA' = \Delta C'FB' \Rightarrow B'C' = AA'$ và $B'C' \perp AA'$ (cạnh tương ứng vuông góc của hai góc bằng nhau).

BÀI 11. Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác các hình vuông $ABDE, ACFG$ có tâm theo tứ tự M, N. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của EG, BC.

1) Chứng minh rằng $KMIN$ là hình vuông.

2) Nếu tam giác ABC có BC cố định và đường cao tương ứng bằng h không đổi thì I chuyển động trên đường tròn nào?

Lời giải



1) Xét ΔAEC và ΔABG có

$$\begin{cases} AE = AB \\ \widehat{EAC} = \widehat{BAG} & \text{(góc có cạnh tương ứng vuông góc)} \\ AC = AG \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta AEC = \Delta ABG \Rightarrow EC = BG$ và $EC \perp BG$ (cạnh tương ứng vuông góc).

Lại có: MK là đường trung bình ΔBEC nên

$MK = \frac{1}{2}CE$ và $MK // CE$

NK là đường trung bình ΔCGB nên $NK = \frac{1}{2}BG$ và

$NK // BG$

Do đó $MK = KN$ và $MK \perp KN$. Tứ giác $KMIN$ có $MK = KN$ và $MK \perp KN$ nên là hình vuông.

2) Do $EA \perp AB$ và EA // PG nên $PG \perp AB$.

$$\begin{cases} PG \perp AB \\ GA \perp AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{PGA} = \widehat{BAC}$$

Xét ΔPGA và ΔBAC có

$$\begin{cases} PG = BA(= EA) \\ \widehat{PGA} = \widehat{BAC} \\ AG = AC \end{cases} \Rightarrow \Delta PGA = \Delta BAC \text{ (c-g-c)}$$

$\Rightarrow PA = BC$ và $PA \perp BC$ (cạnh tương ứng vuông góc của hai góc bằng nhau).

Suy ra I chuyển động trên đường thẳng song song với BC, cách BC một khoảng $h + \frac{1}{2}BC$.

BÀI 12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, H theo thứ tự là tâm các hình vuông có cạnh AB, BC, CD, DA dựng phía ngoài tứ giác. Chứng minh rằng

1) Tứ giác $EFGH$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.

2) Trung điểm các đường chéo của các tứ giác $ABCD, EFGH$ là đỉnh của một hình vuông.

Lời giải

1)Gọi K là trung điểm của AC, theo bài 10 phần

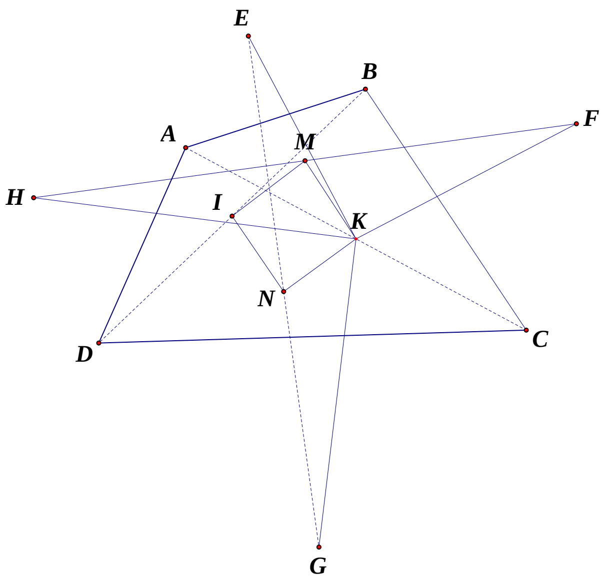
a) ta có $KE = KF, KE \perp KF, KH = KG$

$KH \perp KG$, suy ra $\Delta FKH = \Delta EKG$ (c.g.c).

Suy ra $FH = EG$ và $FH \perp EG$.

2) Gọi M, N thứ tự là trung điểm của HF, EG thì KM, KN là các đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác trên, do đó $KM = KN, KM \perp KN$. Vậy ΔMKN vuông cân tại K.

Gọi I là trung điểm của BD, chứng minh tương tự, ΔIMN vuông cân tại I. Do đó IMKN là hình vuông.



BÀI 13. Cho bốn điểm E, G, F, H. Dựng hình vuông $ABCD$ có bốn đường thẳng chứa cạnh đi qua bốn điểm E, G, F, H

Lời giải

Phân tích. Qua G, vẽ $GI \perp EF$, cắt CD ở K

Ta có $\Delta GG'K = \Delta FF'E$ nên $GK = EF$. Ta dựng được HK làđường thẳng chứa cạnh hình vuông.

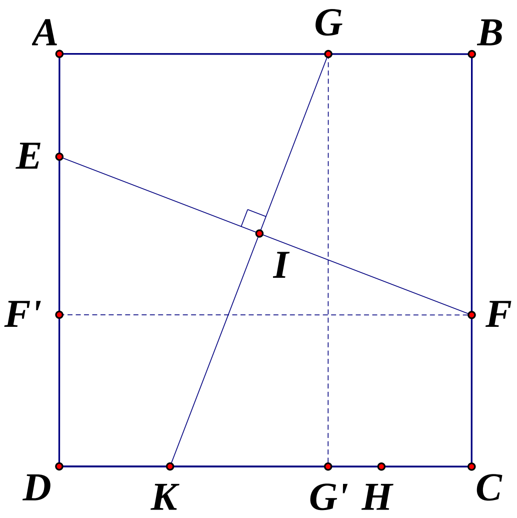
Cách dựng

+ Dựng đường thẳng GI vuông góc với EF tại I.

+ Dựng điểm K trên GI sao cho $GK = EF$.

+ Dựng đường thẳng AD, BC lần lượt qua E, F vuông góc với HK tại D, C

+ Dựng đường thẳng qua G vuông góc với AD, BC tại A, B.



Biện luận. Qua G, có thể vẽ $GI \perp EF$, hoặc $GI \perp EH$, hoặc $GI \perp HF$. Với mỗi cách trong ba cách trên, có hai cách chọn K

(chẳng hạn trên đường thẳng $GI \perp EF$, có hai điểm K và K' sao cho $GK = GK' = EF$).

Do đó bài toán có $3 \times 2 = 6$ (nghiệm hình). Riêng trường hợp một trong hai điểm K hoặc K' trùng với điểm thứ tư, bài toán có vô số nghiệm hình.

BÀI 14. Cho ba điểm E, O, F. Dựng hình vuông $ABCD$ nhận O là giao điểm hai đường chéo, E và F thứ tự thuộc

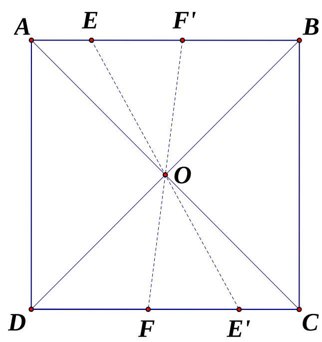
1) Các đường thẳng AB và CD;

2) Các đường thẳng AB và BC.

Lời giải

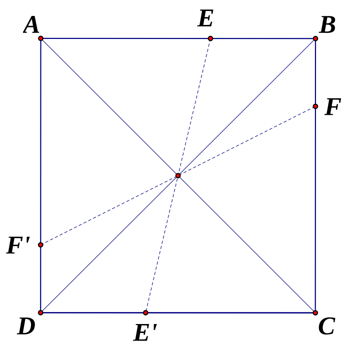
1)Dựng E' đối xứng với E qua O, dựng F' đối xứng với F qua O. Ta xác định được các đường thẳng AB và CD lần lượt đi qua E, F' và F, E'.

- Dựng các điểm M, N là hình chiếu của O lên AB và DC.
- Dựng các đỉnh A, B, C, D của hình vuông.



2)Dựng điểm E' đối xứng với E qua O, dựng F' đối xứng với F qua O.

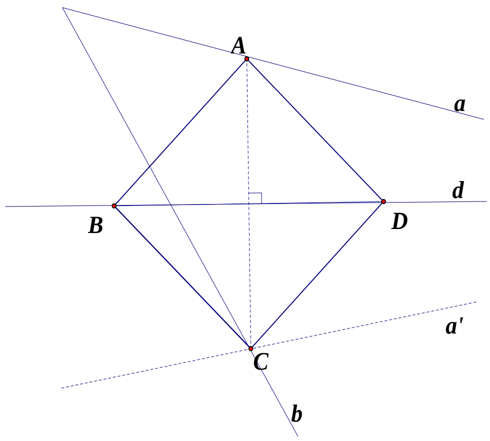
Đưa bài toán về dựng hình vuông biết bốn điểm thuộc bốn đường thẳng chứa cạnh hình vuông (bài 13)



BÀI 15. Cho ba đường thẳng a, b, c. Dựng hình vuông $ABCD$ có A thuộc a, C thuộc b còn B và D thuộc d.

Lời giải

Phân tích: Gọi C đối xứng với A qua d, mà A thuộc a nên C thuộc a' đối xứng với a qua d. Mặt khác C thuộc b.



Cách dựng.

\+ Dựng đường thẳng a' đối xứng với a qua d, a' cắt b tại C.

\+ Dựng A đối xứng với C qua d, sau đó dựng B, D.

Biện luận.

Nếu d cắt các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng a và b, hoặc đường thẳng song song cách đều a và b, bài toán có một nghiệm hình.

Nếu d song song (hoặc trùng) với một đường phân giác của

các góc tạo bởi hai đường thẳng a và b hoặc đường thẳng song song cách đều a và b, bài toán không có nghiệm hình (hoặc vô số nghiệm hình).

Chương 2 — ĐA GIÁC

Bài 1 — ĐA GIÁC.

1 Tóm tắt lý thuyết

Đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_n$ là hình gồm n đoạn thẳng $(n \ge 3)$, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

Đa giác lồi là đa giác nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

Khi nói dến đa giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là đa giác lồi.

Tổng số đo các góc của đa giác n cạnh là $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Tổng các góc của một đa giác n cạnh trừ đi góc A của nó bằng 570°. Tính n và $\hat{A}$.

Lời giải

Ta có $(n-2)\cdot 180^\circ - \hat{A} = 570^\circ$ nên $\hat{A} = (n-2)\cdot 180^\circ - 570^\circ$

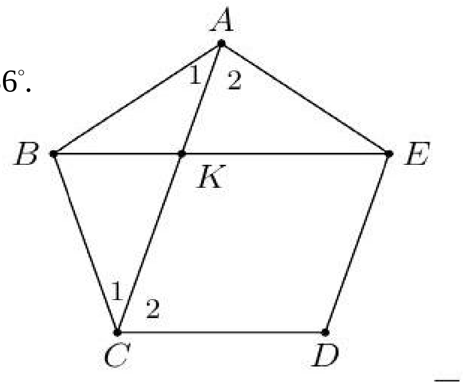
Do $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ nên $0 < (n-2)\cdot 180^\circ - 570^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow 0 < n-2-\dfrac{570}{180} < 1 \Leftrightarrow 5\dfrac{1}{6} < n < 6\dfrac{1}{6}$

Do n là số tự nhiên nên $n = 6$ và $\hat{A} = (6-2)\cdot 180^\circ - 570^\circ = 150^\circ$.

Ví dụ 2. Ngũ giác đều $ABCDE$ có các đường chéo AC và BE cắt nhau ở K. Chứng minh rằng $CKED$ là hình thoi.

Lời giải

Góc của ngũ giác đều bằng $\dfrac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.



Tam giác ABC cân tại B có $\widehat{ABC} = 108^\circ$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{C_1} = 36^\circ$.

Do đó $\widehat{A_2} = \widehat{C_2} = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$

Ta có $\widehat{C_2} + \hat{D} = 72^\circ + 108^\circ = 180^\circ$ nên $AC // DE$.

Chứng minh tương tự, $BE // CD$.

Do đó $CKED$ là hình bình hành.

Ta lại có $CD = DE$ nên $CKED$ là hình thoi.

3 Bài tập tự luyện

1. Đa Giác

BÀI 1. Tính số cạnh của một đa giác, biết rằng đa giác đó có:

1) Tổng các góc trong bằng tổng các góc ngoài (tại mỗi đỉnh của đa giác chỉ kể một góc ngoài);

2) Số đường chéo gấp đôi số cạnh;

3) Tổng các góc trong trừ đi một góc của đa giác bằng 2570°.

Lời giải

Gọi số cạnh của đa giác là n.

1. Ta có $(n-2)\cdot 180^\circ = 2\cdot 180^\circ$. Ta tìm được $n = 4$.

2. Ta có $\dfrac{n(n-3)}{2} = 2n$. Ta tìm được $n = 7$.

3. Ta có $(n-2)\cdot 180^\circ - \hat{A} = 2570^\circ$ nên $\hat{A} = (n-2)\cdot 180^\circ - 2570^\circ$.

Do $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ nên $0 < (n-2)\cdot 180 - 2570 < 180 \Leftrightarrow 16\dfrac{5}{18} < n < 17\dfrac{5}{18}$.

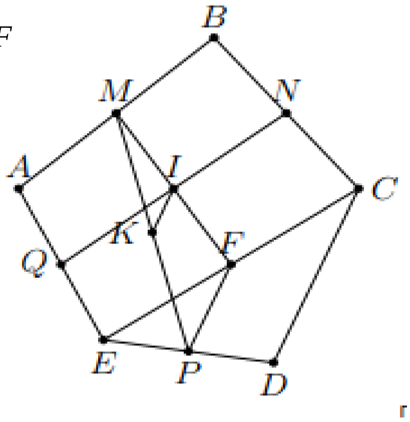
Do n là số tự nhiên nên $n = 17$.

BÀI 2 Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, DE, AE; gọi I là trung điểm của NQ, K là trung điểm của MP. Chứng minh rằng $IK // CD, IK = \dfrac{1}{4}CD$.

Lời giải

Gọi F là trung điểm của CE

Khi đó ta có PF, KI lần lượt là đường trung bình của ΔEDC và ΔMPF



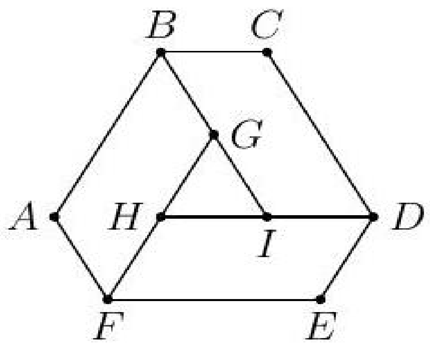
Do đó $IK//PF$ và $PF//CD => IK//CD$

Lại có $IK=\frac{1}{2}PF$ và $PF=\frac{1}{2}CD \Rightarrow IK=\frac{1}{4}CD$

BÀI 3. Chứng minh rằng nếu một lục giác có các góc bằng nhau thì hiệu các cạnh đối diện bằng nhau.

Lời giải

Kẻ các tia phân giác của góc B, D, F, chúng cắt nhau tạo thành ΔGHI như hình vẽ.



Tổng số đo các góc trong hình lục giác là $(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$.

Mà các góc bằng nhau nên số đo mỗi góc là $720^\circ : 6 = 120^\circ$.

Khi đó ta có $\widehat{BCD}+\widehat{CDI}=180^\circ \Rightarrow BC//DI$

$\Rightarrow BCDI$ là hình thang.

Mà $\widehat{CBI}=\widehat{CDI}$ nên $BCDI$ là hình bình hành.

Tương tự ta có $HDEF, ABGF$ là hình bình hành.

$\Rightarrow FE = HD, ID = BC, AB = FG, HF = DE, CD = BI, BG = A$

$\Rightarrow AB - DE = FG - HF = HG, FE - BC = HI, CD - AF = B$

Mà các góc của ΔHGI bằng 60° nên ΔHGI là tam giác đều.

$\Rightarrow HG = GI = HI \Rightarrow AB - DE = FE - BC = CD - AF$

BÀI 4. Lục giác $ABCDEF$ có số đo các góc (tính theo độ) là một số nguyên và $\hat{C}-\hat{D}=\hat{D}-\hat{E}=\hat{E}-\hat{F}$. Giá trị lớn nhất của $\hat{A}$ có thể bằng bao nhiêu?

Lời giải

Tổng các góc trong lục giác bằng $(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$.

Đặt $\hat{A}-\hat{B}=\hat{B}-\hat{C}=\hat{C}-\hat{D}=\hat{D}-\hat{E}=\hat{E}-\hat{F}=\alpha$, ta có

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}+\hat{F}=720^\circ$

$\Rightarrow \hat{A}+(\hat{A}-\alpha)+(\hat{A}-2\alpha)+(\hat{A}-4\alpha)+(\hat{A}-5\alpha)=720^0$

$\Rightarrow 6\hat{A}-15\alpha=720^\circ \Rightarrow 2\hat{A}=5\alpha+240^\circ$

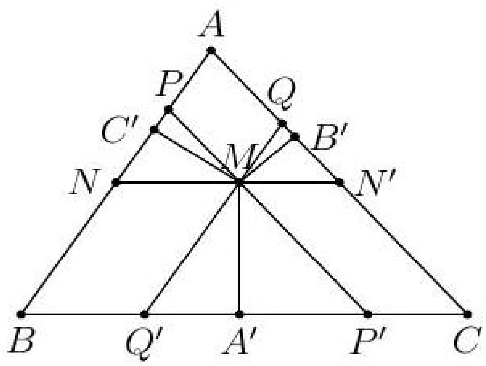
Do $\hat{A}$ là số nguyên và chia hết cho 5 nên $\hat{A}\le 175^\circ$.

Giá trị lớn nhất của $\hat{A}$ là 175° khi $\alpha=22^\circ$.

2. Đa giác đều

BÀI 5. Gọi M là điểm bất kì trong tam giác đều ABC. Các điểm A', B', C' là hình chiếu của M trên các cạnh $BC, AC, AB.$ Tính tỉ số $\dfrac{MA'+MB'+MC'}{AB'+BC'+CA'}$.

Lời giải



Qua M vẽ các đường thẳng song song với với các cạnh của ΔABC, chúng cắt mỗi cạnh thành ba đoạn thẳng $NP, N'Q$, $P'Q'$ như hình vẽ.

Đặt $P'Q'=x, N'Q=y, NP=z$, ta có

$$MA'+MB'+MC' = \frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y\sqrt{3}}{2}+\frac{z\sqrt{3}}{2} = (x+y+z)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AB'+BC'+CA' = \left(z+\frac{y}{2}\right)+\left(x+\frac{z}{2}\right)+\left(y+\frac{x}{2}\right)=\frac{3}{2}(x+y+z)\,(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{MA'+MB'+MC'}{AB'+BC'+CA'}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

BÀI 6. Cho lục giác đều $ABCDEF, M$ và N theo thứ tự là trung điểm của CD, DE. Gọi I là giao điểm của AM, BN.

1) Tính $\widehat{AIB}$

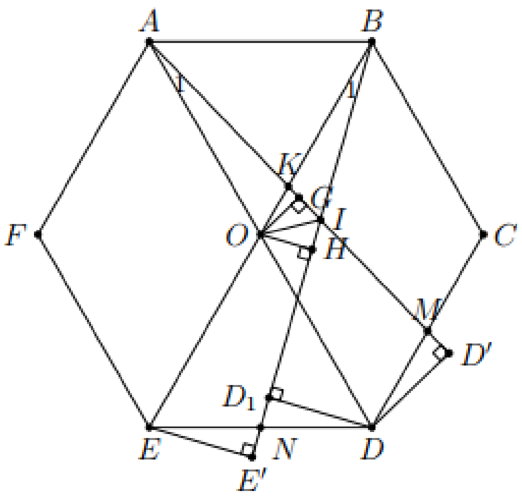
2) Tính $\widehat{OID}$(O là tâm của lục giác đều).

Hướng dẫn: Chứng minh rằng IO, ID là các tia phân giác của hai góc kề bù.

Lời giải

a) $\Delta ADM = \Delta BEN$ (c.g.c) nên $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

Gọi O là giao điểm của AD và BE, K là giao điểm của AM và BE. Ta có $\widehat{BIK} = \widehat{AOK} = 60^\circ$. Vậy $\widehat{AIB} = 60^\circ$



b) Vẽ $OG \perp AM, OH \perp BN$. Ta có $\triangle OGA = \triangle OHB$ (cạnh huyền - góc nhọn) nên $OG = OH$.

$\Rightarrow IO$ là tia phân giác của góc AIN

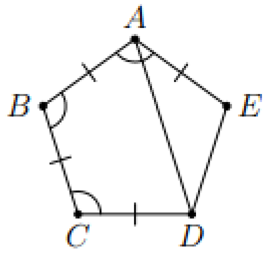
Vẽ $EE' \perp BN, DD' \perp AM, DD_1 \perp BN$

Ta có $EE' = DD'$ (bằng hai lần các đoạn thẳng bằng nhau OH, OG)

Mà $EE' = DD_1$ nên $DD_1 = DD'$

$\Rightarrow ID$ là tia phân giác của góc MIN . Từ $(1),(2)$ suy ra $\widehat{OID} = 90^\circ$

BÀI 7. Chứng minh rằng ngũ giác có năm cạnh bằng nhau và ba góc liên tiếp bằng nhau là ngũ giác đều.



Lời giải

Trước hết, xét tứ giác $ABCD$, ta có $\hat{B} = \hat{C}, AB = CD$

nên $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CDA}$. Do đó $\widehat{BAE} = \widehat{CDE}$

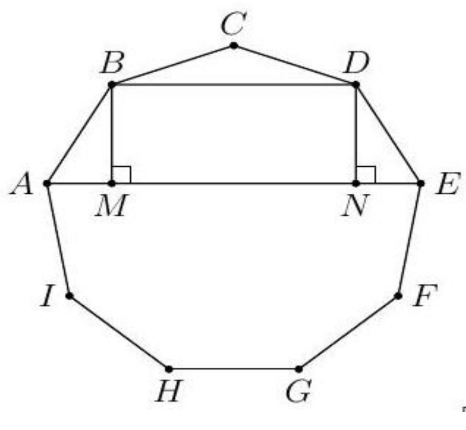
Chứng minh tương tự đối với tứ giác $ABCE$ ta được $\hat{C} = \hat{E}$

Vậy $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E}$ hay $ABCDE$ là ngũ giác đều.

BÀI 8. Chứng minh rằng trong đa giác đều 9 cạnh, hiệu giữa đường chéo lớn nhất và đường chéo nhỏ nhất bằng cạnh của nó.

Lời giải

Gọi $ABCDEFGHI$ là đa giác đều 9 cạnh, AE là



đường chéo lớn nhất, BD là đường chéo nhỏ nhất,

$ABDE$ là hình thang cân.

Vẽ $BM \perp AE, DN \perp AE, \widehat{ABC} = 140^\circ$ nên $\widehat{ABM} = 30^\circ$

Ta có $AM = \dfrac{AB}{2}$ nên $AE - BD = AB$

BÀI 9.

1. Tìm số n sao cho mặt phẳng có thể được phủ kín bởi các đa giác đều bằng nhau có n cạnh.

2 Có tồn tại các ngũ giác bằng nhau (không yêu cầu đều) để phủ kín mặt phẳng không?

3. Đo các góc của đa giác đều n cạnh là số tự nhiên. Có bao nhiêu giá trị của n thỏa mãn bài toán?

Lời giải

1. Theo đề bài ta có $360 : \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \Leftrightarrow n \in \{3;4;6\}$.

2. Có. Chẳng hạn ngũ giác là nửa của lục giác đều.

3. Ta có $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow 180 - \dfrac{360}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow 360 \,\vdots\, n$

Phân tích 360 ra thừa số nguyên tố ta được $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Số 360 có 24 ước tự nhiên. Do $n \geq 3$ nên ta loại các số 1 và 2 .

Vậy có 22 giá trị của n thỏa mãn bài toán.

Bài 2

DIỆN TÍCH CỦA ĐA GIÁC.

1 Tóm tắt lý thuyết

Diện tích hình chữ nhật: $S = a \cdot b$ (a là chiều dài, b là chiều rộng).

Diện tích hình vuông: $S = a^2 (a$ là cạnh).

Diện tích tam giác: $S = \frac{1}{2}ah$ (a là cạnh, h là chiều cao tương ứng).

Diện tích tam giác đều: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} (a$ là cạnh $)$.

Diện tích hình thang: $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h (a$ và b là hai đáy, h là chiều cao).

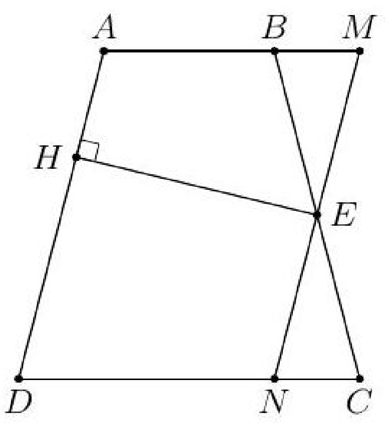
Diện tích hình bình hành: $S = a \cdot h (a$ là canh, h là chiều cao tương ứng).

Diện tích hình thoi, diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 (d_1$ và d_2 là hai đường chéo).

2 Một số ví dụ

📖 **Ví dụ 1.** Tính diện tích hình thang ABCD có cạnh bên AD = a, khoảng cách từ trung điểm E của BC đến AD bằng h.

Lời giải



Qua E, kẻ đường thẳng song song với AD,

cắt AB và CD theo thứ tự tại M và N.

Xét $\triangle ENC$ và $\triangle EMB$ có

$\widehat{MBE} = \widehat{ECN}$ (so le trong)

$EB = EC$ (E là trung điểm của BC)

$\widehat{BEM} = \widehat{NEC}$ (đối đỉnh)

Do đó $\Delta ENC = \Delta EMB$(g.c.g) $\Rightarrow S_{\Delta ENC} = S_{\Delta EMB}$

Cộng S_{ABEND} vào 2 vế ta được $S_{ABCE} = S_{AMND}$

$AMND$ là hình bình hành nên $S_{AMND} = AD \cdot EH = ah$

Vậy $S_{ABCD} = ah$ (đơn vị diện tích).

Ví dụ 2. Tam giác ABC có ba góc nhọn, vẽ các đường cao BD, CE. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên đường thẳng ED. Chứng minh rằng:

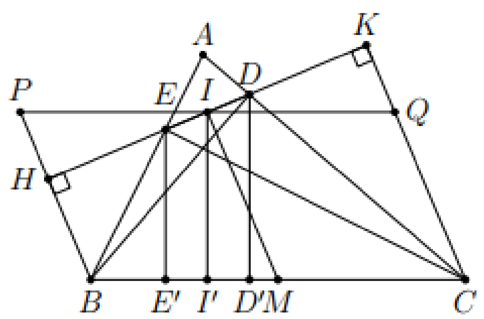
1. $EH = DK$

2. $S_{\Delta BEC} + S_{\Delta BDC} = S_{BHKC}$

Lời giải

a) Gọi M, I theo thứ tự là trung điểm của BC và ED.

ΔMDE có $MD = ME\left(\text{ cùng bằng } \frac{1}{2}BC \right)$



nên là tam giác cân. Do đó $MI \perp ED$.

Hình thang $BHKC$ có $BM = MC, MI // BH // CK$

nên I là trung điểm của HK.

Ta có $IH = IK, IE = ID$ nên $EH = DK$.

b) Vẽ EE', II', DD' vuông góc với BC.

Ta có II' là đường trung bình của hình thang $EE'D'D$

nên $II' = \frac{1}{2}(EE' + DD')$. Do đó

$$S_{\Delta BEC} + S_{\Delta BDC} = \frac{1}{2}BC \cdot EE' + \frac{1}{2}BC \cdot DD' = \frac{1}{2}BC(EE' + DD') = BC \cdot II'$$

Qua I, vẽ đường thẳng song song với BC, cắt BH và CK ở P và Q.

Ta có $BC \cdot II' = S_{BPQC}$ (2).

Ta lại có $\triangle PIH = \triangle QIK$(g.c.g) nên $S_{\triangle PIH} = S_{\triangle QIK}$, do đó $S_{BPQC} = S_{BHKC}$ (3).

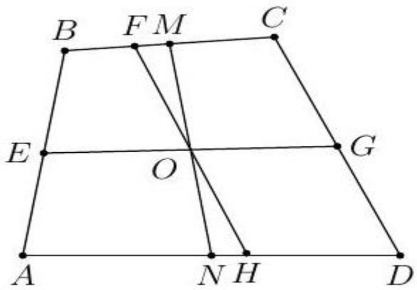
Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $S_{\triangle BEC} + S_{\triangle BDC} = S_{BHKC}$ đỉnh của hình bình hành là trung điểm hai cạnh đối của tứ giác. Chứng minh rằng diện tích hình bình hành bằng nửa diện tích tứ giác.

Ví dụ 3. Cho hình bình hành có bố đỉnh nằm trên bốn cạnh của một tứ giác, trong đó có hai đỉnh của hình bình hành là trung điểm của hai cạnh đối của tứ giác. Chứng minh rằng diện tích hình bình hành bằng nửa diện tích tứ giác.

Lời giải

Xét tứ giác $ABCD$ và hình bình hành $EFGH$ có E,G là trung điểm của AB,CD. Gọi O là tâm của hình bình hành $EFGH, M$ và N là trung điểm của BC và AD. Do $EMGH$ cũng là hình bình hành nên O cũng là trung điểm của MN. Xét hai trường hợp:

a) Nếu F không trùng M thì $FMHN$ là hình bình hành.



Khi đó $FM // NH$ nên $BC // AD$.

Suy ra $ABCD$ là hình thang.

Dễ thấy $S_{EFGH} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

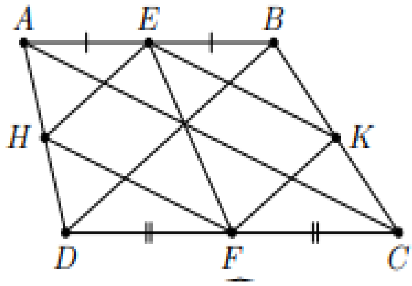
b) Nếu F trùng M thì H trùng N. Khi đó $S_{EFGH} = S_{EMGN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Ví dụ 4. Tính diện tích hình thang có hai đường chéo dài 6 m và 10 m, đoạn thẳng nối trung điểm hai đáy bằng 4 m

Lời giải

Gọi $ABCD$ là hình thang có $AB // CD, BD = 6$ m, $AC = 10$ m.

Gọi E, F, K theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, BC.



Khi đó

$+EK$ là đường trung bình của ΔABC nên $EK = \frac{AC}{2} = 5$ m

$+FK$ là đường trung bình của ΔBDC nên $FK = \frac{BD}{2} = 3$ m

Ta có $EF^2 + FK^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = EK^2$

nên theo định lí Pytago đảo suy ra $\widehat{EFK} = 90^\circ$.

Gọi H là trung điểm của AD.

Dễ dàng chứng minh được $EHFK$ là hình bình hành

nên $S_{EHFK} = 2 \cdot S_{\triangle EFK} = EF \cdot FK = 12 \text{ m}^2$.

Dễ dàng chứng minh được $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{EHFK}$.

Vậy $S_{ABCD} = 24 \text{ m}^2$.

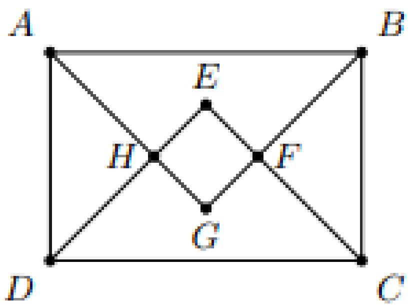
* Các đoan thẳng EF, AC, BD đồng quy vì trong hình thang trung điểm của hai đáy và giao điểm của hai đường chéo là ba đim thẳng hàng, xem Bổ đề hình thang ở Nâng cao và phát triển Toán 8 tập hai.

3 Bài tập tự luyện

1. Diện tích hình chữ nhật, hình vuông, hình tam giác

BÀI 1. Cho một hình chữ nhật có các kích thước là a và $b(a$ và b có cùng đơn vị đo). Các tia phân giác các góc của hình chữ nhật cắt nhau tạo thành một tứ giác. Xác định dạng tứ giác đó và tính diện tích của nó.

Lời giải



Xét ΔABG ta có $\widehat{GAB} = \widehat{GBA} = 45^\circ$. Suy ra $\widehat{AGB} = 90^\circ$

Tương tự ta chứng minh được $EFGH$ là hình chữ nhật.

Mặt khác ta có $\triangle AGB$ cân tại G suy ra $AG = BG$.

Ta cũng có $\Delta AHD = \Delta BFC$ (g.c.g).

$\Rightarrow AH = BF$

Vậy ta thu được $HG = GF$. Khi đó $EFGH$ là hình vuông.

Do ΔAGB vuông cân tại G suy ra $AG = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$.

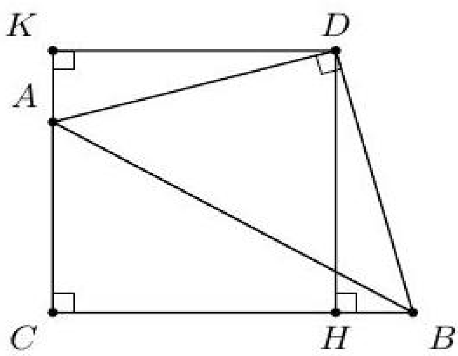
Tương tự ΔAHD vuông cân tại H suy ra $AH = \dfrac{AD}{\sqrt{2}}$.

Ta tính được $HG = \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}$. Vậy $S_{EFGH} = \dfrac{(a-b)^2}{2}$

🗁 BÀI 2. Tam giác ABC vuông tại C có $BC = a, AC = b$, Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác DAB vuông cân tại D. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của D trên CB, CA, Tính diện tích của tứ giác $DHCK$.

✍ Lời giải

Ta chứng minh được $\Delta AKD = \Delta BHD$ (cạnh huyền - góc nhọn).



Suy ra $KD = KH$. Dễ thấy $DHCK$ là hình chữ nhật.

Vậy $DHCK$ là hình vuông.

Ta có $= AC + CB$

$CK + CH = CA + AK + CB - BH$

$= a + b\left(\text{ vì } AK = CH\right)$.

Suy ra $CK = \dfrac{a+b}{2}$

Vậy diện tích hình vuông là $\dfrac{(a+b)^2}{4}$.

🗁 BÀI 3. Tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$, diện tích S. Chứng minh rằng $4S = \left(a+b+c\right)\left(b+c-a\right)$

✍ Lời giải

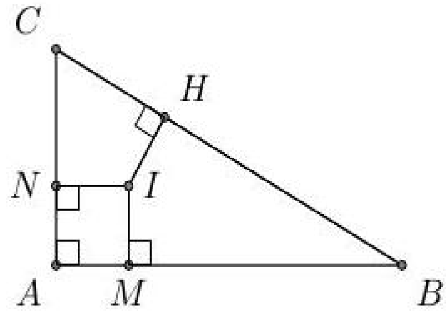
Ta có

$$\left(a+b+c\right)\left(b+c-a\right) = \left(b+c+a\right)\left(b+c-a\right) = (b+c)^2 - a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = 2bc \ (\text{vì } b^2 + c^2 = a^2)$$

Mà $S = \dfrac{1}{2}bc$. Vậy $(a+\text{b}+c)\left(b+c-a\right) = 4bc$

🗁 BÀI 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, các đường phân giác của các góc B và C cắt nhau ở I. Biết hình chiếu của IB, IC trên BC có độ dài lần lượt là m, n. Tính diện tích của tam giác ABC.

✍ Lời giải



Ta có I là giao điểm của ba đường phân giác nên cách dều ba cạnh. Gọi H, M, N theo thứ tự là hình chiếu của I trên BC, AB, AC.

Ta có I là giao điểm của ba đường phân giác nên cách dều ba cạnh. Gọi H, M, N theo thứ tự là hình chiếu của I trên BC, AB, AC.

Đặt $IH = IM = IN = x$. Khi đó

$AM = AN = x, BM = BH = m, CN = CH = n$

Theo định lý Pytago, ta có

$$(x+m)^2 + (x+n)^2 = (m+n)^2 \Rightarrow x^2 + xm + xn = mn$$

Mặt khác

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2}(x+m)(x+n) = \frac{1}{2}\left(x^2 + xm + xn + mn\right) = mn$$

🗁 BÀI 5. Cho tam giác $ABC.M$ là trung điểm của BC. Gọi O là một điểm bất kì. Tìm liên hệ giữa diện tích các tam giác OAM, OAB, OAC.

✍ Lời giải

Vẽ MM', BB', CC' vuông góc với OA. Ta xét hai trường hợp:

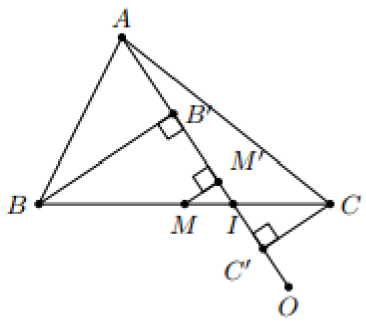
Trường hợp 1: B, C nằm khác phía so với OA.

1. Nếu $BB' \geq CC'$. Gọi I là giao điểm của AO và BC. Khi đó

$$MM' // BB' \Rightarrow \frac{BB'}{MM'} = \frac{IB}{IM}$$

Tương tự $MM' // CC' \Rightarrow \frac{CC'}{MM'} = \frac{IC}{IM}$

$$\Rightarrow \frac{BB'}{MM'} - \frac{CC'}{MM'} = \frac{IB - IC}{IM}$$



$=\dfrac{IM+MB-MC+IM}{IM}$

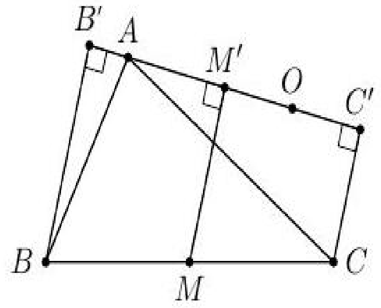
$=\dfrac{2.IM}{IM}=2$

Như vậy $\dfrac{BB'-CC'}{MM'}=2$ hay $BB'-CC'=2\cdot MM'$

Suy ra $\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot BB'-\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot CC'=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot MM'$

Do đó $S_{OAB}-S_{OAC}=2\cdot S_{OAM}$

2. Nếu $BB'<CC'$. Tương tự ta được $S_{OAC}-S_{OAB}=2\cdot S_{OAM}$.



Trường hợp $2: B,C$ nằm cùng phía so với OA.

Dễ chứng minh MM' là đường trung bình hình thang $BB'C'C$.

Suy ra $BB'+CC'=2\cdot MM'$

Vậ $\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot BB'+\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot CC'=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot MM'$.

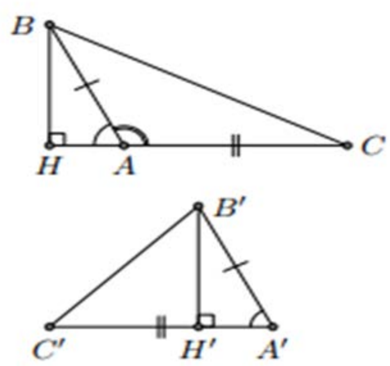
Do $S_{OAB}+S_{OAC}=2\cdot S_{OAM}$

🗁 BÀI 6. Cho O là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi D,E,F theo thứ tự là các hình chiếu của O trên BC,AC,AB. Trên các tia OD,OE,OF lấy lần lượt các điểm A',B',C' sao cho $OA'=BC, OB'=AC, OC'=AB$

1) Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O trong tam giác.

2) Điểm O có vị trí gì đối với tam giác $A'B'C'$?

Lời giải



Ta chứng minh bài toán phụ: Nếu hai tam giác có cặp cạnh bằng nhau và cặp góc xen giữa bù nhau thì diện tích của chúng bằng nhau.

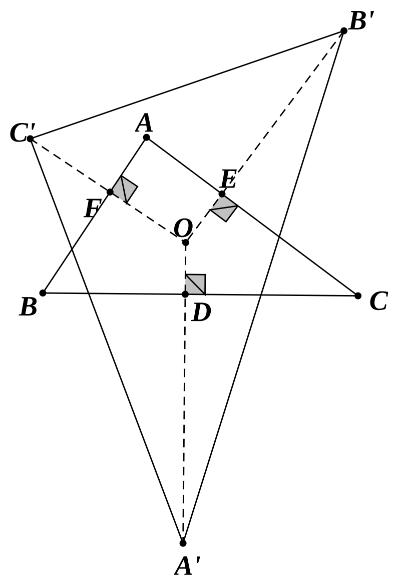
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có $AB=A'B', AC=A'C'$

$\widehat{BAC}+\widehat{B'A'C'}=180^\circ$

Kẻ đường cao BH và $B'H'$ của hai tam giác, khi đó

$\Delta BAH = \Delta B'A'H'$ (ch-gn), suy ra $BH = B'H'$

Từ đó $\frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot B'H' \cdot A'C'$ hay $S_{ABC} = S_{A'B'C'}$



Áp dụng. Từ giả thiết ta có $\triangle A'OB'$ và $\triangle ABC$ có:

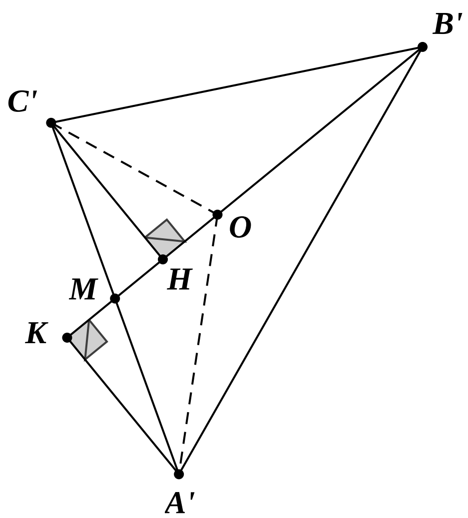
$OA' = BC, OB' = AC$ và $\widehat{A'OB'} + \hat{C} = 180^\circ$ nên $S_{A'OB'} = S_{ABC}$

Tương tự ta được $S_{A'OC'} = S_{ABC}, S_{B'OC'} = S_{ABC}$

Điểm O nằm trong $\triangle ABC$ nên cũng nằm trong $\triangle A'B'C'$.

Do đó $S_{A'B'C'} = S_{A'OB'} + S_{A'OC'} + S_{B'OC'} = 3 \cdot S_{ABC}$

Vậy diện tích tam giác $A'B'C'$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O trong tam giác.



2. Vẽ đường cao $C'H$ và $A'K$ của tam giác $B'OC'$ và tam giác $A'OB'$. Gọi M là giao điểm của $B'O$ và $A'C'$.

Do $S_{B'OC'} = S = A'OB'$ và hai tam giác này chung đáy $B'O$

nên $C'H = A'K$, suy ra $\triangle MHC' = \triangle MKA'$ (g.c.g) nên $MC' = MA'$

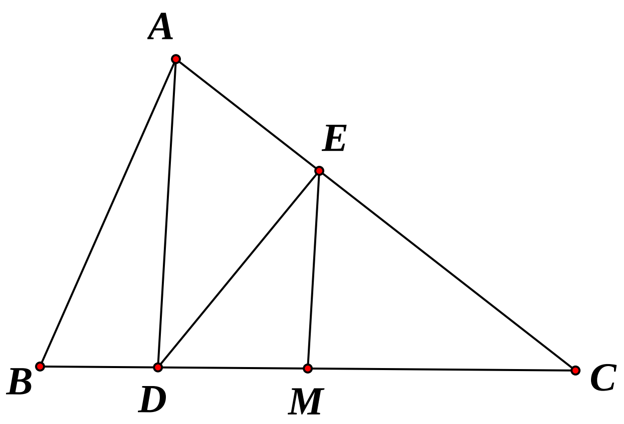
hay M là trung điểm của $A'C'$.

Do đó $B'O$ là trung tuyến của $\triangle A'B'C'$, chứng minh tương tự ta cũng được $A'O, C'O$ là trung tuyến.

Vậy O là trọng tâm của $\triangle A'B'C'$.

Bài 7. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi D là điểm nằm giữa B và M. Qua M kẻ đường thẳng song song với DA, cắt AC ở E. So sánh diện tích $\triangle DEC$ và diện tích $\triangle ABC$

Lời giải



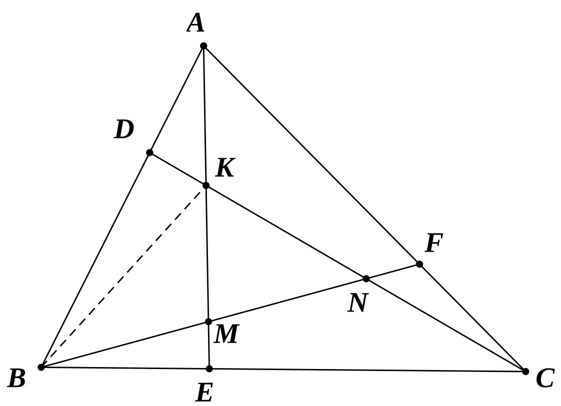
Ta có

$$S_{DEC} = S_{DEM} + S_{EMC} = S_{AEM} + S_{EMC} = S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

Bài 8. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $AD = \frac{1}{3}AB, BE = \frac{1}{3}BC, CF = \frac{1}{3}CA$. Các đoạn thẳng AE, BF, CD cắt nhau tạo thành một tam giác. Chứng minh rằng diện tích tam giác này bằng $\frac{1}{7}$ diện tích tam giác ABC.

Lời giải

Gọi tam giác tạo thành là MNK như hình vẽ.



Đặt $S_{AKD} = a$ thì $S_{AKB} = 3a, S_{AKC} = 2S_{AKB} = 6a$

(Vì $S_{AEC} = 2S_{AEB}, S_{KEC} = 2S_{KEB}$)

Suy ra $S_{ACD} = 7a, S_{ABC} = 21a$

Từ (1) và (2) suy ra

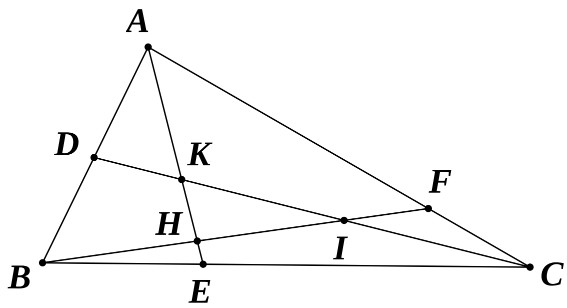
$$S_{AKC} = \frac{6}{21} S_{ABC} = \frac{2}{7} S_{ABC}$$

Tương tự

$S_{BMA}=S_{CNB}=\frac{2}{7}S_{ABC}$

Do đó $S_{AKC}+S_{BMA}+S_{CNB}=\frac{6}{7}S_{ABC}\Rightarrow S_{MNK}=\frac{1}{7}S_{ABC}$

Bài 9. Cho tam giác ABC có diện tích S. Các điểm D,E,F theo thứ tự nằm trên các cạnh AB,BC,CA sao cho $AD=DB, BE=\frac{1}{2}EC, CF=\frac{1}{3}FA$. Các đoạn thẳng AE,BF,CD cắt nhau tạo thành một tam giác. Tính diện tích tam giác đó.



Lời giải

Gọi I,K,H lần lượt là giao điểm của BF và CD; AE và CD; AE và BF

Ta có:

$\frac{S_{ADK}}{S_{ABK}}=\frac{1}{2}$ (hai tam giác có chung đường cao kẻ từ K, $AD=\frac{1}{2}$ AB)

$\frac{S_{ABK}}{S_{ACK}}=\frac{1}{2}$ (hai tam giác có chung đáy AK, đường cao kẻ từ C gấp đôi đường cao kẻ từ B)

Suy ra $\frac{S_{ADK}}{S_{AKC}}=\frac{S_{ADK}}{S_{ABK}}\cdot\frac{S_{ABK}}{S_{ACK}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow S_{AKC}=\frac{4}{5}S_{ADC}=\frac{2}{5}S_{ABC}$

Tương tự:

$\frac{S_{BHE}}{S_{BHA}}=\frac{S_{BHE}}{S_{BHC}}\cdot\frac{S_{BHC}}{S_{BHA}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\Rightarrow S_{BHA}=\frac{9}{10}S_{ABE}=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{3}{10}S_{ABC}$

$\frac{S_{CIF}}{S_{CIB}}=\frac{S_{CIF}}{S_{CIA}}\cdot\frac{S_{CIA}}{S_{CIB}}=\frac{1}{5}\Rightarrow S_{BIC}=\frac{4}{5}S_{CBF}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{1}{5}S_{ABC}$

Khi đó:

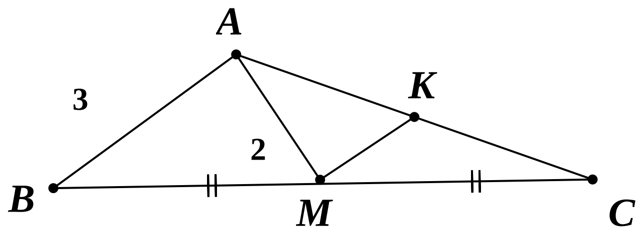
$S_{IHK}=S_{ABC}-S_{AKC}-S_{BHA}-S_{CIB}=\frac{1}{10}S_{ABC}$

Bài 10. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB=3\text{cm}, AC=5\text{cm}$, đường trung tuyến $AM=2$ cm.

Lời giải

Gọi K là trung điểm của AC

Tam giác ABC có $\begin{cases} M \text{ la trung diem cua } BC \\ K \text{ la trung diem cua } AC \end{cases}$.



$\Rightarrow MK$ là đường trung bình của $\triangle ABC$.

$\Rightarrow MK = \frac{1}{2}AB = 1,5\,\text{cm}$

Tam giác AMK có $\begin{cases} AM^2 + MK^2 = 2^2 + 1,5^2 = 6,25 \\ AK^2 = 2,5^2 = 6,25 \end{cases}$

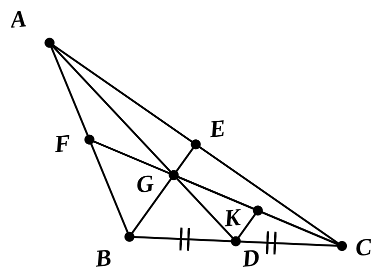
$\Rightarrow \triangle AMK$ vuông tại M

Khi đó $S_{ABC} = 2S_{AMC} = 4S_{AMK} = 6\,\text{cm}^2$

Bài 11. Tính diện tích tam giác, biết độ dài ba đường trung tuyến của nó bằng $15\,\text{cm}, 36\,\text{cm}, 39$ cm

Lời giải

Giả sử $\triangle ABC$ có trọng tâm G và độ dài AD, BE, CF lần lượt là $36\,\text{cm}, 15\,\text{cm}, 39\,\text{cm}$



Lấy K là trung điểm GC thì

$GK = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{3}CF = 13\,\text{cm}.$

$GD = \frac{1}{3}AD = 12\,\text{cm}$

$DK = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{3}BE = 5\,\text{cm}$

$\triangle DKG$ có $\begin{cases} DG^2 + DK^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \\ GK^2 = 13^2 = 169 \end{cases}$

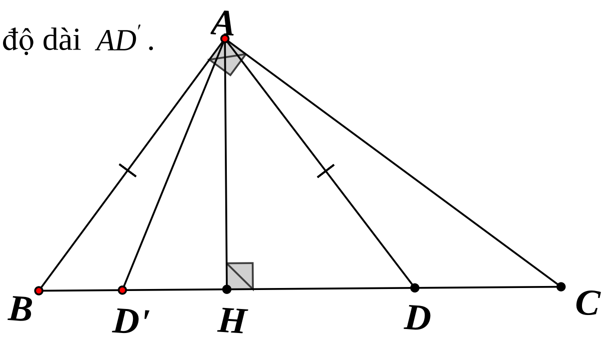
$\Rightarrow \triangle DKG$ vuông tại D.

$\Rightarrow S_{ABC} = 3S_{BGC} = 3\cdot 2\cdot S_{DGC} = 3\cdot 2\cdot 2\cdot S_{DGK} = 360\,\text{cm}^2$

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AC = 20\,\text{cm}, AB = 15\,\text{cm}$.

1. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $AD = AB$. Tính độ dài BD

2. Lấy điểm D' trên cạnh BC sao cho $BD' = 4\,\text{cm}$. Tính độ dài AD'.



Lời giải

Vẽ đường cao AH

Ta có $AH\cdot BC = AB\cdot AC\left(= 2S_{ABC}\right)$

$\Rightarrow AH = 12\,\text{cm}$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác ABH ta có

$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 9\,\text{cm}$

1. Tam giác ABD cân tại A có đường cao AH nên H là trung điểm AD

Nghĩa là: $BD = 2BH = 18\,\text{cm}$.

2. Ta có $D'H = BH - BD' = 5\,\text{cm}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác AHD' ta được $AD' = \sqrt{AH^2 + D'H^2} = 13\,\text{cm}$.

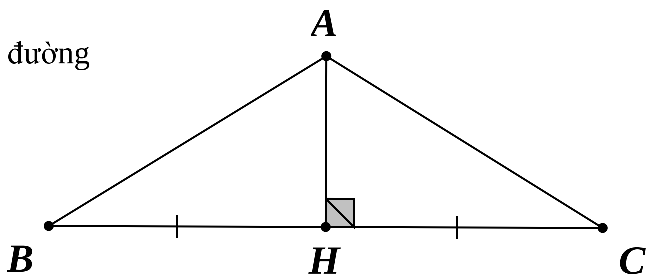
Bài 13. Có tam giác nào mà độ dài các đường cao đều nhỏ hơn $1\,\text{cm}$ nhưng diện tích bằng $2000\,\text{cm}^2$ không?

Lời giải

Xét tam giác ABC cân tại A có đáy $BC = 8000$ cm, đường

cao $AH = \dfrac{1}{2}\,\text{cm}$

Khi đó diện tích tam giác bằng



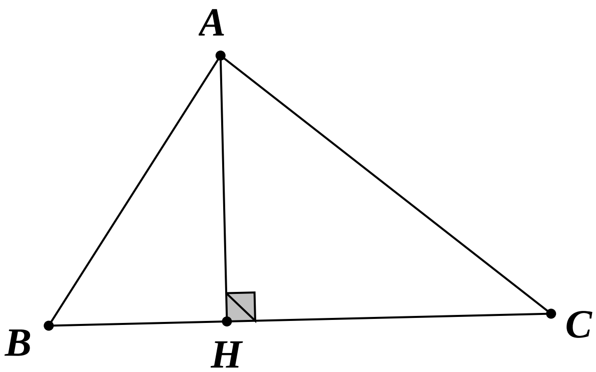
$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8000=2000\,\text{cm}^2$

Hơn nữa, $AB=AC>HC=4000\,\text{cm}$ nên $h_b=h_c=\frac{2S}{AB}<\frac{2S}{4000}=1\,\text{cm}$.

Vậy tồn tại tam giác thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 14. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh bằng a,b,c, diện tích tam giác bằng S. Chứng minh rằng $6S\le a^2+b^2+c^2$

Lời giải



Vẽ đường cao AH cho tam giác ABC. Ta có

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AH\cdot BC\le\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC$(vì $AH\le AB$)

$\Rightarrow 2S\le AB\cdot BC=ac.$

Tương tự, ta có thể chứng minh $2S\le bc, 2S\le ab$.

Khi đó $6S\le ab+ac+bc$.

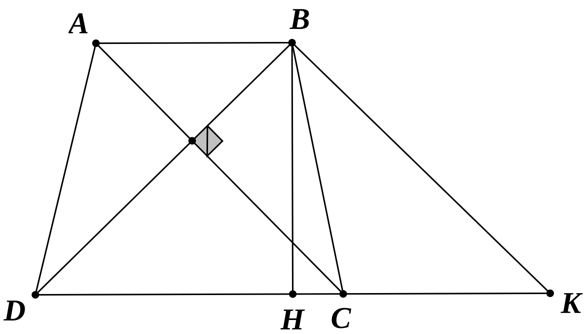
Mà $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$

Nên $6S\le a^2+b^2+c^2$

2. Diện tích hình thang, hình bình hành, hình thoi

Bài 15. Tính diện tích hình thang cân có đường cao bằng h, biết rằng hai đường chéo của hình thang vuông góc với nhau. $AM=m$

Lời giải



Xét hình thang cân $ABCD$ có $AB\,||\,CD, AC\perp BD$.

Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt DC ở K.

Từ đó, ta được $ABKC$ là hình bình hành.

Do đó $AB=CK, BK=AC$

Do $ABCD$ là hình thang cân và $AC\perp BD$ nên $AC=BD$

và $BK\perp BD$

Mà $AC = BK$ nên $BD = BK$

Từ đó, ta được tam giác BDK là tam giác vuông cân.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông BDK ,ta được

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BK^2} + \frac{1}{BD^2} \Rightarrow BD = BK = BH\sqrt{2} = h\sqrt{2}$$

Khi đó

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)BH = \frac{1}{2}DC \cdot BH = S_{BDK} = h^2$$

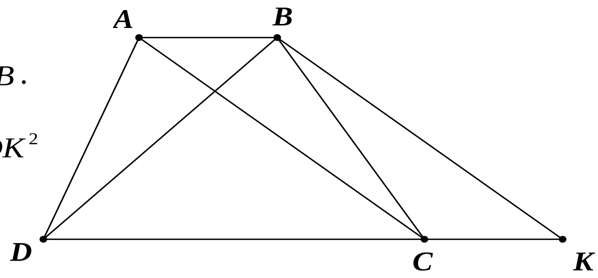
Bài 16. Tính diện tích của hình thang có hai đường chéo dài $9\,\text{cm}$ và $12\,\text{cm}$, tổng hai đáy bằng 15 cm

Lời giải

Xét hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD, BD = 9\,\text{cm}, AC = 12\,\text{cm},$

$AB + CD = 15\,\text{cm}$

Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt DC ở K



Khi đó, $ABKC$ là hình bình hành nên $BK = AC, CK = AB$.

Trong tam giác BDK có $BD^2 + BK^2 = 9^2 + 12^2 = 15^2 = DK^2$

nên tam giác BDK vuông tại B. Khi đó

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h = \frac{1}{2}DK \cdot h = S_{BDK} = 54\,\text{cm}^2$$

Bài 17. Qua giao điểm O của các đường chéo của một hình thang, vẽ đường thẳng song song với hai đáy, cắt các cạnh bên ở E và G. Chứng minh rằng $OE = OG$.Dựng tam giác, biết độ dài ba đường trung tuyến.

Lời giải

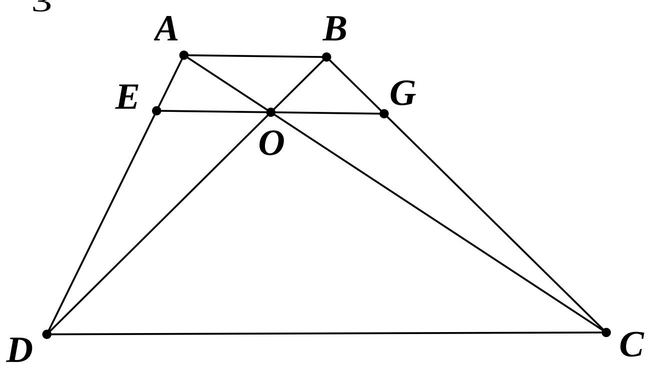
Do có cùng cạnh đáy AB và chiều cao nên $S_{DAB} = S_{CAB}$.

Suy ra $S_{DOA} = S_{COB}$.

Do đó $\frac{1}{2}OE \cdot h = \frac{1}{2}OG \cdot h$

Suy ra $OE = OG$.

Gọi K là trung điểm của CG. ΔGDK có các cạnh bên bằng $\frac{1}{3}$ độ dài các đường trung tuyến của ΔABC. Dựng ΔGDK, rồi dựng F, C. Sau đó dựng B, A



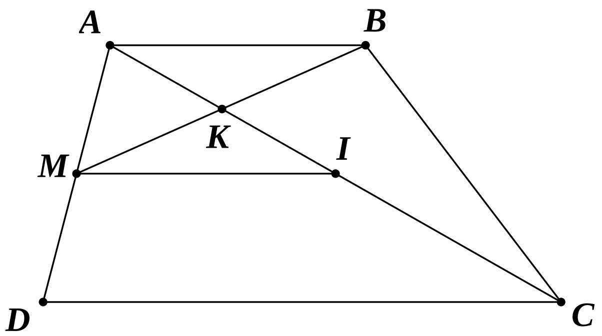
Điều kiện để có nghiệm hình là $|m-n| < p < m+n$

với m, n, p là độ dài ba đường trung tuyến đã cho.

Bài 18. Hình thang $ABCD$ có diện tích S, đáy DC gấp đôi đáy AB .Gọi M là trung điểm AD, K là giao điểm của BM và AC. Tính diện tích tam giác ABK.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AC. Ta có:



$MI = \frac{1}{2}DC = AB$.

$S_{ABK} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{AMI} = \frac{1}{8}S_{ADC}$.

Mà $S_{ADC} = 2.S_{ABC}$ nên $S_{ADC} = \frac{2}{3}S$

Suy ra $S_{ABK} = \frac{1}{12}S$.

Bài 19. Điểm O là giao điểm của các đường chéo của hình thang $ABCD(AB \parallel CD)$. Biết diện tích các tam giác AOB, COD theo thứ tự là a^2, b^2. Tính diện tích hình thang $(a, b > 0)$.

Lời giải

Goi $S_{AOD} = S_{BOC} = m$

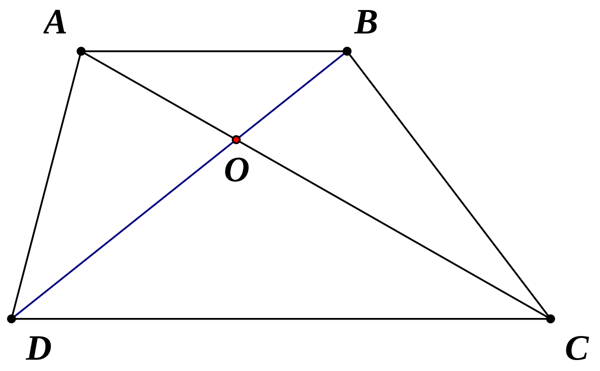
Khi đó

$OA:OC = S_{AOB}:S_{COB} = a^2:m$

$OA:OC = S_{AOD}:S_{COD} = m:b^2$

Từ đó suy ra $\frac{a^2}{m} = \frac{m}{b^2}$ hay $m = ab$.

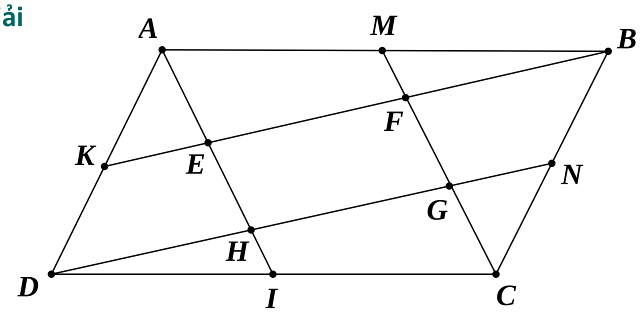
Vậy $S_{ABCD} = a^2 + b^2 + 2m = (a+b)^2$



Bài 20. Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích S. Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của KB với AI và MC. Gọi H, G lần lượt là giao điểm của DN với AI và MC.

1. Chứng minh rằng $EFGH$ là hình bình hành.
2. Tính diện tích hình bình hành $EFGH$ theo S.

Lời giải



1. Do $AM \parallel IC$ và $AM = IC$

nên $AMIC$ là hình bình hành. Do đó $AI \parallel MC$.

Tương tự ta có $BK \parallel DN$.

Vậy $EFGH$ là hình bình hành.

2. Đặt $HI = a$, áp dụng định lí talet với tam giác DGC ta được $GC = 2a$, với tam giác CFB ta được $FG = 2a$.

Do $EFGH$ là hình bình hành nên suy ra $EH = FG = 2a$.

Áp dụng định lí talet với tam giác ADH ta được $AE = 2a$. Từ đó suy ra $EH = \frac{2}{5}AI$.

Do $EH = \frac{2}{5}AI$ nên $FG = \frac{2}{5}MC$

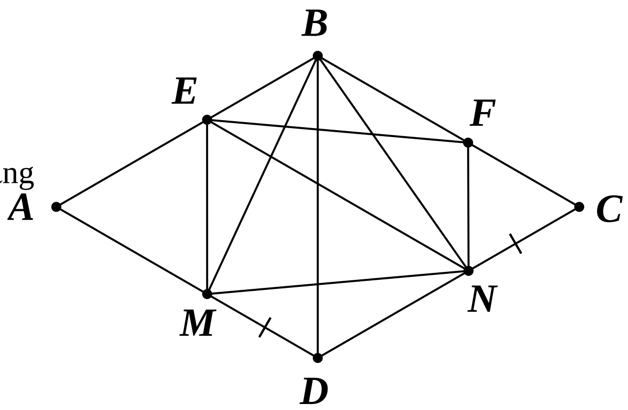
Suy ra $S_{EFGH} = \frac{2}{5}S_{AIMC}$ mà $S_{AIMC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ nên $S_{EFGH} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$.

Bài 21. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a. Lấy điểm M trên cạnh AD điểm N trên cạnh CD sao cho $DM = CN$. Tính diện tích hình thoi $ABCD$, biết rằng tam giác BMN đều.

Lời giải

Kẻ $ME \parallel NF \parallel BD$

Do $\triangle BEF = \triangle DMN (c-g-c)$ nên $EF = MN$



Do tam giác BMN đều và $EF = MN$ nên $BN = EF$.

Mà $EN \parallel BC$ nên $BFNE$ là hình thang có hai đường chéo bằng nhau.

Từ đó suy ra $BE = FN$.

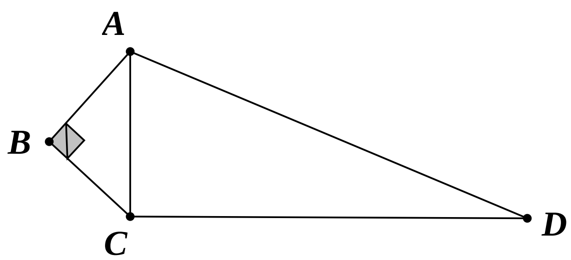
Khi đó, $FN = BE = MD = CN$ mà tam giác CFN cân tại C nên tam giác CFN đều.

Do đó, tam giác CBD đều.

Vậy $S_{ABCD} = 2S_{CBD} = 2\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Bài 22. Tứ giác $ABCD$ có $\hat{B} = 90^\circ, AB = 4\,\text{cm}, BC = 3\,\text{cm}, CD = 12\,\text{cm}, AD = 13\,\text{cm}$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Lời giải



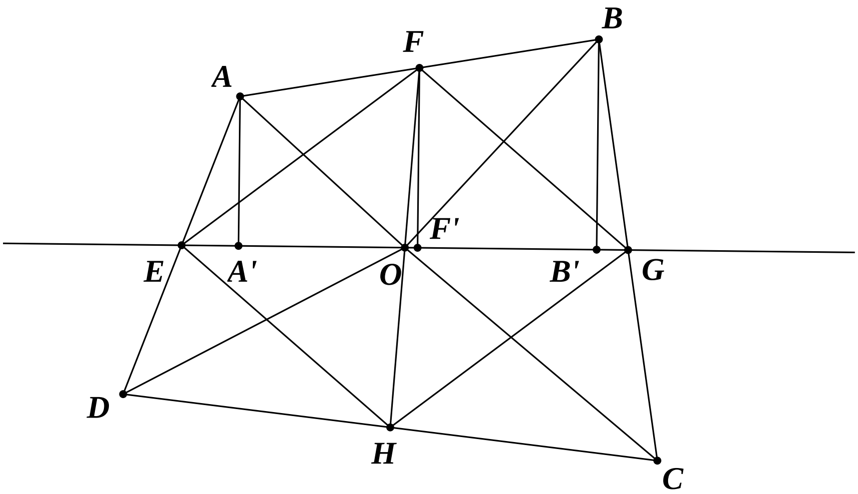
Áp dụng định lí Pitago ta chứng minh được tam giác ACD vuông tại C.

Khi đó, $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 36\,\text{cm}^2$

Bài 23. Tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm của hai đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối. Chứng minh rằng

$S_{AOD}+S_{BOC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

Lời giải



Gọi E,F,G,H lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,AB,BC,CD. Ta dễ dàng chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình bình hành. Do O là giao điểm của EG và FH nên O là trung điểm của hai đoạn thẳng EG và FH

Đầu tiên ta chứng minh $S_{AOD}+S_{BOC}=S_{EFGH}$

Lần lượt vẽ AA',BB',FF' vuông góc với EG

$$S_{OAE}+S_{OBG}=\frac{1}{2}\cdot OE\cdot AA'+\frac{1}{2}\cdot OG\cdot BB'=\frac{EG}{2}\cdot\frac{AA'+BB'}{2}=\frac{EG}{2}\cdot FF'=S_{EFG}$$

Tương tự, ta chứng minh được $S_{ODE}+S_{OCG}=S_{EHG}$

Từ hai ý trên, ta suy ra $S_{AOD}+S_{BOC}=S_{EFGH}$

Tiếp theo, ta chứng minh $S_{EFGH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

Ta có $S_{AEF}=\frac{1}{2}S_{ADF}$ (hai tam giác có chung đường cao kẻ từ F, $AE=\frac{1}{2}AD$)

và $S_{ADF}=\frac{1}{2}S_{ABD}$ (hai tam giác có chung đường cao kẻ từ D, $AF=\frac{1}{2}AB$)

nên $S_{AEF}=\frac{1}{4}S_{ABD}$

Tương tự $S_{BFG} = \frac{1}{4}S_{ABC}, S_{CHG} = \frac{1}{4}S_{BCD}, S_{DEH} = \frac{1}{4}S_{ACD}$

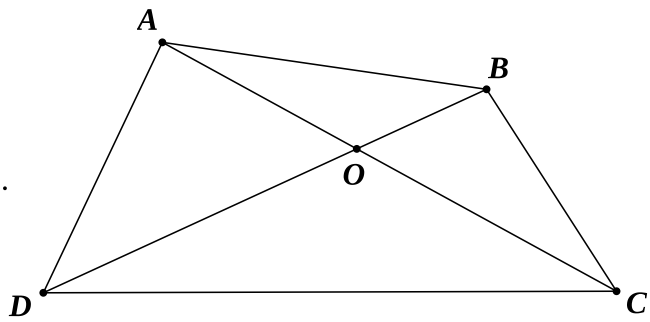
Suy ra $S_{AEF} + S_{BFG} + S_{CHG} + S_{DEH} = \frac{1}{4}\cdot 2S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Nên $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Vậy $S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Bài 20. Các đường chéo của một tứ giác chia tứ giác đó thành bốn tam giác trong đó ba tam giác có diện tích $30\,\text{cm}^2, 60\,\text{cm}^2, 90\,\text{cm}^2$. Tính diện tích tứ giác đó.

Lời giải

Xét tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo.



Trường hợp 1: Giả sử $S_{AOB} = 30, S_{AOD} = 60, S_{COD} = 90$.

Khi đó kẻ $AH \perp BD, CK \perp BD$, ta có

$\frac{1}{2}AH\cdot OB = 30$ và $\frac{1}{2}AH\cdot OD = 60$

Chia vế theo vế hai đẳng thức trên, ta có $OD = 2OB$.

Ta lại có $S_{COD} = \frac{1}{2}CK\cdot OD = 90 \Rightarrow \frac{1}{2}CK\cdot OB = 45$ hay $S_{COB} = 45$

Vậy diện tích tứ giác là $S = 30 + 60 + 90 + 45 = 225\,\text{cm}^2$.

Trường hợp 2: Giả sử $S_{AOB} = 30, S_{COD} = 60, S_{AOD} = 90$.

Khi đó kẻ $AH \perp BD, CK \perp BD$, ta có

$\frac{1}{2}AH\cdot OD = 90$ và $\frac{1}{2}AH\cdot OB = 30$

Chia vế theo vế hai đẳng thức trên, ta có $OD = 3OB$.

Ta lại có $S_{COD} = \frac{1}{2}CK\cdot OD = 60 \Rightarrow \frac{1}{2}CK\cdot OB = 20$ hay $S_{COB} = 20$

Vậy diện tích tứ giác là $S = 30 + 60 + 90 + 20 = 200\,\text{cm}^2$.

Trường hợp 3: Giả sử $S_{AOB}=60, S_{COD}=90, S_{AOD}=30$.

Khi đó kẻ $AH\perp BD, CK\perp BD$, ta có

$\frac{1}{2}AH\cdot OD=30$ và $\frac{1}{2}AH\cdot OB=60$

Chia vế theo vế hai đẳng thức trên, ta có $OD=\frac{1}{2}OB$.

Ta lại có $S_{COD}=\frac{1}{2}CK\cdot OD=90\Rightarrow\frac{1}{2}CK\cdot OB=180$ hay $S_{COB}=180$.

Vậy diện tích tứ giác là $S=30+60+90+180=360\,\text{cm}^2$.

Bài 25. . Chứng minh rằng

1. $S\le\frac{a^2+b^2}{4}$ với S là diện tích của tam giác có độ dài hai cạnh bằng a,b
2. $S\le\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$ với S là diện tích của tứ giác có độ dài bốn cạnh bằng a,b,c,d

Lời giải

1) Gọi h là chiều cao ứng với cạnh a, khi đó $S=\frac{1}{2}ah$.

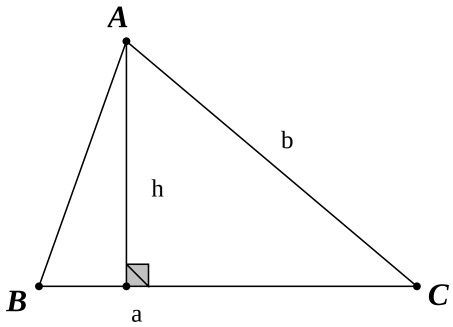
Suy ra

$4S=2ah\le 2ab\le a^2+b^2$

Vậy $S\le\frac{a^2+b^2}{4}$

Dấu "$=$" xảy ra khi $h=a=b$

hay tam giác đã cho là tam giác cân.



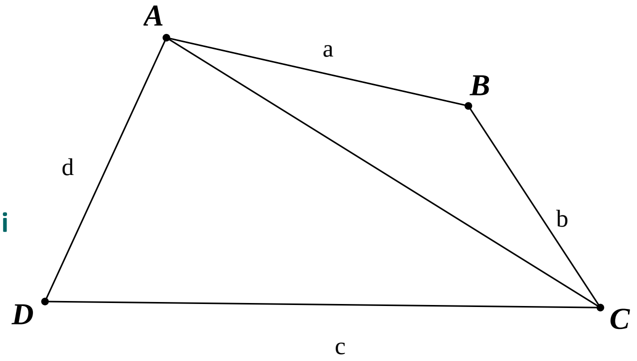
2) Theo câu trên, ta có

$S_{ABC}\le\frac{a^2+b^2}{4}$

$S_{ACD}\le\frac{c^2+d^2}{4}$

Suy ra $S=S_{ABC}+S_{ACD}\le\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$

Bài 26. Gọi a,b,c,d là độ dài bốn cạnh liên tiếp của một tứ giác có diện tích S. Chứng minh các bất đẳng thức sau và chỉ rõ khi nào xảy ra đẳng thức



1) $4S \le (a+c)(b+d)$

2) $16S \le (a+b+c+d)^2$

Lời giải

1) Ta có $S_{ABC} \le \dfrac{ab}{2}, S_{ACD} \le \dfrac{cd}{2}$

Suy ra $S = S_{ABC} + S_{ACD} \le \dfrac{ab+cd}{2}$

$\Rightarrow 2S \le ab+cd$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$)

Tương tự, ta cũng có $2S \le ad+bc$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$)

Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức trên, ta có

$4S \le ab+cd+ad+bc \Leftrightarrow 4S \le (a+c)(b+d)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$ hay tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

2) Ta sẽ chứng minh $(a+b+c+d)^2 \ge 4(a+c)(b+d) (*)$

Thật vậy, đặt $x = a+c, y = b+d$, khi đó $(*) \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (luôn đúng).

Vậy

$(a+b+c+d)^2 \ge 4(a+c)(b+d) \ge 16S$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ hay $a+c = b+d$ hay tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Bài 27. Gọi a,b,c,d là độ dài bốn cạnh (không nhất thiết liên tiếp) của một tứ giác có diện tích S Chứng minh rằng $2S \le ab+cd$. Khi nào xảy ra đẳng thức?

Lời giải

-Trường hợp 1: a và b là hai cạnh kề.

Ta có $S_{ABC} \le \dfrac{ab}{2}, S_{ACD} \le \dfrac{cd}{2}$

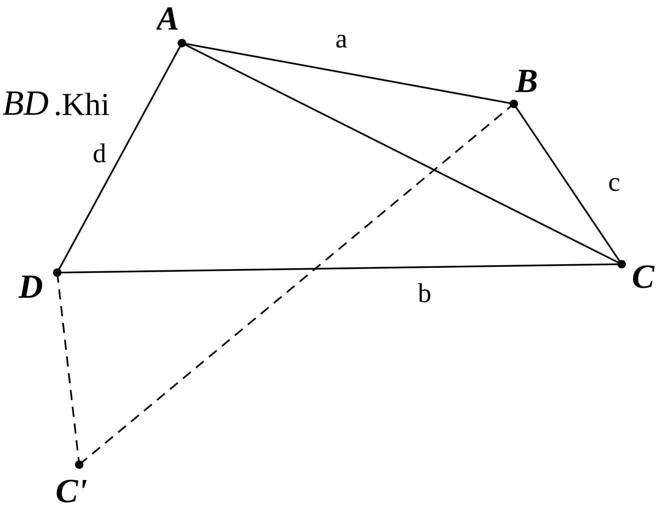
Suy ra $S = S_{ABC} + S_{ACD} \le \dfrac{ab+cd}{2} \Rightarrow 2S \le ab + cd$

Dấu "=" xảy ra xảy ra khi và chỉ khi $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$

- Trường hợp 2: a và b là hai cạnh đối.

Gọi C' là điểm đối xứng với C qua trung trực của BD.Khi đó ta có

$S_{ABCD} = S_{ABC'D}$



Theo câu a, ta có $S_{ABC'D} \le \dfrac{ab+cd}{2}$

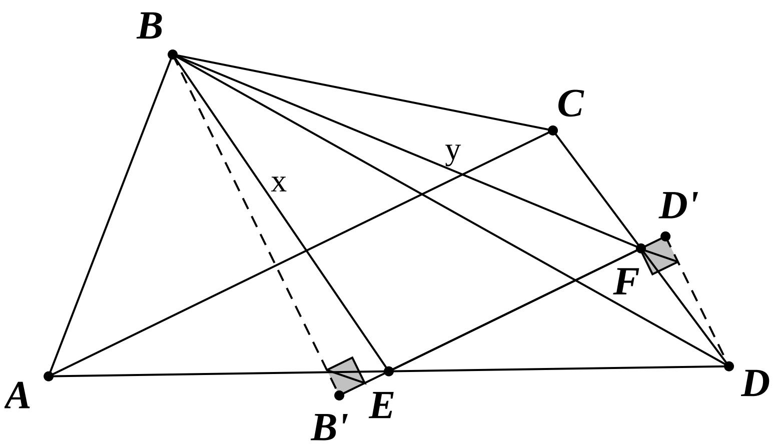
nên suy ra $S_{ABCD} \le \dfrac{ab+cd}{2}$ hay $2S \le ab + cd$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{ABC'} = \widehat{ADC'} = 90^\circ$.

Bài 28. Cho tứ giác $ABCD$, E và F theo thứ tự là trung điểm của AD và CD. Biết $BE + BF = a$. Chứng minh rằng

$$S_{ABCD} < \frac{a^2}{2}$$

Lời giải



Vẽ BB', DD' vuông góc với EF

Do $BB' > DD'$ nên $S_{BEDF} < 2S_{BEF}$

Đặt $BE = x$, $BF = y$. Khi đó $S_{BEF} \le xy$

Mà $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$

Suy ra $2S_{BEF} \le \dfrac{a^2}{4}$

Vậy $S_{BEDF} < \frac{a^2}{4}$.   (1)

Mặt khác, do E và F lần lượt là trung điểm của AD và CD

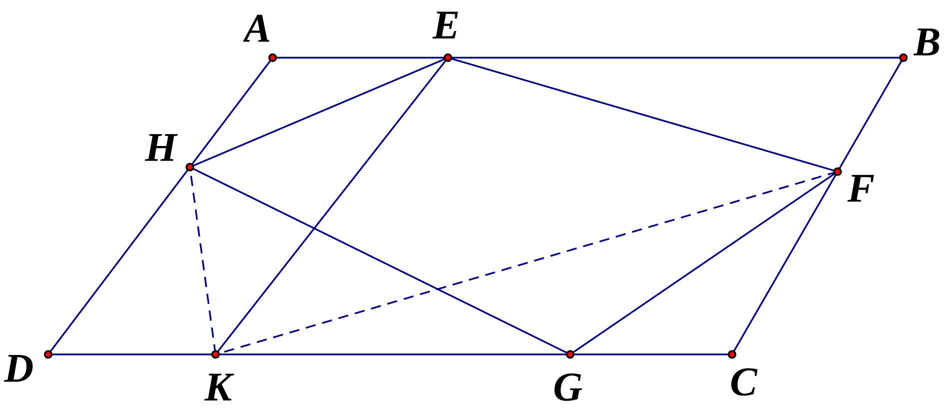
nên $S_{BED} = \frac{1}{2}S_{ABD}$ và $S_{BFD} = \frac{1}{2}S_{BCD}$.

Suy ra

$$S_{BEDF} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABCD} < \frac{a^2}{2}$.

🗁**Bài 29.** Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm Gọi E, F, G, H theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EG không song song với AD. Cho biết diện tích tứ giác $EFGH$ bằng nửa diện tích hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng HF song song với CD



Vẽ EK song song với AD, ta có:

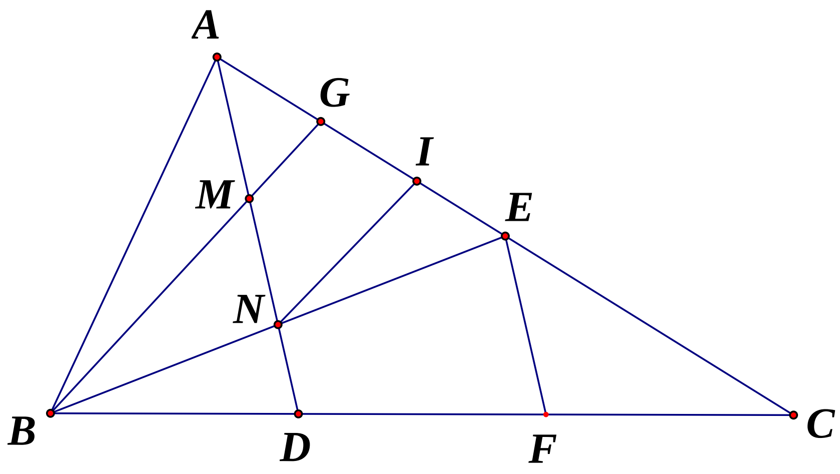
$$S_{EFKH} = S_{EKH} + S_{EKF} = \frac{1}{2}S_{AEKD} + \frac{1}{2}S_{EBCK} = \frac{1}{2}\left(S_{AEKD} + S_{EBCK}\right) = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{EFGH}$$

Suy ra $S_{HKF} = S_{HGF}$ nên HF song song với KG hay HF song song với CD.

🗁 **Bài 30.**

Cho tam giác ABC, E là trung điểm của AC. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BD = \frac{1}{3}BC$, lấy điểm G trên cạnh AE sao cho $AG = \frac{1}{3}AE$. Đoạn thẳng AD cắt BG, BE theo thứ tự ở M, N Tính diện tích tứ giác $MNEG$ theo diện tích tam giác ABC?

✍ Lời giải



Gọi F là trung điểm của CD.

Xét tam giác ACD có EF là đường trung bình nên $EF \parallel AD$.

Xét tam giác BEF có $EF \parallel AD$ và D là trung điểm BF nên N là trung điểm BE .

Gọi I là trung điểm GE thì NI là đường trung bình của tam giác EBG nên $NI \parallel MG$.

Xét tam giác ANI có $NI \parallel MG$ và G là trung điểm AI nên M là trung điểm AN.

Khi đó: $S_{AMG} = \frac{1}{2} S_{ANG} = \frac{1}{6} S_{ANE}$

Suy ra: $S_{MNEG} = \frac{5}{6} S_{ANE} = \frac{5}{12} S_{ABE} = \frac{5}{24} S_{ABC}$

Bài 31.

Cho tam giác ABC diện tích S. Lấy các điểm E, G trên BC sao cho $BE = EG = GC$. Gọi D, H theo thứ tự là trung điểm của $AC, AB; I$ là giao điểm của GH và $BD; K$ là giao điểm của AG và BD. Tính diện tích tứ giác $EIKG$.

Lời giải

Gọi F là trung điểm của GC.

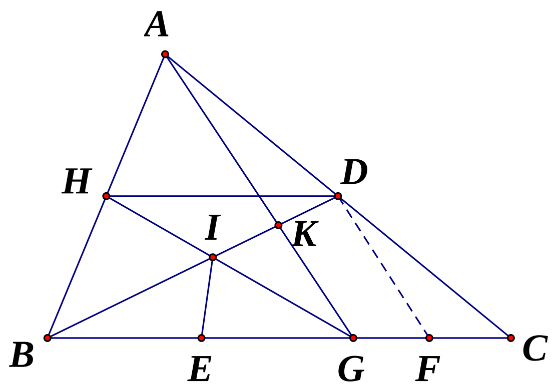
Ta có $KG \parallel DF, BG = \frac{4}{5} BF$

nên chứng minh được

$KG = \frac{4}{5} DF = \frac{2}{5} AG, BK = \frac{4}{5} BD$

Lại có $HD \parallel BC$ nên

$$\frac{ID}{IB} = \frac{HD}{BC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{2}{3}BG} = \frac{3}{4} \Rightarrow ID = \frac{3}{4} IB$$



Suy ra: $ID = \frac{3}{7}BD, IB = \frac{4}{7}BD, IK = \frac{8}{35}BD.$

Đặt: $S_{IKG} = a$ (2.1)

Thì: $S_{AIG} = \frac{5}{2}a, S_{BIG} = \frac{5}{2}a, S_{IEG} = \frac{5}{4}a$ (2.2)

Từ $(1),(2)$ suy ra: $S_{EIKG} = \frac{5}{4}a + a = \frac{9}{4}a.$ (2.3)

Lại có $S_{BKG} = \frac{5}{2}a + a = \frac{7}{4}a$ nên: $S_{ABG} = \frac{7}{2}a \times \frac{5}{2} = \frac{35}{4}a, S_{ABC} = \frac{35}{4}a \times \frac{3}{2} = \frac{105}{8}a.$ (2.4)

Từ $(3),(4)$ suy ra $S_{EIKG} : S_{ABC} = \frac{9}{4} : \frac{105}{8} = \frac{6}{35}$ hay $S_{EIKG} = \frac{6}{35}S_{ABC}$.

Bài 32.

Chứng minh rằng tam giác có một đỉnh là giao điểm hai cạnh đối của một tứ giác, hai đỉnh kia là trung điểm hai đường chéo của tứ giác đó có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tứ giác.

Lời giải

Gọi M, N là trung điểm các đường chéo BD, AC của tứ giác $ABCD, E$ là giao điểm của AD, BC.

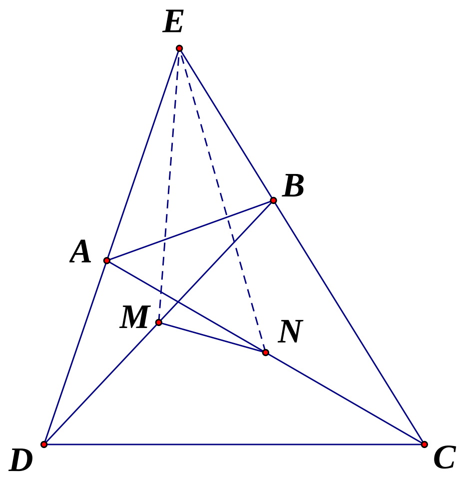
Ta có

$$S_{EMN} = S_{EDC} - S_{EMD} - S_{ENC} - S_{DMC} - S_{MNC}$$

$$\Rightarrow S_{EMN} = S_{EDC} - \frac{1}{2}S_{EBD} - \frac{1}{2}S_{EAC} - \frac{1}{2}S_{DBC} - \frac{1}{2}S_{AMC}$$

$$\Rightarrow S_{EMN} = \frac{1}{2}(S_{EDC} - S_{EBD} - S_{DBC}) + \frac{1}{2}(S_{EDC} - S_{EAC} - S_{AMC})$$

$$\Rightarrow S_{EMN} = 0 + \frac{1}{2}(S_{ADM} + S_{CDM}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$



+ Nếu tứ giác $ABCD$ có F là giao điểm của AB và CD thì từ bài toán trên ta cũng có $S_{FMN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Suy ra E và F cách đều đường thẳng MN. Do đó đường thẳng MN đi qua trung điểm của EF. Đường thẳng đi qua M, N và trung điểm của EF gọi là đường thẳng Gau-xơ.

3. DỰNG HÌNH:

Bài 33.

Cho tam giác ABC. Dựng các điểm D và F nằm trên cạnh AB, E nằm trên canh AC sao cho đường gấp khúc $CDEF$ chia tam giác ABC ra bốn phần có diện tích bằng nhau.

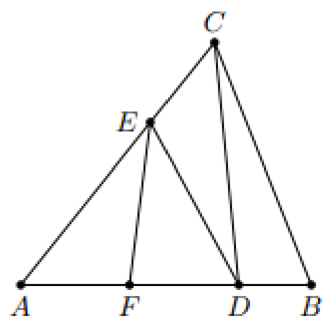
Lời giải

Lấy điểm D trên AB sao cho $BD = \frac{1}{4}BA$.

Suy ra: $S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{ABC}$

Lấy điểm E trên AC sao cho $CE = \frac{1}{3}AC$.

Suy ra: $S_{CDE} = \frac{1}{3}S_{CDA} = \frac{1}{4}S_{ABC}$



Lấy điểm F trên AD sao cho $AF = \frac{1}{2}AD.$

Suy ra $S_{DEF} = S_{EFA} = \frac{1}{2}S_{DEA} = \frac{1}{3}S_{CDA} = \frac{1}{4}S_{ABC}$

Vậy với cách lấy các điểm D, E, F như trên thỏa được yêu cầu bài toán.

Bài 34.

Một mảnh vườn hình tam giác ABC có một cái giếng D nằm trên cạnh BC. Hãy chia mảnh vườn thành hai phần có diện tích bằng nhau bởi một đường thẳng đi qua D.

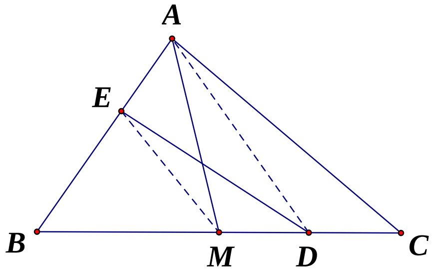
Lời giải

Cách 1. Nếu D là trung điểm BC thì DA là đường thẳng phải dựng.

Nếu D không là trung điểm của BC, qua trung điểm M của BC kẻ đường thẳng song song với DA cắt AB tại $E.DE$ là đường thẳng cần dựng.

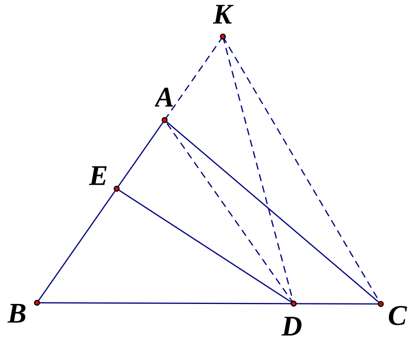
Thật vậy, do $EM \parallel AD$ nên

$$S_{ADE} = S_{ADM} \Rightarrow S_{BDE} = S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$



Cách 2. Giả sử $BD \geqslant CD$.

Qua C vẽ đường thẳng song song với DA cắt AB tại K. Như vậy, $\triangle ABC$ được biến đổi thành $\triangle BDK$ có cùng diện tích. Để chia $\triangle BDK$ thành hai phần có diện tích bằng nhau, ta chỉ cần dựng đường trung tuyến DE của nó.



Bài 35.

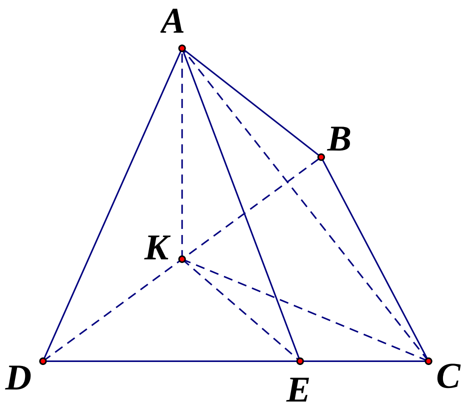
Cho tứ giác $ABCD$. Dựng đường thẳng đi qua A chia tứ giác ra hai phần có diện tích bằng nhau∠

Lời giải

Qua trung điểm K của BD, vẽ đường thẳng song song với AC cắt CD tại $E.AE$ là đoạn thẳng cần dựng.

Thật vậy, do $KE \parallel AC$ nên $S_{KAC} = S_{EAC}$

Suy ra $S_{ABCE} = S_{ABCK} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$



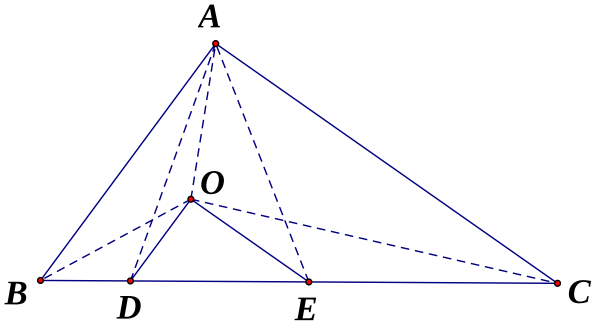
Bài 36.

Cho tam giác ABC. Dựng điểm O nằm bên trong tam giác sao cho diện tích các tam giác AOB, BOC, COA tỉ lệ với $1:2:3$

Lời giải

Dựng D, E trên BC sao cho $BD : DE : EC = 1 : 2 : 3$.

Qua D vẽ đường thẳng song song với AB, qua E vẽ đường thẳng song song với AC, chúng cắt nhau tại điểm O phải dựng.



Thật vậy, do $OD \parallel AB$ nên: $S_{OAB} = S_{DAB} = \frac{1}{6} S_{ABC}$

Do $OE \parallel AC$ nên $S_{OAC} = S_{EAC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$

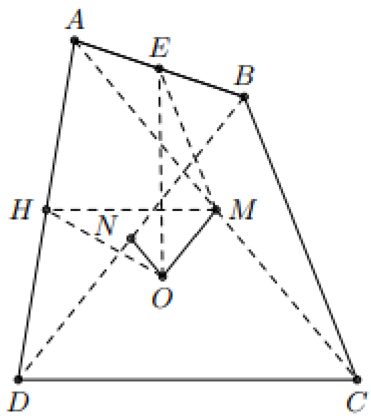
Suy ra $S_{OBC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$

Bài 37.

Cho tứ giác $ABCD$. Dựng điểm O nằm bên trong tứ giác sao cho nếu nối O với trung điểm các cạnh của tứ giác thì tứ giác được chia ra bốn phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải

Gọi E, H là trung điểm của AB và AD.



Ta có: $S_{OHAE} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ (2.1)

Gọi M là trung điểm của AC, ta cũng có

$S_{MHAE} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ (2.2)

Từ (1) và (2) suy ra

$S_{OHAE} = S_{MHAE} \Rightarrow S_{OHE} = S_{MHE}$

Do đó: $OM \parallel HE \Rightarrow OM \parallel BD$. (2.3)

Tương tự, gọi N là trung điểm của BD thì: $ON \parallel AC$.

(2.4)

Hai điều kiện (3) và (4) xác định được điểm O.

Chương

CHUYÊN ĐỀ

Bài 1

TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Bài toán tìm tập hợp điểm (còn gọi là quỹ tích) được chính thức giới thiệu ở lớp 9 . Tuy nhiên, học sinh khá và giỏi có thể làm quen với dạng toán này ngay từ lớp 8 với các kiến thức thuộc chương trình Hình học lớp 7 và lớp 8 .

1 Tóm tắt lý thuyết

A. HAI TẬP HỢP BẰNG NHAU

Định nghĩa 1. Tập hợp các điểm cách một đường thẳng xy cố định một khoảng bằng h không đổi (gọi là tập hợp A) là hai đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng h (gọi là tập hợp
B). Hai tập hợp A và B nói trên được gọi là hai tập hợp bằng nhau. Nghĩa là:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \forall x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

Do đó muốn chứng tỏ hai tập hợp điểm A và B bằng nhau, ta phải chứng minh hai điều:

- Nếu M là một điểm bất kì thuộc A thì M cũng thuộc B.
- Nếu M là một điểm bất kì thuộc B thì M cũng thuộc A.

Điều (1) chứng tỏ rằng tập hợp B chứa tập hợp A, điều (2) chứng tỏ rằng tập hợp A chứa tập hợp B. Phải chứng minh cả hhai điều trên mới kết luận được A và B là hai tập hợp bằng nhau.
Do đó bài toán "Tìm tập hợp các điểm có chung một tính chất α nào đó" được trình bày theo ba phần:
Phần 1. Chứng minh rằng nếu điểm M có tính chất α thì điểm M thuộc hình $\mathcal{H}$ nào đó.
Phần 2. Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc hình $\mathcal{H}$ thì điểm M có tính chất α.
Phần 3. Kết luận rằng tập hợp các điểm M có tính chất α là hình $\mathcal{H}$.
+ *Chú ý.*
- *Phần 2 là phần đảo của phần 1, do đó nếu goi phần 1 là phần thuận thì phần 2 là phần đảo.*

- Theo phần thuận, hình $\mathcal{H}$ chứa mọi điểm có tính chất α, không chứa thiếu điểm nào. Theo phần đảo, hình $\mathcal{H}$ chỉ chứa những điểm có tính chất α, không chứa thìa những điểm nào khác. Như vậy, hình $\mathcal{H}$ gồm và chỉ gồm tất cả những điểm có tính chất α.

B. CÁC TẬP HỢP ĐIỂM ĐÃ HỌC

Khi giải bài toán về tập hợp điểm, cần nhớ lại ba tập hợp điểm đã học ở lớp 7 và một tập hợp điểm đã học ở lớp 8.

- Tập hợp các điểm cách một điểm O cố định một khoảng R không đổi là đường tròn tâm O, bán kính R.
- Tập hợp các điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng cố định là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.
- Tập hợp các điểm thuộc miền trong một góc cố định và cách đều hai cạnh của nó là tia phân giác của góc ấy.
- Tập hợp các điểm cách một đường thẳng xy cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng h.

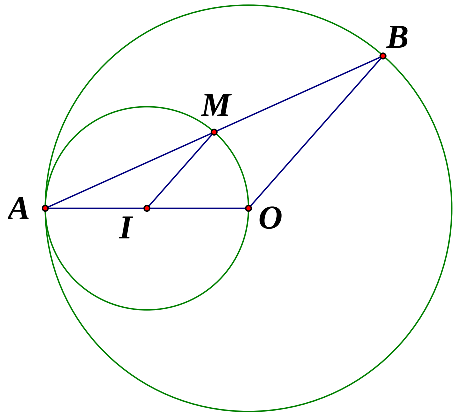
2 Một số ví dụ

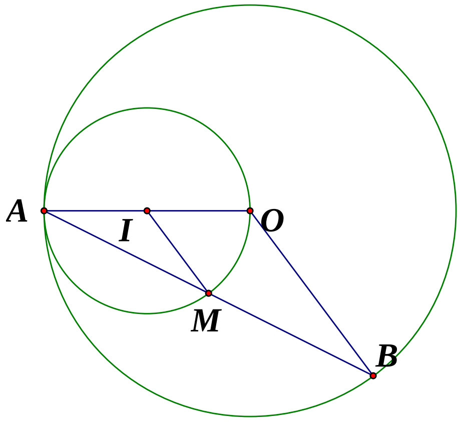
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1.
Cho đường tròn tâm O cố định, bán kính 4 cm, điểm A cố định trên đường tròn, điểm B chuyển động trên đường tròn. Tìm tập hợp các trung điểm M của AB.

Lời giải

Phần thuận. (h.31a) Goi I là trung điểm AO thì I là điểm cố định. IM là đường trung bình của tam giác AOB nên $IM = \dfrac{OB}{2} = 2\text{ cm}$. Điểm M luôn cách điểm I cố định 2 cm nên M thuộc đường tròn tâm I bán kính 2 cm.





a) b)

Hình 31

Phần đảo. (h.31b)

Lấy điểm M bất kì thuộc đường tròn $(I, 2 \text{ cm}), M$ khác A.

Ta sẽ chứng minh rằng M là trung điểm của một đoạn thẳng nào đó có một đầu là A và một đầu thuộc đường tròn (O).

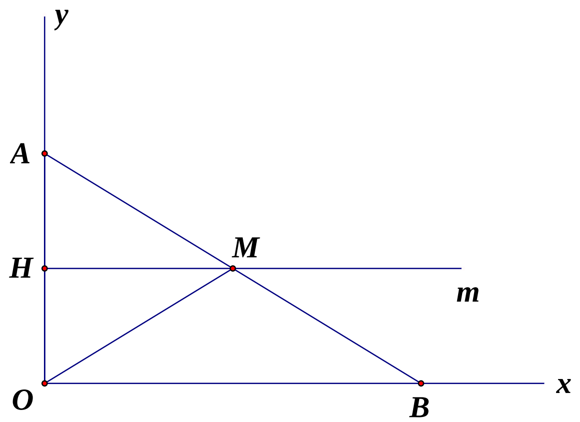
Thật vậy, gọi B là giao điểm của AM và (O), tam giác IAM cân nên $\widehat{IAM} = \widehat{IMA}, \triangle OAB$ cân nên $\widehat{OAB} = \hat{B}$, suy ra $\widehat{IMA} = \hat{B}$, do đó $IM \parallel OB$. Tam giác OAB có $OI = IA, IM \parallel OB$ nên $AM = MB$
Kết luận. Khi điểm B chuyển động trên (O), tập hợp các trung điểm M của AB là đường tròn $(I, 2$ cm), trừ điểm A.

📖 Ví dụ 2.
Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định trên tia Oy, điểm B chuyển động trên tia Ox. Tìm tập hợp các trung điểm M của AB.

✍ Lời giải

Cách 1. (h.32)

Phần thuận. OM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông OAB nên $OM = \frac{AB}{2}$ mà $MA = \frac{AB}{2}$, suy ra $MA = MO$. Điểm M cách đều hai điểm O và A cố định nên M thuộc đường trung trực của OA



Hình 32

Giới hạn. Vì đoạn thẳng AB chỉ thuộc miền trong góc vuông xOy nên điểm M nằm trên tia Hm thuộc đường trung trực của OA và thuộc miền trong góc xOy.

Phần đảo. Lấy điểm M bất kì thuộc tia Hm thì: $MO = MA$ (1)

$$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MOA} \quad (2)$$

Gọi B là giao điểm của AM và Ox. Ta có

$$\widehat{MBO}+\widehat{MAO}=90^\circ, \widehat{MOB}+\widehat{MOA}=90^\circ \quad (3)$$

nên từ (2) và (3) suy ra $\widehat{MBO}=\widehat{MOB}$. Do đó

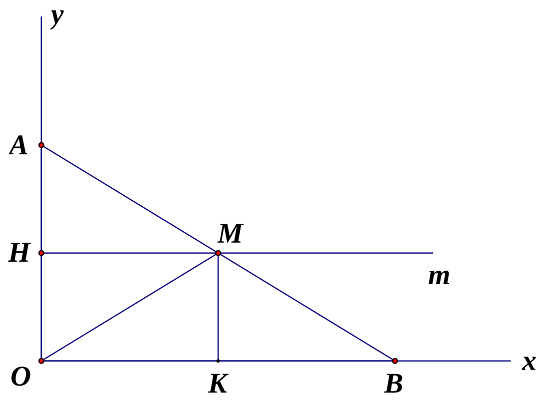
$$MO=MB \quad (4)$$

Từ $(1),(4)$ suy ra $MA=MB$, do đó M là trung điểm của AB.

Kết luận. Khi điểm B chuyển động trên tia Ox thì tập hợp các trung điểm M của AB là tia Hm thuộc đường trung trực của OA và thuộc miền trong góc xOy.

Cách 2. (h.33)

Phần thuận. Đặt $OA=h$ (không đổi). Vẽ $MK \perp Ox$. Tam giác AOB có $AM=MB, MK \parallel AO$ nên $MK=\frac{AO}{2}=\frac{h}{2}$. . Điểm M cách Ox cố định một khoảng không đổi $\frac{h}{2}$ nên M thuộc đường thẳng song song với Ox, cách Ox một khoảng $\frac{h}{2}$



Hình 33

Giới hạn. Vì M chỉ thuộc miền trong góc vuông xOy nên M nằm trên tia Hm thuộc đường thẳng song song nói trên.

Phần đảo. Lấy điểm M bất kì thuộc tia Hm. Gọi B là giao điểm của AM và Ox. Tam giác AOB có $AH=HO=\frac{h}{2}, HM \parallel OB$ nên M là trung điểm AB.

Kết luận. Khi điểm B chuyển động trên tia Ox, tập hợp các trung điểm M của AB là tia Hm thuộc đường thẳng song song với tia Ox, cách tia Ox một khoảng $\frac{h}{2}$ và thuộc miền trong góc xOy

3 Thứ tự nghiên cứu và trình bày lời giải bài toán tìm tập hợp điểm

1. Tìm hiểu đề bài

Phân biệt các yếu tố cố định yếu tố không đổi, quan hệ không đổi, yếu tố chuyển động (bao gồm điểm chuyển động đã biết vị trí và điểm chuyển động phải xác định vị trí).

Chẳng han trong ví dụ 24 thì:

- Yếu tố cố dịnh: góc vuông xOy, diểm A.

- Yếu tố không đổi: độ dài $AO = h$.

- Quan hệ không đổ: $MA = MB$

- Yếu tố chuyển đông: Diểm B chuyển động trên tia Ox, diểm M đang càn xác dịnh vị trí.

Tr 10.2

2. Dự đoán tập hợp điểm

Để dự đoán tập hợp điểm phải tìm, ta thường vẽ chính xác vài vị trí của điểm đó (ít nhất là ba vị trí) rồi bằng trực giác đoán nhận điểm đó chuyển động trên hình nào.

Khi dự đoán tập hợp điểm, nên chú ý đến:

- Điểm đặc biệt: Trong ví dụ 23, khi B ở vị trí đối xứng với A qua O thì M ở vị trí O vậy O là một diểm của tập hợp phải tìm.

- Trong ví du 24, khi B ở vị trí O thì M ở vị trí H, trung diểm của AO, diểm H là một diểm của tập hợp phải tìm.

- Vị trí giới hạn: Trong ví du 23, khi B tiến đến A thì M tiến đến A, diểm A là vị trí giới hạn của tập hợp phải tìm.

- Điểm vô tận: Trong ví du 24, khi B chuyển động xa diểm O vô tân trên tia Ox thì M cũng chuyển động xa vô tận. Như vậy, M không thể chuyển động trên đường tròn.

- Tính đối xứng: Trong ví dụ 23, chuyển động của diểm M có tính đối xúng qua đường thẳng cố định AO nên tập hợp diểm phải tìm nhận AO làm trục đối xúng.

3. Phần thuận

- Phát hiện quan hệ giữa điểm M cần xác định vị trí với các điểm cố định, các đường thẳng cố định.

- Nếu dư đoán điểm cần xác đinh vi trí thuôc đường tròn. ta chứng tỏ nó cách một điểm cố đinh một khoảng không đổi.

- Nếu dự đoán điểm cần xác định vị trí thuộc đường thẳng, ta chứng tỏ nó cách đều hai điểm cố định, hoặc cách một đường thẳng cố định một khoảng không đổi.

⚠ *Để phát hiện ra các quan hệ ấy, có thể phải vẽ thêm đường phụ (điểm I trong ví dụ 23, đoạn MK trong cách 2 của ví dụ 24).*

- Dựa vào các tập hợp điểm cơ bản đã học, chỉ ra điểm M cần xác định vị trí thuộc một hình nào đó, chẳng hạn hình H.

- Giới hạn hình H nếu điểm M không thuộc toàn bộ hình H mà chỉ thuộc hình H', một bộ phận của hình H (tia Hm trong ví dụ 24).

4. Phần đảo

1 Lấy điểm M bất kì trên hình H', bằng vẽ hình, tạo ra các điểm chuyển động khác được nêu trong bài toán (điểm B trong ví dụ 23 và ví dụ 24).

2 Chứng tỏ rằng điểm M có tính chất mà đề bài nêu lên (M là trung điểm của AB trong ví dụ 23 và ví dụ 24)

5. Kết luận

Tập hợp các điểm M phải tìm là hình H'.

⚠ *Hầu hết các bài toán trong cuốn sách này được hỏi dưới dạng:*
Nếu điểm M có tính chất α thì điểm M nằm trên đường nào?
Do đó trong lời của bài chỉ trình bày nội dung của phần thuận. Chi tiết hơn về phần đảo và cách chứng minh phần đảo trong bài toán tìm tập hợp điểm, xem Nâng cao và phát triển Toán 9 tập hai.

E. PHÂN CHIA CÁC TRƯỜNG HỢP TRONG BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Trong một số bài toán, ta cần phân chia các trường hợp khi kết luận "Tập hợp các điểm M có tính chất α là hình H ".

1. Xét điểm M thuộc từng miền

Nếu một khẳng định là đúng khi điểm M ở vị trí này nhưng lại không đúng khi M ở vị trí khác thì ta cần xét điểm M thuộc từng miền rồi lấy hợp các tập hợp điểm tìm được.

📖 **Ví dụ 3.** $25(12)$

Cho tam giác ABC cố định. Các điểm M sao cho các tam giác MAB và MAC có diện tích bằng nhau nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

$S_{MAB} = S_{MAC} \Rightarrow BB' = CC'$ $(BB', CC'$ là các đường vuông góc kẻ từ B và từ C đến $MA)$.

Xét hai trường hợp:

❶ Trường hợp 1: Điểm M thuộc miền trong góc BAC hoặc góc đối đỉnh với nó $(h.34)$.

Khi đó B và C nằm khác phía đối với AM.

Khi đó đường thẳng AM cắt đoạn thẳng BC ở I.

Do $BB' = CC', BB'//CC'$ nên $BB'CC'$ là hình bình hành, I là trung điểm của BC.

Điểm M thuộc đường thẳng AI.

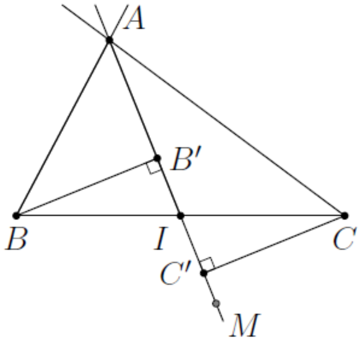
❷ Trường hợp 2: Điểm M thuộc miền trong góc kề bù với góc $BAC(h.35)$.

Tức là B và C nằm cùng phía đối với AM.

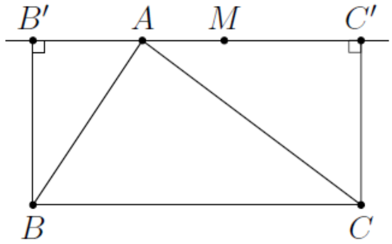
Do $BB' = CC', BB'//CC'$ nên $BB'CC'$ là hình bình hành, $AM//BC$.

Điểm M thuộc đường thẳng qua A và song song với BC.

Kết luận chung: Các điểm M phải tìm gồm đường thẳng chứa đường trung tuyến AI của tam giác ABC và đường thẳng qua A song song với BC, trừ điểm A.



Hình 34



Hình 35

2. Xét từng vị trí của hình đã cho

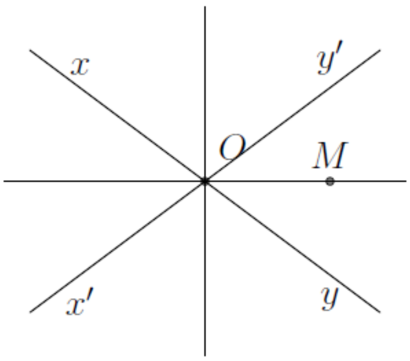
Nếu các hình đã cho có những vị trí khác nhau làm cho hình dạng của hình H thay đổi thì ta cần xét từng vị trí của hình đã cho.

Ví dụ 4. $26(8)$

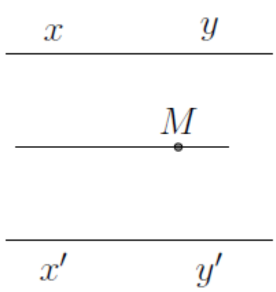
Các điểm M cách đều hai đường thẳng cố định $xy, x'y'$ nằm trên đường nào?

LỜI GIẢI.

Trường hợp 1: xy cắt $x'y'$ ở O, điểm M nằm trên bốn tia phân giác của bốn góc tạo bởi hai đường thẳng (bốn tia này làm thành hai đường thẳng vuông góc với nhau tại O, xem hình 36).



Hình 36



Hình 37

Trường hợp 2: $xy // x'y'$, điểm M nằm trên đường thẳng song song cách đều xy và $x'y'$ $(h.37)$.

3. Xét từng trường hợp của tính chất α đã cho

Nếu tính chất α có những trường hợp khác nhau làm cho hình dạng của hình H thay đổi thì ta cần xét riêng từng trường hợp của tính chất α.

Ví dụ 5. $27(8)$

Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định trên tia Ay, điểm B chuyển động trên tia Ox. Đỉnh C các tam giác ABC vuông cân tại B nằm trên đường nào?

Phân tích: Dự đoán tập hợp điểm (khi C và O nằm khác phía đối với AB).

Khi B trùng O thì C trùng D (D thuộc tia Ox sao cho $OD = OA$), đó là điểm cố định.

Chú ý rằng khi B chạy xa vô tận trên tia Ox thì C cũng chạy xa vô tận.

Từ các nhận xét trên, ta dự đoán các đỉnh C nằm trên một tia gốc D.

LỜI GIẢI.

❶ Trường hợp C và O nằm khác phía đối với $AB(h.38)$

Trên tia Ox lấy điểm D sao cho $OD = OA$, D là điểm cố định. Kẻ $CH \perp Ox$.

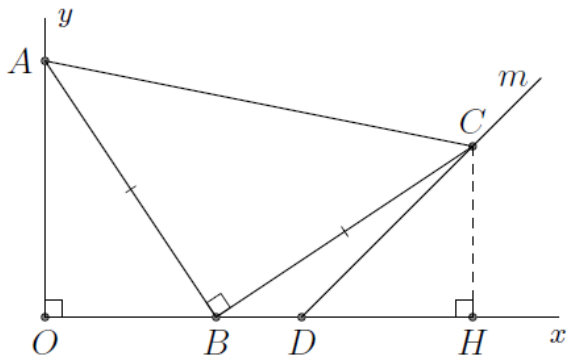
Dễ dàng chứng minh được $\Delta AOB = \Delta BHC$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra.

$OB = CH$ (1)

$OA = BH$ (2)

Ta lại có $OA = OD$ nên từ (2) suy ra $BH = OD$,

do đó $OB = DH$ (3)



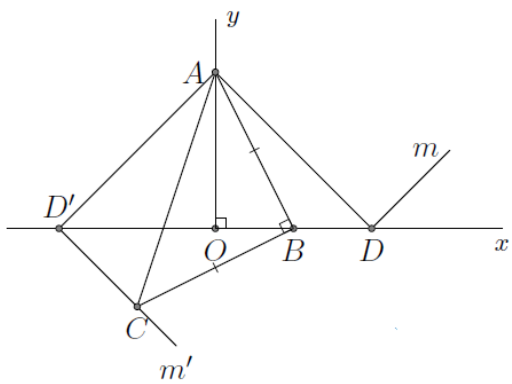
Hình 38

Từ (1) và (3) suy ra $CH = DH$. Vậy $\widehat{CDH} = 45^\circ$.

Điểm C chuyển động trên tia Dm tạo với Dx góc 45° và thuộc miền trong góc xOy.

❷ Trường hợp C và O nằm cùng phía đối với AB ($h.39$).

Bạn đọc tự giải được C chuyển động trên tia $D'm'$, chính là tia Dm quay quanh A góc 90° cùng chiều quay của kim đồng hồ.



Hình 39

3 Bài tập tự luyện

Bài 1.

Tam giác ABC có BC cố định, I là trung điểm của đường cao BH. Các điểm I nằm trên đường nào ?

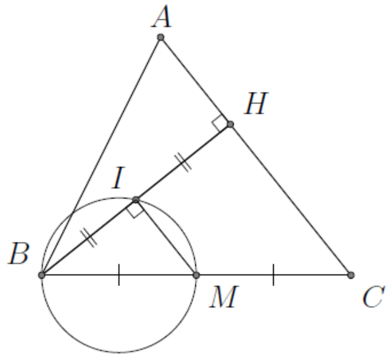
LỜI GIẢI.

(h.182). Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có MI là đường trung bình của ΔBCH suy ra $MI // CH$ mà

$CH \perp BH$ nên $MI \perp BI$ suy ra $\widehat{BIM} = 90^\circ$

Các điểm I nằm trên đường kính BM, trừ điểm B (M là trung điểm của BC).



Hình 182

Bài 2.

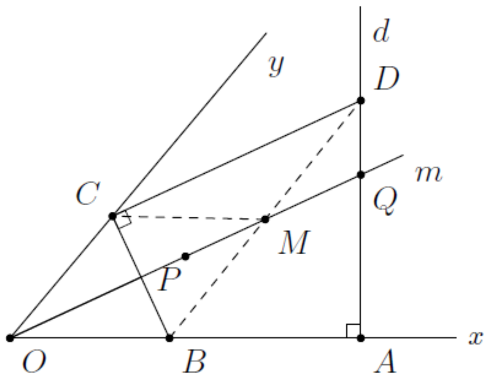
Cho góc xOy cố định, đường thẳng d cố định vuông góc với Ox tại A, điểm B chuyển động trên đoạn thẳng OA. Trên tia Oy lấy điểm C sao cho $OC = OB$. Đường vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng d ở D. Các trung điểm M của BD nằm trên đường nào?

LỜI GIẢI.

(h.183). Dễ chứng minh được $\Delta OCM = \Delta OBM$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{MOC} = \widehat{MOB}$ suy ra OM là tia phân giác của $\widehat{BOC}$ nên điểm M thuộc tia phân giác Om của góc xOy.

Giới hạn: Khi B trùng với A thì M trùng với Q (Q là giao điểm của Om và d).



Khi B tiến dến O thì D tiến dến Q, M. tiến đến P (P là trung điểm của OQ). M nằm trên đoạn thẳng PQ thuộc tia phân giác Om, trừ điểm P.

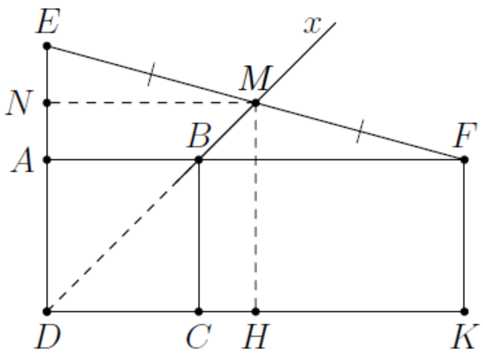
Hình 183

Bài 3.

Cho hình vuông $ABCD$ cố định. Điểm E chuyển động trên tia đối của tia AD, điểm F chuyển động trên tia đối của tia BA sao cho $BF = DE$. Các trung điểm M của EF nằm trên đường nào?

LỜI GIẢI.

(h.184). Vẽ $MN \perp DA$; vẽ $MH \perp DC$.



Ta có MN là đường trung bình của ΔAEF

Suy ra $MN = \frac{1}{2}AF \Rightarrow 2MN = AF$ (1)

Áp dụng tính chất đường trung bình của hình thang $DEFK$

Ta có $MH = \frac{1}{2}(FK + DE) \Rightarrow 2MH = FK + DE$ (2)

Suy ra $AF^2 = AB + BF = BC + BF = FK + DE$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $MN = MH$.

Vậy tập hợp các điểm M nằm trên tia Bx, tia đối của tia BD.

Hình 184

Bài 4.

Cho góc xOy cố định có số đo bằng $\alpha < 180^\circ$. Một tam giác ABC cân tại A có cạnh bên bằng a không đổi, góc đáy bằng $\frac{\alpha}{2}$, tam giác đó thay đổi vị trí sao cho B thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, A và O khác phía đối với BC. Các điểm A nằm trên đường nào?

LỜI GIẢI.

(h.185). Vẽ $AH \perp Ox, AK \perp Oy$

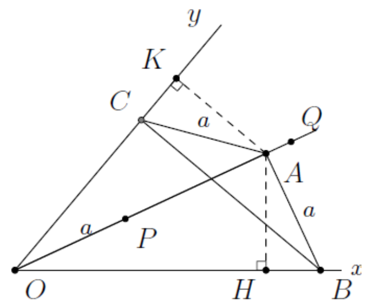
Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{HAK}$ (cùng bù với $\widehat{xOy}$) nên $\widehat{KAC} = \widehat{HAB}$

Do đó $\Delta KAC = \Delta HAB$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow AK = AH$. Do đó A thuộc tia phân giác của góc xOy.

Giới hạn: Khi C trùng với O hoặc B trùng O thì A trùng P ($OP = a$)

Khi $AB \perp Ox$, (lúc đó $AC \perp Oy$) thì A trùng Q (Q cách Ox và Oy một khoảng bằng a).



Hình 185

Bài 5.

Cho tam giác vuông cân ABC cố định. Điểm M chuyển động trên cạnh huyền BC. Đường thẳng qua M và vuông góc với BC cắt các đường thẳng BA, CA theo thứ tự ở D, E. Gọi I là trung điểm của CE, K là trung điểm của BD. Các trung điểm O của IK nằm trên đường nào?

LỜI GIẢI.

(h.186). Xét ΔBMD có $\widehat{BMD}=90^\circ, \widehat{MBD}=45^\circ$

suy ra $\widehat{MDB}=45^\circ$ nên ΔBMD là tam giác vuông cân tại M.

Chứng minh tương tự, suy ra ΔCME vuông cân ở M

Nên MK, MI là đường trung tuyến đồng thời là đường cao của hai tam giác trên suy ra $MK \perp AB, MI \perp AC$.

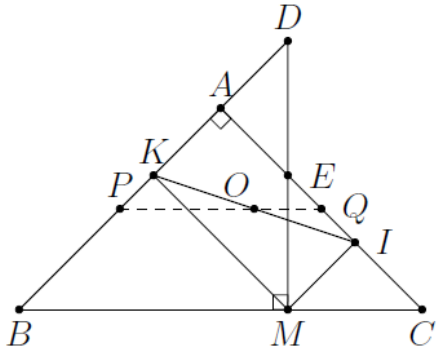
Xét tứ giác $AKMI$ có $\widehat{MKA}=\widehat{KAI}=\widehat{MIA}=90^\circ$

suy ra tứ giác $AKMI$ là hình chữ nhật.

Gọi O là trung điểm của KI

nên O cũng là trung điểm của AM

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và AC.



Hình 186

Suy ra PQ là đường trung bình của ΔABC suy ra điểm O thuộc đoạn thẳng PQ.

Vậy các điểm O nằm trên đường trung bình PQ của ΔABC $(PQ//BC)$

Bài 6.

❶ Cho đoạn thẳng AB cố định, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng đó. Vẽ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB các tam giác đều AMC, BMD. Các trung điểm I của CD nằm trên đường nào?

❷Cũng câu hỏi như câu a), trong đó các tam giác đều vẽ trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB.

LỜI GIẢI.

❶ (h. 187 a). Gọi $AC \cap BD = K$.

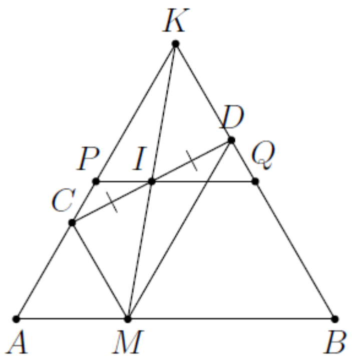
Xét ΔABK có $\hat{A}=\hat{B}=\widehat{AKB}=60^\circ$ $\Rightarrow \Delta ABK$ là tam giác đều.

Tứ giác $CMDK$ có $MC//KD$, $MD//KC$ nên tứ giác $CMDK$ là hình bình hành.

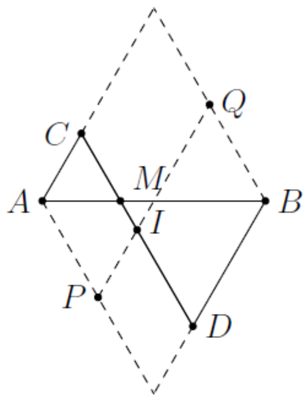
Khi đó I là trung điểm của CD nên I cũng là trung điểm của KM.

Từ đó ta suy ra I cách AB một khoảng không đổi.

Nên I nằm trên đường trung bình PQ của ΔKAB, trừ P và Q (ΔKAB là tam giác đều).



a)



b)

Hình 187

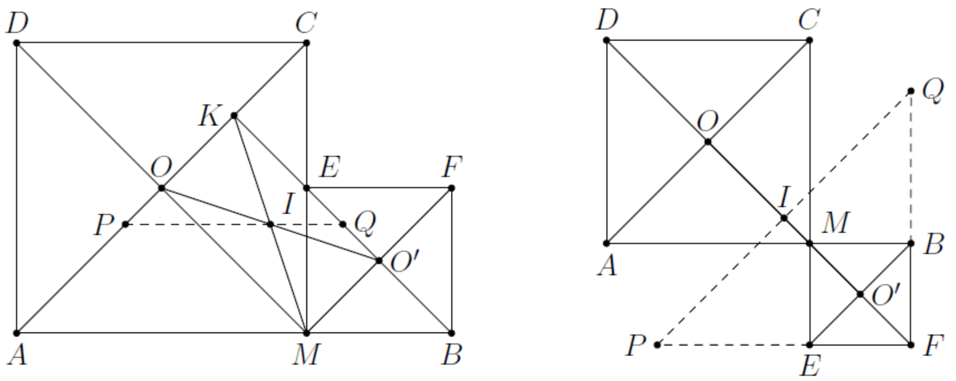
❷ (h.187 b). Các đường thẳng AC và BD cố định, I nằm trên đoạn thẳng PQ và cách đều hai đường thẳng đó, trừ P và Q.

Bài 7.

Cho đoạn thẳng AB cố định, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng đó. Các trung điểm đoạn nối tâm các hình vuông có cạnh theo thứ tự là MA và MB nằm trên đường nào?

LỜI GIẢI.

❶Trường hợp 1: (h. 188a). Hai hình vuông tạo bởi MA, MB cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB. Gọi hình vuông tạo bởi cạnh MA là $AMDC$ có tâm là O.
Hình vuông tạo bởi cạnh MB là $MBFE$ có tâm là O'.
Gọi K là giao điểm của BE và AC.
Xét tứ giác $MOKO'$ có $\widehat{MOK} = \widehat{OMO'} = \widehat{MO'K} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $MOKO'$ là hình chữ nhật.
Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OO'. Khi đó I cũng là trung điểm của đoạn thẳng KM.
Suy ra I nằm trên đường trung bình PQ của ΔKAB vuông cân, trừ P và Q $\left(PQ//AB\right)$.



Hình 188

❷ Trường hợp 2: (h. 188 b). Hai hình vuông tạo bởi MA, MB thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB. Ta chứng minh được I nằm trên đoạn thẳng PQ song song cách đều AC và BE, trừ P và Q.

Bài 8.

Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định trên tia Oy, điểm B chuyển động trên tia Ox. Vẽ tam giác đều ABC(C và O khác phía đối với AB).

❶ Các điểm C nằm trên đường nào?

❷ Các trung điểm H của AC nằm trên đường nào?

❸ Các trung điểm K của BC nằm trên đường nào?

LỜI GIẢI.

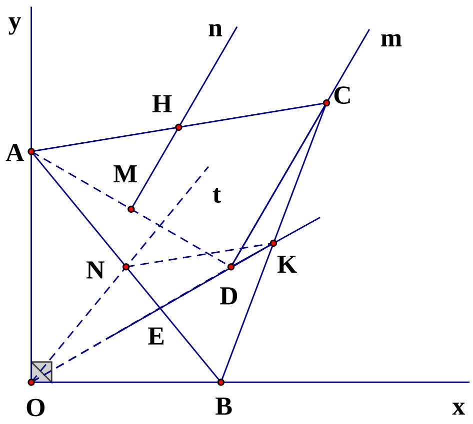
❶ (h.189). Vẽ ΔAOD đều (D nằm trong góc xOy) khi đó $OA = OD$ không đổi, mà $\widehat{AOB} = 60^\circ$ không đổi nên D là điểm cố định thuộc tập hợp điểm phải tìm.

Xét ΔAOB và ΔADC có

$$\begin{cases} AO = AD \\ \widehat{OAB} = \widehat{DAC} = 60^\circ - \widehat{BAD} \\ AB = AC \end{cases}$$

Suy ra $\Delta AOB = \Delta ADC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$

$\Rightarrow CD \perp AD$



Hình 189

Các điểm C nằm trên tia $Dm \perp AD$ tại D và thuộc miền trong góc xOy.

❷ Gọi M là trung điểm của AD. Vì A và D là hai điểm cố định nên M là điểm cố định.

Xét ΔACD có $MA = MD, HA = HC$, nên MH là đường trung bình của $\Delta ACD \Rightarrow MH // CD$

Vậy các điểm H nằm trên tia $Mn // Dm$.

❸ Ta sẽ chứng minh rằng $\widehat{KOx} = 30^\circ$.

Gọi N là trung điểm của AB thì $NK = NA = NB = NO$, các tam giác BBO, KNO, KNA cân.

Gọi Nt là tia đối của tia NO, ta có $\widehat{KOx} = \widehat{BON} - \widehat{KON} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BNt} - \widehat{KNt}\right) = \frac{1}{2}\widehat{BNK} = 30^\circ$

Các điểm K nằm trên tia ED (E là trung điểm của OD).

🗁 Bài 9.

Cho góc xOy cố định, các điểm A, B cố định thuộc tia Ox, điểm C chuyển động trên tia Oy. Đường vuông góc với CA tại A và đường vuông góc với CB tại B cắt nhau ở M. Các điểm M nằm trên đường nào?

✍ LỜI GIẢI.

(h.190). Gọi K là trung điểm của CM.

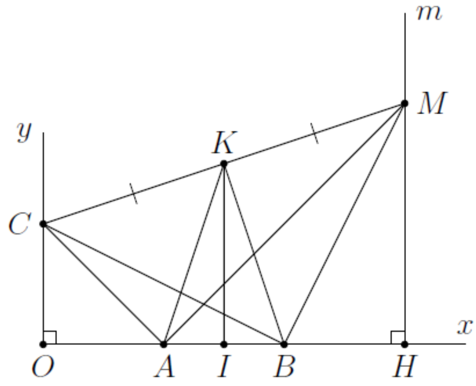
Vẽ $KI, MH \perp Ox$ thì $OI = IH$.

Ta lại có $KA = KB$ (cùng bằng $\frac{CM}{2}$) $\Rightarrow IA = IB$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AB và là điểm cố định.

Do đó H là điểm cố định $\left(OH = 2OI\right)$.

Các điểm M nằm trên tia $Hm \perp Ox$ tại H và thuộc miền trong góc xOy, trừ điểm H.



Hình 190

🗁 **Bài 10.**

Cho góc xOy cố định khác góc bẹt và một độ dài h.

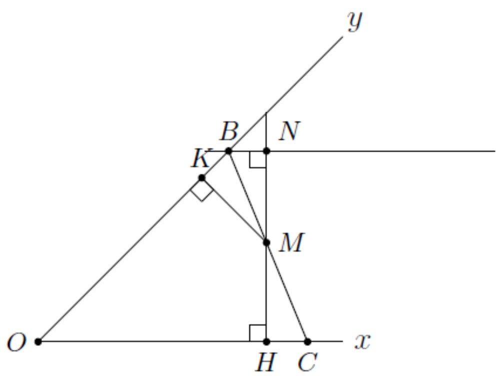
❶ Các điểm M thuộc miền trong của của các góc có tổng các khoảng cách từ M đến Ox và đến Oy bằng h nằm trên đường nào?

❷ Cũng hỏi như câu a) trong đó thay tổng bằng hiệu.

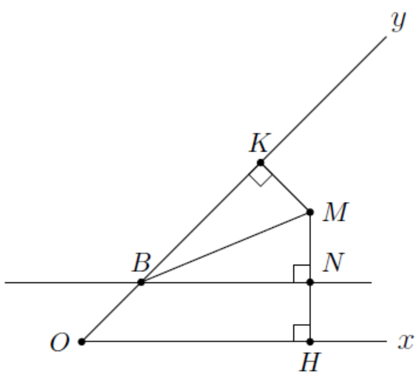
✍ **LỜI GIẢI.**

❶ (h.191). Gọi MH, MK thứ tự là khoảng cách từ M đến Ox, Oy. Để làm xuất hiện tổng $MH + MK$, trên tia đối của tia MH lấy N sao cho $MN = MK$ thì $HN = HM + MN =$ $MH + MK = h$

Qua N vẽ đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở B. Như vậy, BN là đường thẳng cố định. M cách đều hai cạnh của góc OBN cố định nên M thuộc tia phân giác của góc đó. Giới hạn. M nằm trên đoạn thẳng BC.



Hình 191



Hình 192

❷ (h.192) Vẽ $Mh \perp Ox, MK \perp Oy$. Xét $MH > MK$.

Trên tia MH lấy N sao cho $MN = MK$ thì $NH = h$.

Qua N vẽ đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở B.

Ta có đường thẳng BN cố định. M thuộc tia BM, tia phân giác của góc NBy.

Tương tự, với $MK > MH, M$ thuộc tia Cn (các tia Bm, Cn vuông góc với BC).

🗁 **Bài 11.**

Cho tam giác cân ABC cố định $(AB = AC)$. Hai điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các cạnh bên AB, AC sao cho $AD = CE$. Các trung điểm M của DE nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

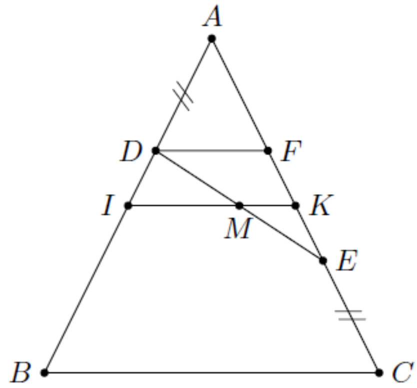
(h.193) Qua M kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC ở I và K. Kẻ $DF//BC$.

Dễ dàng chứng minh được $AF = AD = CE, FK = KE$

nên K là trung điểm cạnh AC.

Tương tự, I là trung điểm cạnh AB.

Điểm M nằm trên đoạn thẳng IK nối các trung điểm của AB và AC.



HHình 193

🗁 **Bài 12.**

Cho tam giác ABC cố định. Gọi Bx, Cy theo thứ tự là tia đối của các tia BA và CA. Các điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các tia Bx, Cy sao cho $BD = CE$. Các trung điểm M của DE nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.194) *Dự đoán.*

Trung điểm I của BC là một điểm của đường phải tìm, đường phải tìm có điểm vô tận.

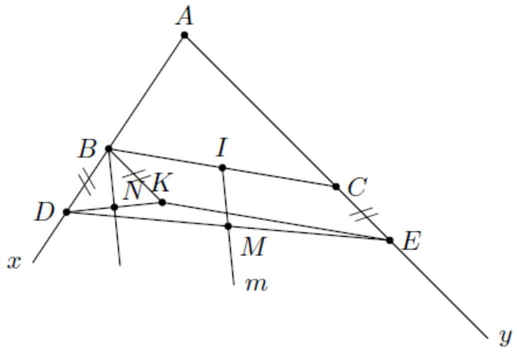
Ta dự đoán đường phải tìm là tia Im vẽ hình bình hành $ECBK$.

Gọi N là trung điểm KD.

Trước hết, ta thấy các điểm K nằm trên tia $BK//Ay$.

Tam giác BDK cân tại B, có BN là trung tuyến nên BN là tia phân giác của góc KBx.

Điểm N nằm trên tia phân giác của góc KBx nên điểm M nằm trên tia $\text{Im}//BN$.



Hình 194

🗁 **Bài 13.**

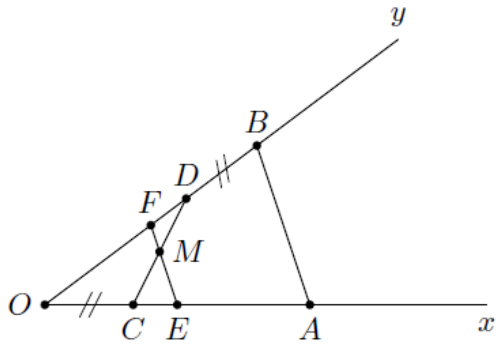
❶ Cho góc xOy khác góc bẹt. Điểm C chuyển động trên Ox, điểm D chuyển động trên Oy sao cho $OC + OD = a$. Các trung điểm M của CD nằm trên đường nào?

❷ Cũng hỏi như câu a), trong đó thay $OC + OD = a$ bởi $OC - OD = a$.

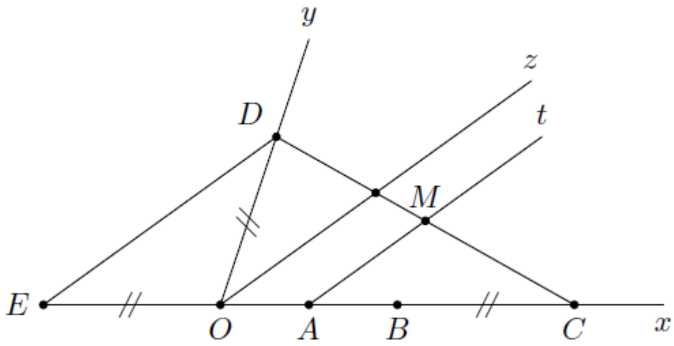
✍ **LỜI GIẢI.**

❶ (h.195) Khi D trùng với O thì C trùng A ($OA = a$), khi đó M trùng với E, trung điểm của OA. Khi C trùng với O thì D trùng $B(OB = a)$, khi đó M trùng với F, trung điểm của OB.

Như vậy ΔOAB cân cố định và $OC = BD$. Giải như bài 151, các điểm M nằm trên đoạn EF.



Hình 195



Hình 196

❷ (h.196) Khi D trùng với O thì C trùng $B(OB = a), M$ ở vị trí A, trung điểm của OB.

Khi D chạy xa vô tận trên Oy thì C chạy xa vô tận trên Ox, M cũng chạy xa vô tận.

Ta dự đoán M chạy trên một tia gốc A.

Ta có $OC - OD = a, OC - OB = a$ suy ra $OD = BC$.

Trên tia đối của tia Ox lấy điểm E sao cho A là trung điểm của CE thì AM là đường trung bình của ΔCDE, do đó $AM // DE$.

Chú ý rằng ΔODE cân tại O nên nếu vẽ Oz là tia phân giác của góc xOy thì $DE//Oz$, do đó $AM // Oz$

Các điểm M nằm trên tia At song song với tia phân giác của góc xOy, (A thuộc $Ox, OA = \frac{a}{2}$)

🗁 Bài 14.

Cho tam giác ABC cố định $(AB < AC)$. Hai điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các cạnh BA, CA sao cho $BD + CE = a < AB$. Các trung điểm M của DE nằm trên đường nào?

✍ LỜI GIẢI.

(h.197) Khi E trùng C thì D trùng $G(BG = a)$, M ở vị trí I, trung điểm của CG.

Khi D trùng B thì E trùng $H(CH = a)$, M ở vị trí K, trung điểm của BH.

Ta sẽ chứng minh rằng K, M, I thẳng hàng.

Thật vậy, gọi O là trung điểm của BC, N là trung điểm của CD.

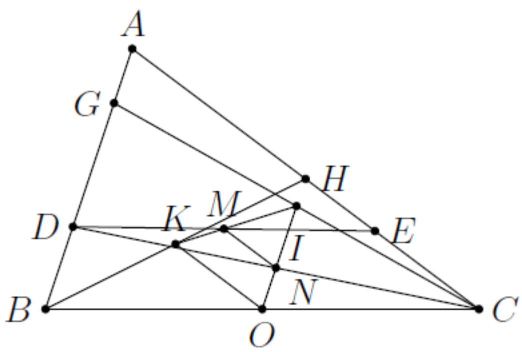
Ta có O, N, I thẳng hàng.

Ta có $2OK = CH, 2OI = BG, CH = BG = a$ nên ΔIOK cân.

Ta có $2NM = CE, 2NI = DG, CE = DG$ nên ΔINM cân.

Các tam giác cân IOK, INM có góc ở đỉnh bằng nhau nên $\widehat{NIM} = \widehat{OIK}$, do đó I, M, K thẳng hàng.

Các điểm M nằm trên đoạn thẳng KI.



Hình 197

🗁 **Bài 15.**

Cho hai đoạn thẳng AB và CD cố định có độ dài bằng nhau. Các điểm M sao cho các tam giác MAB và MCD có diện tích bằng nhau nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

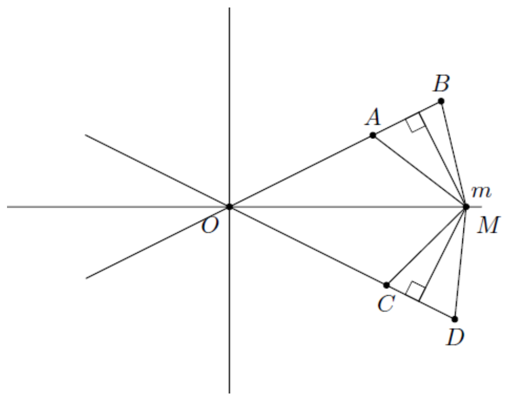
Xét ba trường hợp:

❶ Các đường thẳng AB và CD cắt nhau ở O (h. 198)

Các điểm M nằm trên hai đường thẳng chứa các tia phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng, trừ giao điểm O của chúng.

❷ $AB//CD$

Các điểm M nằm trên đường thẳng song song cách đều AB và CD.



Hình 198

3. AB, CD thuộc cùng một đường thẳng a.

Các điểm M nằm trên toàn mặt phẳng, trừ đường thẳng a.

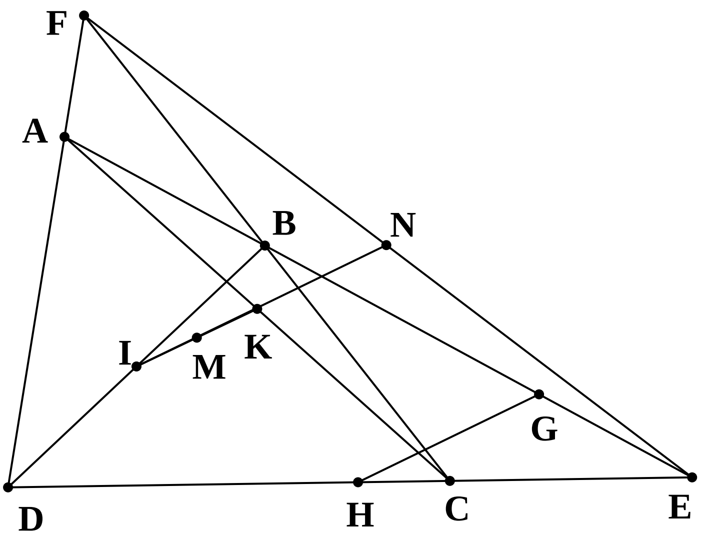
🗁 **Bài 16**: Cho tứ giác $ABCD$, E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC, I và K theo thứ tự là trung điểm của BD và AC .

1. Các điểm M thuộc miền trong của tứ giác và có tính chất:

$S_{\Delta MAB} + S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ nằm trên đường nào?

2. Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng các điểm I, K, N thẳng hàng.

✍ **Lời giải**



Hình 199

1. Các điểm I, K thuộc đường phải tìm vì: $S_{\Delta IAB} + S_{\Delta ICD} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABD} + \frac{1}{2}S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ cũng vậy đối với K.

Ta sẽ chứng minh rằng M thuộc đoạn thẳng IK. “Dồn” các đoạn thẳng AB, CD về E. Trên tia EA lấy $EG = AB$, trên tia ED lấy $EH = CD$.

Ta có:

$$S_{\Delta IHG} + S_{\Delta EHG} = S_{IHEG} = S_{\Delta IHE} + S_{\Delta IGE} = S_{\Delta ICD} + S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (1)$$

$$S_{\Delta KHG} + S_{\Delta EHG} = S_{KHEG} = S_{\Delta KHE} + S_{\Delta KGE} = S_{\Delta KCD} + S_{\Delta KAB} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (2)$$

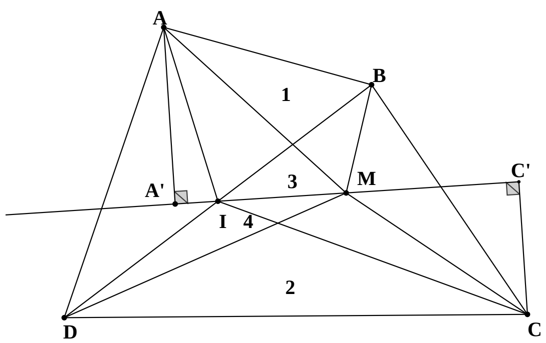
$$S_{\Delta MHG} + S_{\Delta EHG} = S_{MHEG} = S_{\Delta MHE} + S_{\Delta MGE} = S_{\Delta MCD} + S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (3)$$

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra: $S_{\Delta IGH} = S_{\Delta KGH} = S_{\Delta MGH}$. Do đó khoảng cách từ I, K, M đến HG như nhau nên I, K, M thuộc cùng một đường thẳng song song với HG. Các điểm M nằm trên phần đường thẳng IK thuộc miền tứ giác $ABCD$.

2. Để chứng minh rằng N thẳng hàng với IK, ta sẽ chứng minh: $S_{\Delta NHG} + S_{\Delta EHG} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Thật vậy, $S_{\Delta NHG} + S_{\Delta EHG} = S_{\Delta NHE} - S_{\Delta NGE} = S_{\Delta NCD} - S_{\Delta NAB} = \frac{1}{2}\left(S_{\Delta FCD} - S_{\Delta FAB}\right) = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (4)$

Chú ý: Cách khác giải câu a) $(h.200)$



Hình 200

Ta thấy, trung điểm I của BD cũng là một điểm thuộc đường phải tìm.

Ta có: $S_{\Delta AMB} + S_{\Delta CMD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Mà $S_{\Delta AIB}+S_{\Delta CID}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

Nên $S_{\Delta AMB}+S_{\Delta CMD}=S_{\Delta AIB}+S_{\Delta CID}$

Trừ đi S_1+S_2, ta được: $S_{\Delta PBM}+S_{\Delta CQM}=S_{\Delta API}+S_{\Delta DQI}$

(P là giao điểm của AM và BD, Q là giao điểm của DM và CI).

Cộng thêm S_3+S_4, ta được: $S_{\Delta BIM}+S_{\Delta CIM}=S_{\Delta AIM}+S_{\Delta DIM}$

Ta lại có: $S_{\Delta BIM}=S_{\Delta DIM}$ nên $S_{\Delta CIM}=S_{\Delta AIM}$. Suy ra đường cao CC' bằng đường cao AA'.

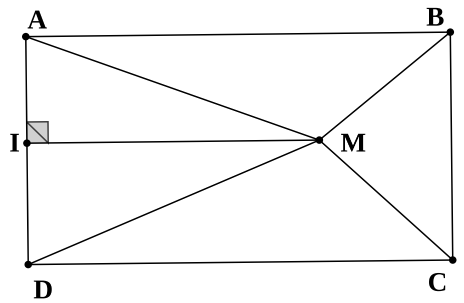
Như vậy, $AA'CC'$ là hình bình hành. Do đó $A'C'$ đi qua trung điểm của AC, tức là IM đi qua trung điểm của AC.

Vậy M nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm của hai đường chéo tứ giác $ABCD$ (phần thuộc miền tứ giác).

🗁 **Bài 17** : Cho hình chữ nhật $ABCD$ cố định. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a/ $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ b/ $MA+MC=MB+MD$.

Lời giải



Hình 201

1. Đẳng thức: $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ (1) luôn luôn đúng. Tập hợp phải tìm là toàn mặt phẳng,

2. $MA+MC=MB+MD$ (2)

$\Rightarrow (MA+MC)^2=(MB+MD)^2$

$\Rightarrow MA^2+MC^2+2.MA.MC=MB^2+MD^2+2.MB.MD$

$\Rightarrow 2.MA.MC=2.MB.MD$

$\Rightarrow MA.MC=MB.MD$ (3)

Từ (1), (3) suy ra: $\left(MA-MC\right)^2=\left(MB-MD\right)^2$

Do đó: $MA-MC=MB-MD \qquad (4)$

Hoặc: $MA-MC=MD-MB \qquad (5)$

Từ (4) và (2) suy ra: $MA=MB$, do đó M thuộc đường trung trực của AB.

Từ (5) và (2) suy ra: $MA=MD$, do đó M thuộc đường trung trực của AD.

Vậy tập hợp các điểm M phải tìm là hai trục đối xứng của hình chữ nhật.

Bài 2

SỬ DỤNG CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH ĐỂ THIẾT LẬP QUAN HỆ VỀ ĐỘ DÀI CỦA CÁC ĐOẠN THẲNG

1 Tóm tắt lý thuyết

Các công thức diện tích cho ta các quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng, chúng rất có ích để giải nhiều bài toán.

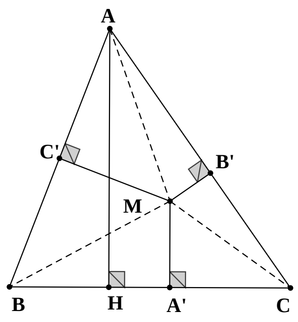
2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC.

1. Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc miền trong của tam giác ABC thì tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác bằng chiều cao của tam giác.

Lời giải

Gọi a và h lần lượt là cạnh và chiều cao của tam giác ABC, MA', MB', MC' là các khoảng cách từ M đến BC, AC, AB.



1. Nếu M thuộc miền trong tam giác thì: $S_{MBC}+S_{MAC}+S_{MAB}=S_{ABC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}BC.MA'+\frac{1}{2}AC.MB'+\frac{1}{2}AB.MC'=\frac{1}{2}BC.AH$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}\left(MA' + MB' + MC'\right) = \frac{a}{2}.h$$

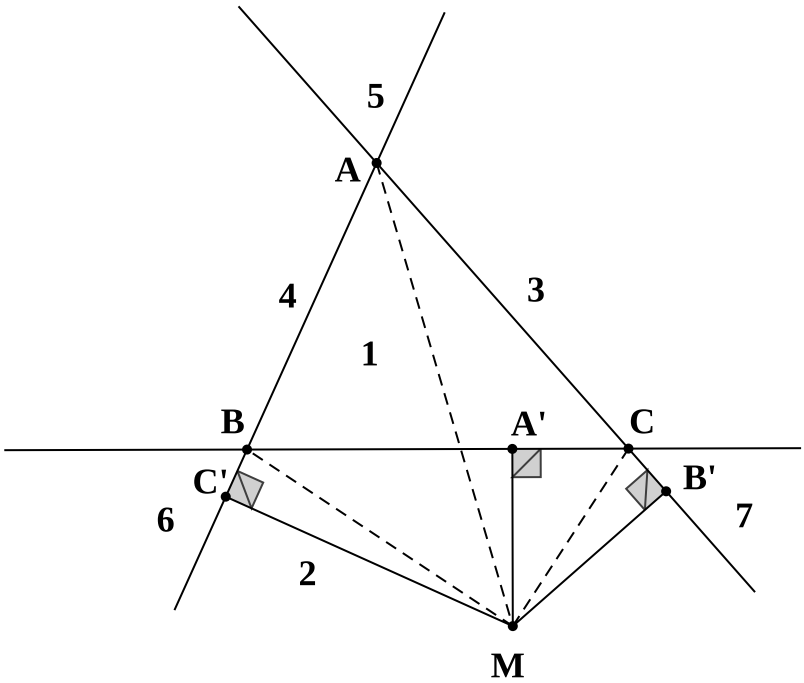
$$\Rightarrow MA' + MB' + MC' = h$$

2. Nếu M thuộc miền ngoài tam giác ABC và thuộc miền trong góc A (miền 2) thì:

$$S_{MAC} + S_{MAB} - S_{MBC} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}.MB' + \frac{a}{2}.MC' - \frac{a}{2}.MA' = \frac{a}{2}.h$$

$$\Rightarrow MB' + MC' - MA' = h$$



Tương tự:

- Nếu M thuộc miền ngoài tam giác ABC và thuộc miền trong góc B (miền 3) thì: $MA' + MC' - MB' = h$.

- Nếu M thuộc miền ngoài tam giác ABC và thuộc miền trong góc C (miền 4) thì: $MA' + MB' - MC' = h$.

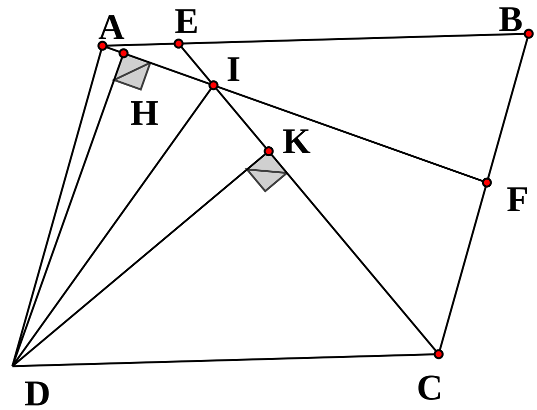
- Nếu M thuộc miền trong góc đối đỉnh với góc A (miền 5) thì: $MA' - MB' - MC' = h$

- Nếu M thuộc miền trong góc đối đỉnh với góc B (miền 6) thì: $MB' - MA' - MC' = h$

- Nếu M thuộc miền trong góc đối đỉnh với góc C (miền 7) thì: $MC' - MA' - MB' = h$

Ví dụ 2. Các điểm E, F nằm trên các cạnh AB, BC của hình bình hành $ABCD$ sao cho $AF = CE$. Gọi I là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng ID là tia phân giác của $\widehat{AIC}$.

Lời giải



Kẻ $DH \perp IA$ tại H, $DK \perp IC$ tại K

Ta có: $S_{AFD} = S_{CED} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}DH.AF = \frac{1}{2}DK.CE$

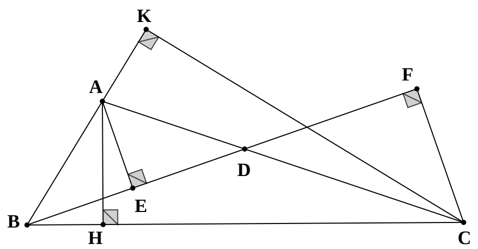
$\Rightarrow DH = DK\left(doAF = CE\right)$.

$\Rightarrow$ d thuộc tia phân giác của $\widehat{AIC}$.

Vậy ID là tia phân giác của $\widehat{AIC}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} \geq 90°$, D là điểm nằm giữa A và C. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ A và từ C đến BD lớn hơn đường cao kẻ từ A và nhỏ hơn đường cao kẻ từ C của tam giác ABC.

Lời giải



Gọi AH, CK là các đường cao của tam giác ABC.

Kẻ AE và CF vuông góc với BD.

Đặt $S_{ABC} = S$.

Ta có: $AE = \dfrac{2S_{ABD}}{BD}, CF = \dfrac{2S_{CBD}}{BD}$

Nên $AE + CF = \dfrac{2S}{BD}$

Ta lại có: $AH = \dfrac{2S}{BC}, CK = \dfrac{2S}{AB}$.

Do $\widehat{A} \geq 90^\circ$ nên $AB < BD < BC$, do đó: $AH < AE + CF < CK$.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1: Có tam giác nào mà độ dài ba đường cao bằng 3 cm, 4 cm, 7 cm không?

Lời giải

Giả sử tồn tại tam giác có độ dài ba cạnh lần lượt là a, b, c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó, ta có $3a = 4b = 7c$ (cùng bằng hai lần diện tích tam giác).

Ta có: $3a = 4b = 7c \Leftrightarrow \dfrac{a}{\frac{1}{3}} = \dfrac{b}{\frac{1}{4}} = \dfrac{c}{\frac{1}{7}} = \dfrac{a+b+c}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}} = \dfrac{84P}{61}$

Suy ra: $a = \dfrac{28P}{61}, b = \dfrac{21P}{61}, c = \dfrac{12P}{61}$.

Do đó, ta có $a + b > c, b + c > a, c + a > b$ hay a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Vậy tồn tại tam giác mà độ dài ba đường cao bằng 3 cm, 4 cm, 7 cm.

Bài 2: Độ dài hai cạnh của một tam giác bằng 6cm và 4cm, nửa tổng các chiều cao ứng với hai cạnh ấy bằng chiều cao ứng với cạnh thứ ba. Tính độ dài cạnh thứ ba.

Lời giải

Giả sử tam giác có độ dài ba cạnh lần lượt là $a, b = 6cm, c = 4cm$ và h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài ba đường cao tương ứng của tam giác. Khi đó, ta có:

$$ah_a = bh_b = ch_c \Rightarrow \frac{a\left(h_b + h_c\right)}{2} = 6h_b = 4h_c \Rightarrow \frac{h_b + h_c}{\frac{2}{a}} = \frac{h_b}{\frac{1}{6}} = \frac{h_c}{\frac{1}{4}}.$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} \Rightarrow a = 4,8cm$

Vậy độ dài cạnh thứ ba của tam giác bằng 4,8cm.

🗁 **Bài 3:** Chứng minh rằng một tam giác là tam giác vuông nếu các chiều cao h_a, h_b, h_c của nó thỏa mãn điều kiện: $\left(\frac{h_a}{h_b}\right)^2+\left(\frac{h_a}{h_c}\right)^2=1.$

Lời giải

Gọi S là diện tích của tam giác, ta có:

$$\left(\frac{h_a}{h_b}\right)^2+\left(\frac{h_a}{h_c}\right)^2=1 \Rightarrow \left(\frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{b}}\right)^2+\left(\frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{c}}\right)^2=1 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=1 \Rightarrow b^2+c^2=a^2.$$

Suy ra tam giác đã cho là tam giác vuông.

🗁 **Bài 4:** Tính các cạnh của một tam giác có ba đường cao bằng 12 cm, 15 cm và 20 cm.

Lời giải

Giả sử tam giác ABC có độ dài ba đường cao là $h_a=12cm, h_b=15cm, h_c=20cm$ tương ứng với ba cạnh a,b,c. Khi đó, ta có :

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=\left(\frac{h_a}{h_b}\right)^2+\left(\frac{h_a}{h_c}\right)^2=\left(\frac{12}{15}\right)^2+\left(\frac{12}{20}\right)^2=1.$$

$\Rightarrow b^2+c^2=1$

$\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại A.

Do đó, ta có: $AB=15cm, AC=20cm, BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{15^2+20^2}=25cm.$

🗁 **Bài 5:** Gọi h_a, h_b, h_c là ba đường cao của một tam giác, chứng minh rằng $\frac{1}{h_a}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$

Lời giải

Gọi a,b,c là ba cạnh tương ứng với các đường cao h_a, h_b, h_c và S là diện tích tam giác.

Ta có: $a<b+c \Rightarrow \frac{2S}{h_a}<\frac{2S}{h_b}+\frac{2S}{h_c} \Rightarrow \frac{1}{h_a}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$

🗁 **Bài 6:** Tam giác ABC có độ dài các cạnh là a,b,c các chiều cao tương ứng là h_a, h_b, h_c.

Biết rằng $a+h_a=b+h_b=c+h_c$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải

Xét $a+h_a=b+h_b$, ta có: $a-b=h_b-h_a=\frac{2S}{b}-\frac{2S}{a}=2S.\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=2S.\frac{a-b}{ab}$

$\Rightarrow (a-b)\left(1-\frac{2S}{ab}\right)=0$

$\Rightarrow a=b$ hoặc $S=\frac{1}{2}ab$.

Suy ra tam giác ABC cân tại C hoặc vuông tại C. (1)

Tương tự, tam giác ABC cân tại B hoặc vuông tại B. (2)

tam giác ABC cân tại A hoặc vuông tại A. (3)

Xảy ra cả $(1),(2)$ và (3) khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 7: Cho điểm O thuộc miền trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác ABC theo thứ tự ở A', B', C'. Chứng minh rằng :

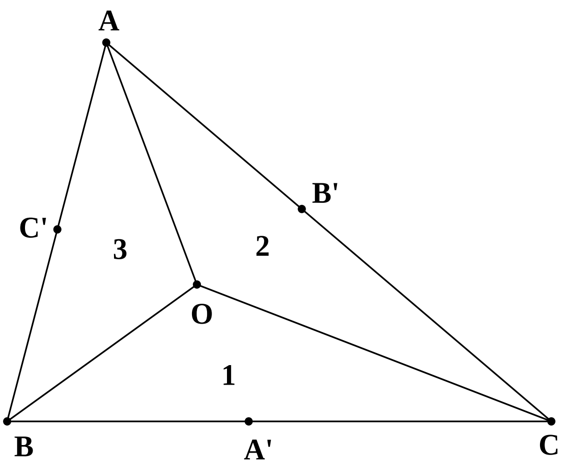
1. $\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1$;

2. $\frac{OA}{AA'}+\frac{OB}{BB'}+\frac{OC}{CC'}=2$ (bài toán của Giec-gôn, nhà Toán học Pháp) ;

3. $M=\frac{OA}{OA'}+\frac{OB}{OB'}+\frac{OC}{OC'}\geq 6.$ Tìm vị trí của O để tổng M có giá trị nhỏ nhất ;

4. $N=\frac{OA}{OA'}.\frac{OB}{OB'}.\frac{OC}{OC'}\geq 8.$ Tìm vị trí của O để tích N có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



Gọi S là diện tích tam giác ABC, kí hiệu S_1, S_2, S_3 như hình vẽ.

Ta có: $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{S_2}{S_{OA'C}} = \dfrac{S_3}{S_{OA'B}} = \dfrac{S_2 + S_3}{S_1}$, $\quad (1)$

$\dfrac{OA'}{AA'} = \dfrac{S_{OA'C}}{S_{AA'C}} = \dfrac{S_{OA'B}}{S_{AA'B}} = \dfrac{S_{OA'C} + S_{OA'B}}{S_{AA'C} + S_{AA'B}} = \dfrac{S_1}{S}$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{OA'}{AA'} = \dfrac{S_2 + S_3}{S}$.

1. Ta có: $\dfrac{OA'}{AA'} + \dfrac{OB'}{BB'} + \dfrac{OC'}{CC'} = \dfrac{S_1}{S} + \dfrac{S_2}{S} + \dfrac{S_3}{S} = 1$.

2. $\dfrac{OA}{AA'} + \dfrac{OB}{BB'} + \dfrac{OC}{CC'} = \dfrac{S_2 + S_3}{S} + \dfrac{S_3 + S_1}{S} + \dfrac{S_1 + S_2}{S} = 2$.

3. Ta có: $M = \dfrac{OA}{OA'} + \dfrac{OB}{OB'} + \dfrac{OC}{OC'}$

$$= \frac{S_2 + S_3}{S_1} + \frac{S_3 + S_1}{S_2} + \frac{S_1 + S_2}{S_3}$$

$$= \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) + \left(\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2}\right) + \left(\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1}{S_3}\right)$$

$$\geq 2 + 2 + 2 = 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O là trọng tâm của tam giác ABC.

4. Ta có: $N = \dfrac{OA}{OA'} . \dfrac{OB}{OB'} . \dfrac{OC}{OC'}$

$$= \frac{(S_2 + S_3)(S_3 + S_1)(S_1 + S_2)}{S_1 S_2 S_3}$$

$$\Rightarrow N^2 = \frac{(S_2 + S_3)^2 (S_3 + S_1)^2 (S_1 + S_2)^2}{(S_1 S_2 S_3)^2}$$

$$\geq \frac{4S_2S_3 . 4S_1S_3 . 4S_1S_2}{(S_1S_2S_3)^2} = 64$$

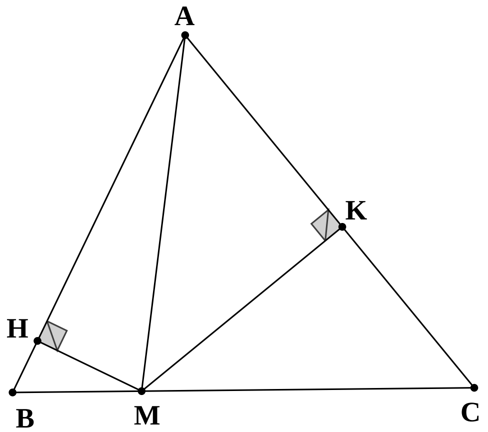
Suy ra: $N \geq 8$.

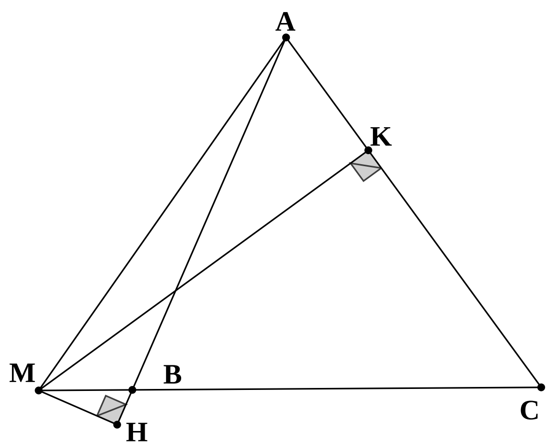
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O là trọng tâm của tam giác ABC.

🗁 **Bài 8:** 1. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ điểm M nằm trên đáy một tam giác cân đến hai cạnh bên không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cạnh đáy.

2. Kết quả trên có gì thay đổi nếu điểm M thuộc đường thẳng chứa cạnh đáy nhưng không phụ thuộc cạnh đáy ?

Lời giải





Gọi a là độ dài cạnh bên và h là độ dài đường cao ứng với cạnh bên của tam giác ABC cân tại A,

Kẻ: $MH \perp AB$ tại H, $MK \perp AC$ tại K.

1. Khi M nằm trong đoạn BC, ta có:

$$S_{AMB} + S_{AMC} = S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}a.MH + \frac{1}{2}a.MK = \frac{1}{2}a.h \Leftrightarrow MH + MK = h.$$

Vậy tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên luôn bằng chiều cao ứng với cạnh bên.

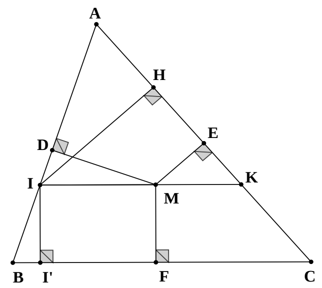
2. Khi M nằm ngoài đoạn BC, ta có:

$$S_{AMC} - S_{AMB} = S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}a.MK - \frac{1}{2}a.MH = \frac{1}{2}a.h \Leftrightarrow MK - MH = h.$$

Vậy hiệu các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên luôn bằng chiều cao ứng với cạnh bên.

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A. Tìm tập hợp các điểm M thuộc miền trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác, sao cho khoảng cách từ điểm M đến BC bằng tổng các khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh kia.

Lời giải



Gọi MD, ME, MF là khoảng cách từ điểm M đến AB, AC, BC.

Theo đề bài, ta có :

$$MD + ME = MF \qquad (1)$$

Qua M vẽ $IK \,//\, BC$. Vẽ $IH \perp AC, II' \perp BC.$

Ta có : $MD + ME = IH \qquad (2)$

$$MF = II' \qquad (3)$$

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra : $IH = II'$

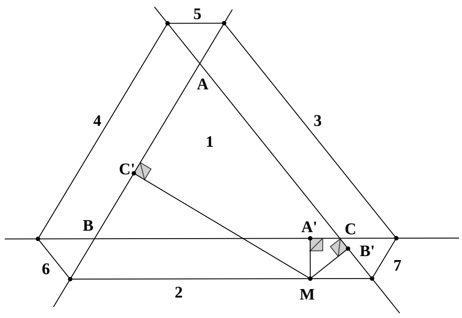
$\Rightarrow$ CI là đường phân giác của tam giác ABC.

Tương tự đối với BK .

Vậy tập hợp các điểm M là đoạn thẳng IK nối chân hai đường phân giác BK, CI.

🗁 **Bài 10:** Cho tam giác đều ABC cố định có chiều cao h . Tìm tập hợp các điểm M có tổng các khoảng cách đến ba cạnh của tam giác bằng độ dài m không đổi $(m > h)$.

✍ Lời giải



Xét điểm M thuộc từng miền như ở ví dụ 1, tập hợp phải tìm là các cạnh của một lục giác (như hình vẽ).

Chẳng hạn với M thuộc miền 2, kẻ $MA' \perp BC, MB' \perp AB, MC' \perp AC,$ ta có :

$$MA' + MB' + MC' = m$$

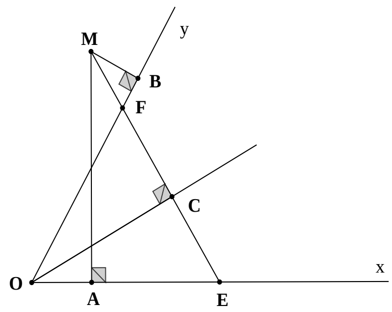
$$\Rightarrow MB' + MC' - MA' + 2MA' = m$$

$$\Rightarrow h + 2MA' = m\left(do MB' + MC' - MA' = h\right)$$

$\Rightarrow MA' = \dfrac{m-h}{2}.$

🗁 **Bài 11:** C là một điểm thuộc tia phân giác của $\widehat{xOy}$ có số đo bằng 60^0, M là điểm bất kỳ nằm trên đường vuông góc với OC tại C và C thuộc miền ngoài của $\widehat{xOy}$. Gọi MA, MB theo thứ tự là khoảng cách từ M đến Ox, Oy. Tính độ dài OD theo MA, MB.

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MC vớicác tia Ox, Oy (hình vẽ).

Khi đó, tam giác OEF đều.

Gọi a là độ dài các cạnh của tam giác OEF.

Ta có: $S_{OEF} = S_{OME} - S_{OMF}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}a.OC = \dfrac{1}{2}a.MA - \dfrac{1}{2}a.MB$

$\Rightarrow OC = MA - MB$

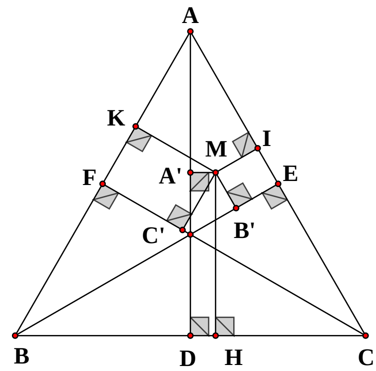
Vậy: $OC = |MA - MB|$

🗁 **Bài 12:** Cho tam giác đều ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi A', B', C' là hình chiếu của điểm M (nằm bên trong tam giác ABC) trên AD, BE, CF. Chứng minh rằng khi điểm M thay đổi vị trí trong tam giác ABC thì:

a/ Tổng $A'D + B'E + C'F$ không đổi

b/ Tổng $AA' + BB' + CC'$ không đổi.

Lời giải



1. Kẻ $MH \perp BC, MI \perp AC, MK \perp AB.$ Khi đó, ta có :
$MH = A'D, MI = B'E, MK = C'F.$

Gọi h là độ dài đường cao của tam giác đều ABC. Theo ví dụ 1, ta có :

$MH + MI + MK = h$

$\Rightarrow A'D + B'E + C'F = h$

Vậy tổng $A'D + B'E + C'F$ không đổi.

2. Theo kết quả câu a, ta có:

$$AA' + BB' + CC' = AD - A'D + BE - B'E + CF - C'F$$

$$= (AD + BE + CF) - (A'D + B'E + C'F)$$

$$= 3h - h = 2h.$$

Vậy tổng $A'D + B'E + C'F$ không đổi.

Bài 13: Cho tam giác đều ABC, A', B', C' theo thứ tự là hình chiếu của điểm M (nằm bên trong tam giác ABC) trên BC, AC, AB. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với BC tại C, vuông góc với CA tại A cắt nhau ở D, E, F. Chứng minh rằng:

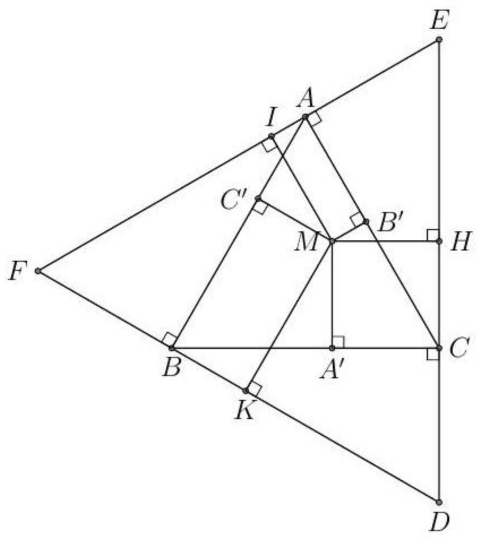
1. Tam giác DEF là tam giác đều;

2. Tổng $AA' + BC' + CA'$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trong tam giác ABC.

Lời giải

(1) Ta có

Ta có



$\widehat{FAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 180°$

$=> \widehat{FAB} + 60° + 90° = 180$

$\Rightarrow \widehat{FAB} = 30°$

$\Rightarrow \widehat{AFB} = 60°$

Tương tự, ta có $\widehat{AEC} = \widehat{CDB} = 60°$.

$\Rightarrow$ Tam giác DEF là tam giác đều.

(2) Kẻ $MH \perp DE, MI \perp EF, MK \perp FD$. Khi đó, ta có $MH = CA', MI = AB', MK = BC'$

Gọi h là độ dài đường cao của tam giác đều DEF.

Theo ví dụ 1, ta có

$$MH + MI + MK = h$$
$$\Rightarrow AB' + BC' + CA' = h$$

Vậy tổng $AB' + BC' + CA'$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trong tam giác ABC.

Chương 4 TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Bài 1 ĐỊNH LÍ TA LÉT

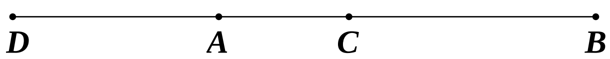
1 Tóm tắt lý thuyết

Chương III bắt đầu bằng việc nghiên cứu tỉ số của hai đoan thẳng, đó là tỉ số các độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

Cho đoạn thẳng AB và một tỉ số $\frac{m}{n} > 0$, tồn tại duy nhất một điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$. Điểm C gọi là điểm chia trong đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{m}{n}$ (khi đó điểm C chia đoạn thẳng BA theo tỉ số $\frac{n}{m}$).

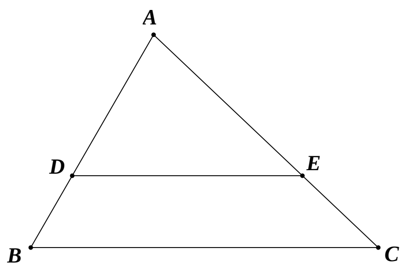
Cho đoạn thẳng AB và một tỉ số $\frac{m}{n}, \left(\frac{m}{n} > 0, \frac{m}{n} \neq 1\right)$, tồn tại duy nhất một điểm D thuộc đường thẳng AB nhưng nằm ngoài đoạn thẳng AB sao cho $\frac{DA}{DB} = \frac{m}{n}$. Điểm D gọi là điểm chia ngoài đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{m}{n}$ (khi đó điểm D chia ngoài đoạn thẳng BA theo tỉ số $\frac{n}{m}$).

Trên hình 1 , điểm C chia trong đoạn thẳng AB theo tỉ số $1:2$, điểm D chia ngoài AB theo tỉ số $1:2$.



Nếu $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ thì ta có các cặp đoan thẳng tỉ lệ: cặp đoạn thẳng AB và CD tỉ lệ với cặp đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$.

Dịnh lí Ta-lét cho ta các cặp đoan thẳng tỉ lệ: Đường thẳng song song với một cạnh của tam giác thì định ra trên hai đường thẳng chứa hai cạnh kia các cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ (do đó tạo với các đường thẳng chứa hai cạnh kia một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác ban đầu).



$$DE \,//\, BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

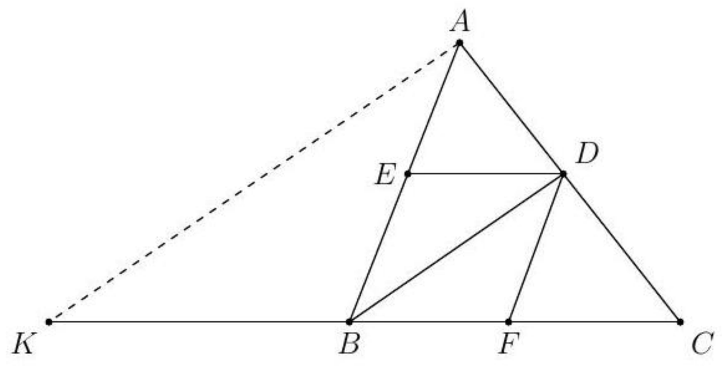
2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình thoi $BEDF$ nội tiếp tam giác $ABC(E$ thuộc AB, D thuộc AC, F thuộc $BC)$

1 Tính cạnh hình thoi biết $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm. Tổng quát với $AB = c, BC = a$.

2. Chứng minh rằng $BD < \frac{2ac}{a+c}$ với $AB = c, BC = a$.

Lời giải



1. Gọi cạnh hình thoi là x. Áp dụng định lí Ta-lét vào ΔABC với $ED \,//\, BC$, ta có:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{4-x}{4} \Rightarrow x = 2,4 \text{ cm}$$

Tổng quát, $x = \frac{ac}{a+c}$.

2. Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $BK = BA$. Ta có ΔABK cân, từ đó $BD \,//\, KA$. Áp dụng định lí Ta-lét vào ΔCAK với $BD \,//\, KA$ ta có:

$$\frac{BD}{AK} = \frac{CB}{CK} \Rightarrow \frac{BD}{AK} = \frac{a}{a+c} \;\; (1)$$

Trong ΔABK, ta có:

$$AK < AB + BK = c + c = 2c \;\; (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$BD < \frac{a}{a+c} \cdot 2c = \frac{2ac}{a+c}$$

3. Áp dụng định lí Ta-lét vào ΔABC với $ED \,//\, BC$ ta có:

$$\frac{ED}{BC}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow\frac{d}{BC}=\frac{m}{m+n}\Rightarrow BC=\frac{d(m+n)}{m}.$$

Tương tự $AB=\frac{d(m+n)}{n}$.

Chú ý: Từ kết quả của câu b, ta có:

$$\frac{1}{BD}>\frac{a+c}{2ac}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$$

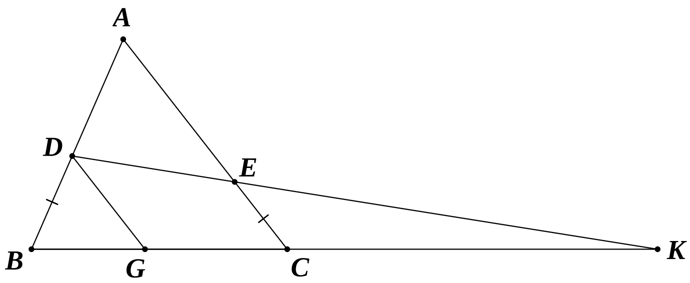
Do đó, nếu goi AM, CN là các đường phân giác của ΔABC và $AC=b$ thì

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{BD}+\frac{1}{CN}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác $ABC(AC>AB)$. Lấy các điểm D,E tùy ý theo thứ tự nằm trên các cạnh AB,AC sao cho $BD=CE.$ Gọi K là giao điểm của các đường thẳng DE,BC. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{KE}{KD}$ không phụ thuộc vào cách chọn các điểm D và E.

Lời giải

Cách 1: Để làm xuất hiện một tỉ số bằng $\frac{KE}{KD}$, ta vẽ qua D đường thẳng $DG\,//\,AC$. Theo định lí Ta-lét, ta có:



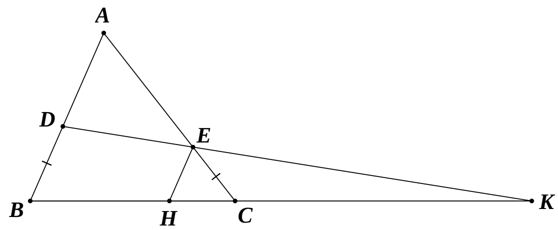
$$\frac{KE}{KD}=\frac{KC}{KG},\frac{KE}{KD}=\frac{EC}{DG}.$$

Trong hai tỉ số trên, ta chú ý đến tỉ số sau, vì độ dài EC được nêu trong giả thiết $(EC=BD)$.

Ta thay $\frac{EC}{DG}$ bằng $\frac{BD}{DG}$ và tỉ số này bằng $\frac{BA}{AC}$ (vì $DG\,//\,AC$)

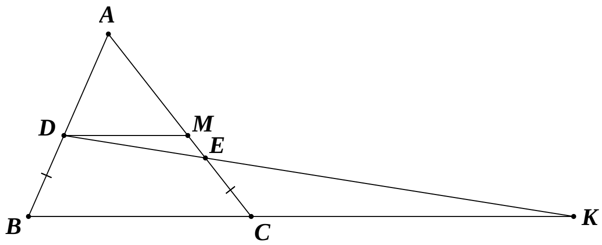
Cách 2:

Vẽ $EH\,//\,AB$ ta có:



$$\frac{KE}{KD}=\frac{EH}{BD}=\frac{EH}{EC}=\frac{AB}{AC}.$$

Cách 3: Vẽ $DM \,//\, BC$. Ta có:



$$\frac{KE}{KD} = \frac{CE}{CM} = \frac{BD}{CM} = \frac{AD}{AM} = \frac{AB}{AC}$$

Nhận xét: Trong các bài tập vận dụng định lí Ta-lét, nhiều khi ta cần vẽ thêm một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

Đây là một cách vẽ được phụ hay dùng, vì nhờ đó mà tạo thêm được các cặp đoạn thẳng tỉ lệ.

.

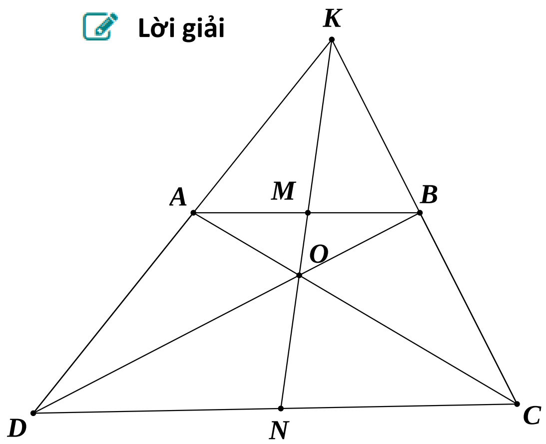
Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \,//\, CD, AB < CD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, K là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng KO cắt AB, CD theo thứ tự ở M, N Chứng minh rằng:

a) $\frac{MA}{ND} = \frac{MB}{NC}$

b) $\frac{MA}{NC} = \frac{MB}{ND}$

c) $MA = MB; NC = ND$

Lời giải



1. Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác KDN, KNC với $AB \,//\, CD$, ta có:

$$\frac{MA}{ND} = \frac{KM}{KN}, \frac{MB}{NC} = \frac{KM}{KN}, \text{ suy ra } \frac{MA}{ND} = \frac{MB}{NC} \quad (1)$$

2. Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác ONC, OND với $AB \,//\, CD$, ta có:

$$\frac{MA}{NC} = \frac{OM}{ON}, \frac{MB}{ND} = \frac{OM}{ON}, \text{ suy ra } \frac{MA}{NC} = \frac{MB}{ND} \quad (2)$$

3. Nhân từng vế (1) với (2) ta được:

$$\frac{MA^2}{ND \cdot NC} = \frac{MB^2}{NC \cdot ND}, \text{ suy ra } MA^2 = MB^2 \text{ tức là } MA = MB$$

Từ đó $NC = ND$.

Nhận xét: Từ ví dụ trên, ta suy ra:

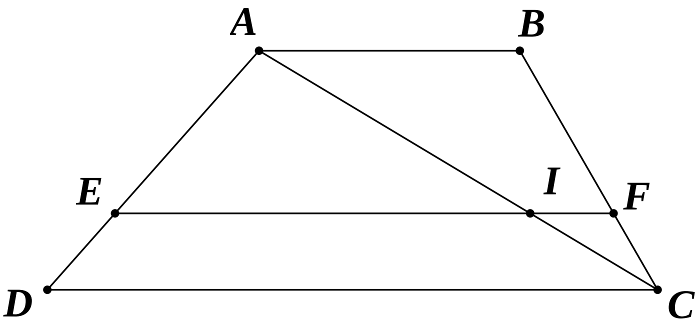
Trong hình thang có hai cạnh đáy không bằng nhau, đường thẳng đi qua giao điểm của các đường chéo và đi qua giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên thì đi qua trung điểm của hai cạnh đáy.

Tính chất này có nhiều ứng dụng quan trọng, được gọi là bổ đề hình thang.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Trong hình thang $ABCD\left(AB // CD\right)$ có $AB = 28$ cm, $CD = 70$ cm, $AD = 35$ cm, vẽ một đường thẳng song song với hai cạnh đáy, cắt AD, BC theo thứ tự ở E và F. Tính độ dài EF biết rằng $DE = 10$ cm.

Lời giải



Gọi I là giao của AC và EF. Áp dụng định lí Ta-lét cho ΔACD nên ta có:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EI}{DC} = \frac{AI}{AC} \Rightarrow \frac{25}{35} = \frac{EI}{70} \Rightarrow EI = 50$$

Vì $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{5}{7} \Rightarrow \dfrac{IC}{AC} = \dfrac{2}{7}$

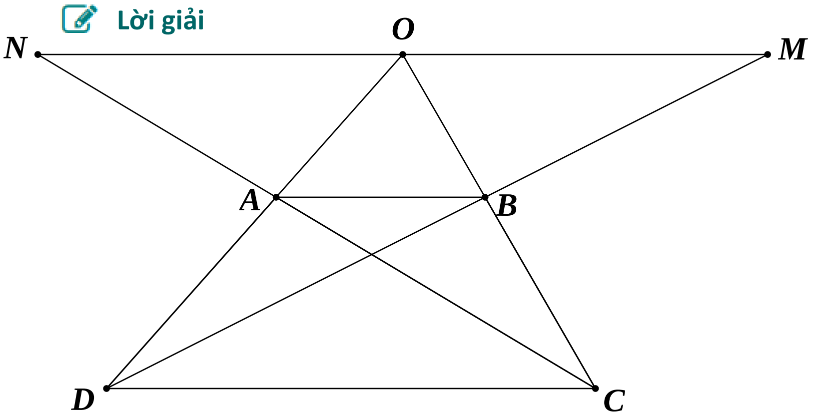
Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác ABC ta có:

$$\frac{IC}{CA} = \frac{IF}{AB} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{IF}{28} \Rightarrow IF = 8$$

Vậy $EF = 58$ cm

Bài 2. Gọi O là giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên AD, BC của hình thang $ABCD$. Đường thẳng đi qua O và song song với AB cắt các đường thẳng AC, BD theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng $OM = ON$

Lời giải



Vì $MN // CD$ nên ta có

$$\frac{OM}{CD} = \frac{OA}{AD}; \frac{ON}{CD} = \frac{OB}{BC} \quad (1)$$

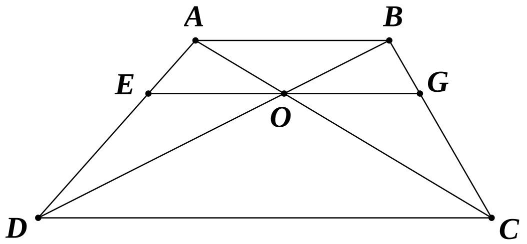
Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác OCD ta có

$$\frac{OA}{AD} = \frac{OB}{BC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OM}{CD}=\frac{ON}{CD}\Rightarrow OM=ON$

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ có các cạnh đáy $AB=a, CD=b$. Qua giao điểm O của hai đường chéo, kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AD và BC theo thứ tự ở E và G. Chứng minh rằng $\frac{1}{OE}=\frac{1}{OG}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Lời giải



Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác ACD, ta có

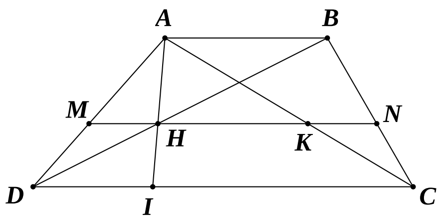
$$\frac{OE}{DC}=\frac{AO}{AC}\Rightarrow\frac{1}{OE}=\frac{AC}{AO}\cdot\frac{1}{DC}=\left(1+\frac{CO}{AO}\right)\cdot\frac{1}{DC}=\left(1+\frac{DC}{AB}\right)\cdot\frac{1}{DC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$$
$$\frac{OG}{AB}=\frac{OC}{AC}\Rightarrow\frac{1}{OG}=\frac{AC}{OC}\cdot\frac{1}{AB}=\left(1+\frac{AO}{CO}\right)\cdot\frac{1}{AB}=\left(1+\frac{AB}{DC}\right)\cdot\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$$

Vậy $\frac{1}{OE}=\frac{1}{OG}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Bài 4. Cho hình thang $ABCD\,(AB\,//\,CD)$. Một đường thẳng d song song với hai cạnh đáy cắt hai cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N và cắt hai đường chéo BD, AC theo thứ tự ở H, K

1. Chứng minh rằng $MH=KN$.
2. Hãy nêu cách dựng đường thẳng d sao cho $MH=KH=KN$.

Lời giải



1 Vì $MN\,//\,AB, MN\,//\,CD$ nên áp dụng định lý Ta-lét ta có

$$\frac{MH}{AB}=\frac{MD}{AD}=\frac{CN}{CB}=\frac{KN}{AB}$$

Suy ra $MH=KN$

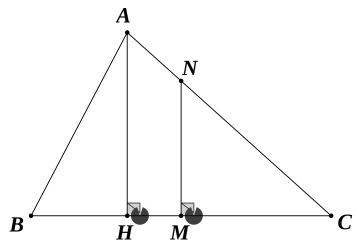
2 Gọi I là giao điểm của AH và CD. Khi đó

$$\frac{MH}{DI}=\frac{AH}{AI}=\frac{HK}{IC}$$

Suy ra $MH=HK\Leftrightarrow DI=IC$.

Vậy ta dựng đường thẳng d như sau: Lấy I là trung điểm của CD. Gọi H là giao của AI và BD. Kẻ đường thẳng d đi qua H và song song với AB ta được đường thẳng cần tìm.

Bài 5. Tam giác ABC có $AC > AB, AC = 45$ cm. Hình chiếu của AC và AB trên BC theo thứ tự là 27 cm và 15 cm. Đường trung trực của BC cắt AC ở N. Tính độ dài CN



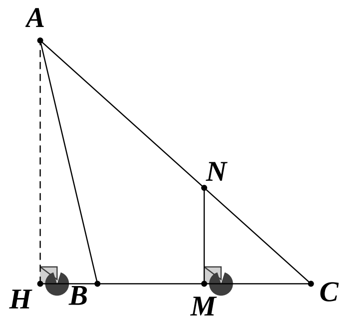
Lời giải

Gọi M là trung điểm của $BC, AH \perp BC$. Ta xét hai trường hợp sau

$-\hat{B} < 90^\circ$. Khi đó, H nằm giữa B và C nên $BC = 42$ cm, suy ra $CM = BM = 21$ cm.

Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác AHC ta có $\dfrac{CI}{CH} = \dfrac{CN}{AC} \Rightarrow CN = 35$ cm

$-\hat{B} > 90^\circ$. Khi đó, B nằm giữa H và C nên $BC = 12$ cm, suy ra $CM = BM = 6$ cm.



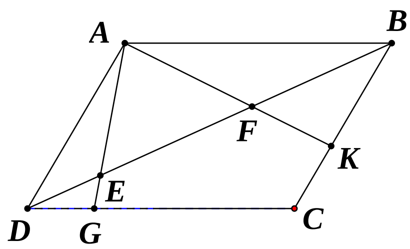
Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác AHC ta có

$$\frac{CI}{CH} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow CN = 10 \text{ cm}$$

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm G chia trong cạnh DC theo tỉ số $1:2$, điểm K chia trong cạnh BC theo tỉ số $3:2$. Tính độ dài ba đoạn thẳng do AG, AK định ra trên BD, biết rằng $BD = 16$ cm

Lời giải

Gọi E, F là giao điểm của AG, AK với BD. Ta có



$$\frac{DE}{EB} = \frac{DG}{AB} = \frac{DG}{DC} = \frac{1}{3}$$

nên $DE = \dfrac{1}{3}EB = \dfrac{1}{4} = 4$ cm

0.4

Tương tự, $BF = \dfrac{3}{8}BD = 6$ cm. Vậy $EF = 6$ cm

Vẽ đường thẳng song song trong các bài tập sau để tạo thành các cặp đoạn thẳng tỉ lệ.

Bài 7. 1) Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ, AB = 3$ cm, $AC = 6$ cm. Tính độ dài đường phân giác AD

2) Cho tam giác ABC với đường phân giác AD thỏa mãn $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$.

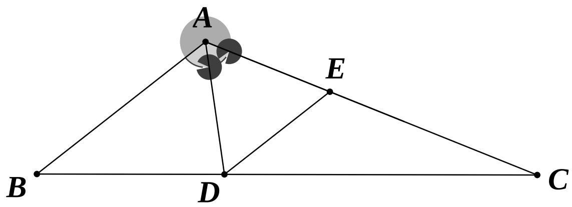
Tính số đo góc BAC.

Lời giải

1. Kẻ $DE // AB, \Delta ADE$ đều. Đặt $AD = DE = EA = x$. Ta có

$$\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{CA}\Rightarrow\frac{x}{3}=\frac{6-x}{6}$$

Từ đó $x=2$. Vậy $AD=2$ cm.



2. Kẻ $DE // AB$. Đặt $DE=EA=x$. Ta có

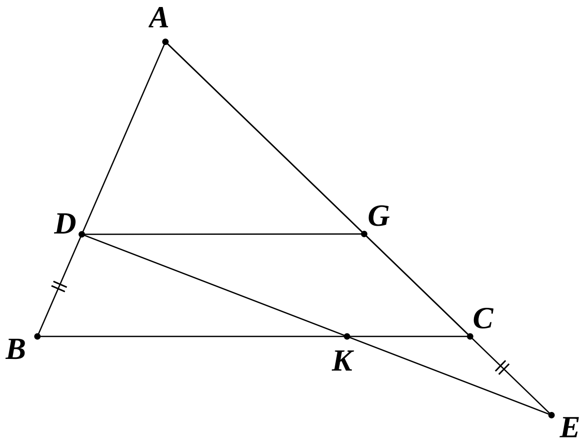
$$\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{CA}\Rightarrow\frac{x}{AB}=\frac{AC-x}{AC}=1-\frac{x}{AC}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{AB}+\frac{x}{AC}=1\Rightarrow\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{x}$$

Theo đề bài $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}$. Suy ra $AD=x, \Delta ADE$ đều, $\widehat{BAC}=120^\circ$.

🗁 **Bài 8**. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng cắt cạnh AB ở D, cắt cạnh BC ở K và cắt tia đối của tia CA ở E sao cho $BD=CE$ thì tỉ số $\frac{KE}{KD}$ không đổi.

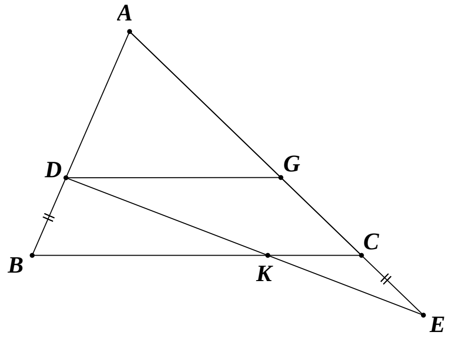
Lời giải



Kẻ $DG // BC$. Ta có $\frac{KE}{KD}=\frac{CE}{CG}=\frac{BD}{CG}=\frac{BA}{CA}$.

🗁 **Bài 9**. Cho tam giác ABC, điểm D chia trong cạnh BA theo tỉ số $1:2$, điểm E chia trong cạnh AC theo tỉ số $2:5$. Gọi F là giao điểm của các đường thẳng ED và BC. Tính tỉ số $FB:FC$.

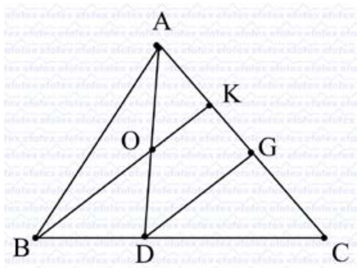
Lời giải



Kẻ $BG // DE$. Ta có $\frac{FB}{FC} = \frac{EG}{EC} = \frac{EG}{EA} \cdot \frac{EA}{EC} = \frac{DB}{DA} \cdot \frac{EA}{EC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

Bài 10. Cho tam giác ABC, điểm D chia trong cạnh BC theo tỉ số $1:2$, điểm O chia trong AD theo tỉ số $3:2$. Gọi K là giao điểm của BO và AC. Tính tỉ số $AK:KC$.

Lời giải



Kẻ $DG // BK$. Ta có $\frac{AK}{KC} = \frac{AK}{KG} \cdot \frac{KG}{KC} = \frac{AO}{OD} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là điểm bất kì trên cạnh BC. Đường thẳng đi qua I và song song với AC cắt AB ở K, đường thẳng đi qua I và song song với AB cắt AM, AC theo thứ tự ở D, E. Chứng minh rằng $DE = BK$

Lời giải

Kẻ $MG // IE$. Ta có $\frac{BK}{KI} = \frac{BA}{AC}; \frac{DE}{AE} = \frac{MG}{AG} = \frac{MG}{GC} = \frac{BA}{AC}$

Suy ra $\frac{BK}{KI} = \frac{DE}{AE}$, mà $KI = AE$ nên $BK = DE$.

🗁 **Bài 12.** Tứ giác $ABCD$ có E, F theo thức tự là trung điểm của CD, CB, O là giao điểm của AE và $DF; OA = 4OE, OD = \frac{2}{3}OF$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình bình hành.

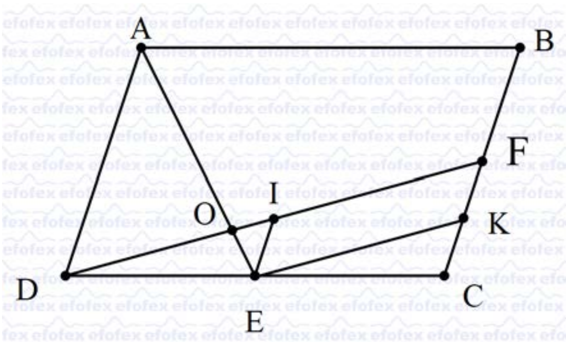
Lời giải

Kẻ $EI \,//\, DA$ cắt DF, lấy K là trung điểm của CF. Đặt $OD = 2a, OF = 3a$.

Ta tính được $OI = 0.5a$; $IF = 2.5a$; $EK = 2.5a$.

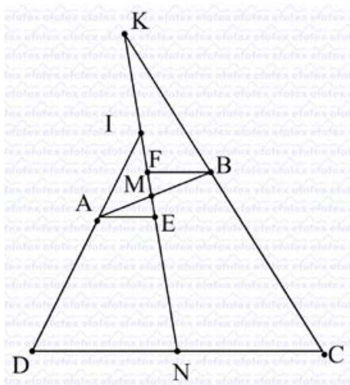
Từ đó $EIKF$ là hình bình hành nên $FK \,//\, IE \,//\, AD$. Suy ra $BC \,//\, AD$.

Ta lại có $BC = AD$ (cùng bằng $4EI$). Vậy $ABCD$ là hình bình hành.



🗁 **Bài 13**. Đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh đối AB, CD của tứ giác $ABCD$ cắt các đường thẳng AD và BC theo thứ tự ở I và K. Chứng minh rằng: $IA : ID = KB : KC$

Lời giải



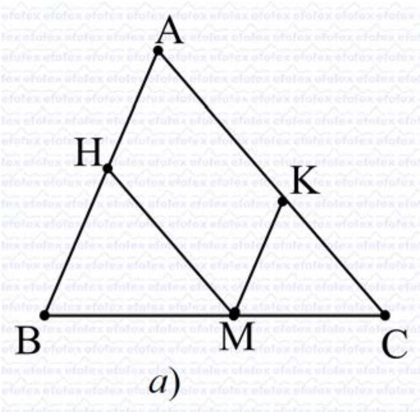
Gọi M, N là trung điểm của AB, CD. Vẽ $AE, BF \,//\, DC$. Ta có

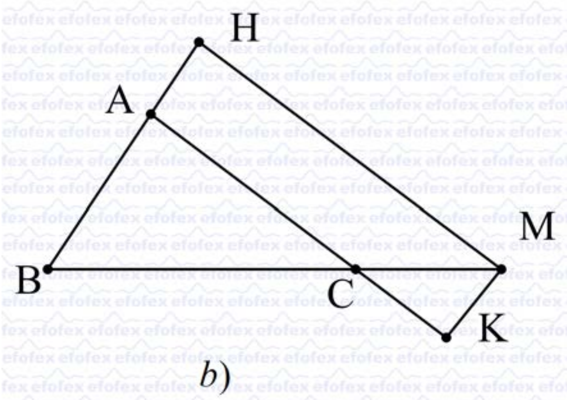
$$\frac{IA}{ID} = \frac{AE}{DN} = \frac{BF}{NC} = \frac{KB}{KC}$$

Bài 14. a) Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC, vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh kia, chúng cắt AB, AC theo thứ tự ở H,K. Chứng minh rằng tổng $\frac{AH}{AB}+\frac{AK}{AC}$ không phụ Thuộc vào vị trí của điểm M trên cạnh BC.

b) Xét trường hợp tương tự khi điểm M chạy trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn thẳng BC.

Lời giải





a) Do $MH // AC$, theo định lí Ta-lét, ta có: $\frac{AH}{AB}=\frac{CM}{CB}$. Tương tự ta được $\frac{AK}{AC}=\frac{BM}{CB}$. Do đó

$$\frac{AH}{AB}+\frac{AK}{AC}=\frac{CM}{CB}+\frac{BM}{CB}=\frac{BC}{BC}=1.$$

b) Nếu M thuộc tia đối của tia BC thì

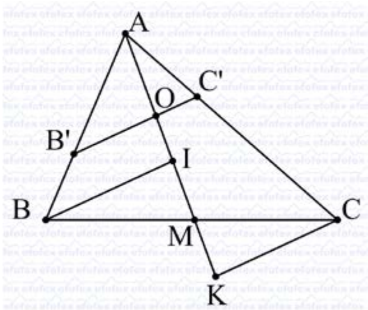
$$\frac{AK}{AC}-\frac{AH}{AB}=1+\frac{CK}{AC}-\frac{AH}{AB}=1+\frac{MC}{BC}-\frac{CM}{BC}=1$$

- Tương tự nếu điểm M thuộc tia đối của BC thì $\frac{AH}{AB}-\frac{AK}{AC}=1$

Bài 15. (1) Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Qua điểm O của AM, vẽ đường thẳng cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở B', C'. Chứng minh rằng khi đường thẳng thay đổi vị trí mà vẫn đi qua O thì tổng $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}$ không đổi.

(2) Tổng quát hóa bài toán trên khi O là một điểm cố định trên đoạn thẳng AM.

Lời giải



(1) Kẻ $BI \,//\, B'C', CK \,//\, B'C' \,(I, K \in AM)$.

Khi đó $\widehat{IBM} = \widehat{MCK}$ (hai góc so le trong). Xét ΔBIM và ΔCKM có:

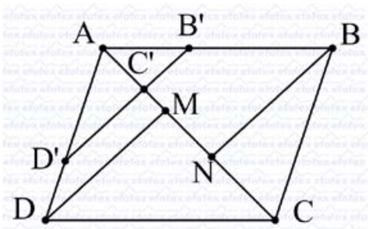
$\widehat{IBM} = \widehat{MCK}; BM = CM\,(gt); \widehat{IMB} = \widehat{CMK}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\Delta BIM = \Delta CKM$ (g.c.g) $\Rightarrow IM = MK$.

Do $OB' \,//\, IB$, theo định lí Ta-lét có $\frac{AB}{AB'} = \frac{AI}{AO}$. Tương tự, ta được $\frac{AC}{AC'} = \frac{AK}{AO}$.

Suy ra $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'} = \frac{AI}{AO}+\frac{AK}{AO} = \frac{AI+AK}{AO} = \frac{(AM-MI)+(AM+MK)}{AO} = \frac{2\cdot AM}{AO} = 4$

(2)

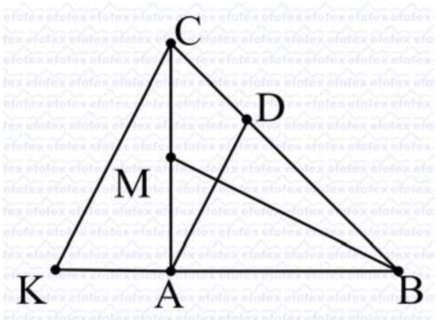


Chỉ cần O là một điểm cố định thuộc đoạn thẳng AM, không đòi hỏi O là trung điểm của AM. Giá trị không đổi của tổng bằng $2AM : AO$.

Có thể diễn đạt bài toán này dưới dạng: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm C' nằm trên đường chéo $AC\left(AC' < \frac{1}{2}AC\right)$. Qua C' vẽ đường thẳng d cắt các cạnh AB, AD ở B', D'. Chứng minh rằng $\frac{AB}{AB'} + \frac{AD}{AD'} = \frac{AC}{AC'}$.

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 2DC$. Chứng minh rằng BM vuông góc với AD.

Lời giải



Kẻ $CK \,//\, AD (K \in AB)$

Khi đó theo định lí Ta-lét ta có $\frac{AB}{AK} = \frac{BD}{CD} = 2 \Rightarrow AB = 2.AK$

Lại có: $AB = AC = 2 \cdot AM$.

Suy ra $AK = AM$. Xét ΔCAK và ΔBAM có:

$AK = AM\,(\text{cmt}); \widehat{CAK} = \widehat{BAM} = 90^\circ; AC = AB$

Suy ra $\Delta CAK = \Delta BAM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{ABM}$

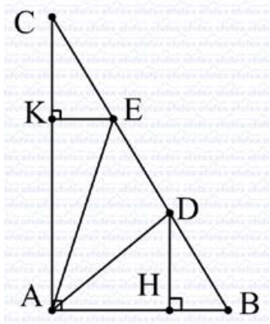
Mà $\widehat{CKA} = \widehat{BAD}$ (hai góc đồng vị) Suy ra $\widehat{ACK} + \widehat{CKA} = \widehat{ABM} + \widehat{BAD}$

Hay $\widehat{ABM} + \widehat{BAD} = 90^\circ$.

Vậy $BM \perp AD$.

Bài 17. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các điểm D, E thuộc cạnh BC sao cho $BD = DE = EC$. Biết $AD = 10\,\text{cm}, AE = 15\,\text{cm}$. Tính độ dài BC.

Lời giải



Kẻ $DH // AC; EK // AB (K \in AC; H \in AB$

Đặt $DH = x; EK = y$. Do $DH // AC$, theo hệ quả định lý Ta-lét ta có

$$\frac{DH}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AC = 3 \cdot DH = 3x.$$

Do $EK // AB$, theo định lý Ta-lét ta có $\frac{AK}{AC} = \frac{EB}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = 2x$

Tương tự ta được $AB = 3y; AH = 2y$. Suy ra $BH = y$.

Xét ΔADH vuông tại H, theo định lý Pitago ta có $AH^2 + DH^2 = AD^2$ hay $4y^2 + x^2 = 100$. (1)

Tương tự ta được $y^2 + 4x^2 = 225$. (2)

Cộng vế theo vế của (1) và (2): $5(x^2 + y^2) = 325 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 65$.

Mà $BH = y$ nên $x^2 + y^2 = DH^2 + BH^2 = BD^2$ hay $BD = \sqrt{65}$.

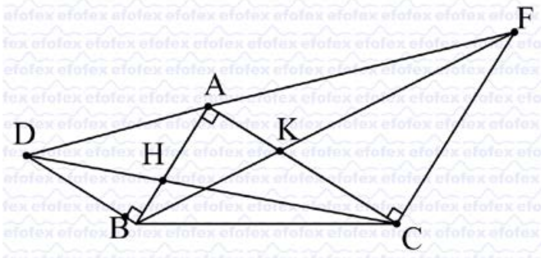
Vậy $BC = 3\sqrt{65}$.

Bài 18. Cho tam giác ΔABC vuông tại A. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân tại B, ACF vuông cân tại C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của AC và BF. Chứng minh rằng

(1) $AH = AK$

(2) $AH^2 = BH \cdot CK$.

Lời giải



(1).Đặt $AB=c, AC=b$. Ta có $DB // AC$ suy ra $\frac{HA}{HB}=\frac{AC}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{c}{b}$,

suy ra $\frac{HA}{b}=\frac{HB}{c}=\frac{HA+HB}{b+c}=\frac{c}{b+c} \Rightarrow AH=\frac{bc}{b+c}$.

Tương tự, ta được $\frac{KA}{KC}=\frac{c}{b}$ và $AK=\frac{bc}{b+c}$.

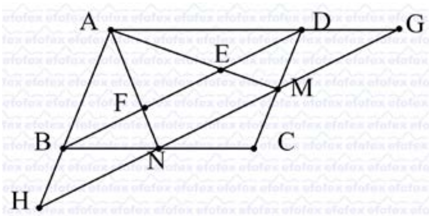
Do đó $AH=AK$.

(2) Ta có $\frac{HA}{HB}=\frac{b}{c}; \frac{KA}{KC}=\frac{c}{b}$.

Do đó $\frac{HA}{HB}=\frac{KC}{KA}$ suy ra $HA \cdot AK=BH \cdot CK$. Lại có $AH=AK$ suy ra $HA^2=BH \cdot CK$.

Bài 19. Cho tứ giác $ABCD$ có M là trung điểm của CD, N là trung điểm của CB. Biết rằng AM, AN cắt đường chéo BD thành ba đoạn bằng nhau. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải



Gọi E, F là giao điểm của AM, AN với BD; gọi G, H là giao điểm của của MN với AD, AB.

Ta có $BF // HN \Rightarrow \frac{AB}{AH}=\frac{BF}{HN}=\frac{AF}{AN}$ $\qquad (1)$

$EF \,//\, MN \Rightarrow \dfrac{AF}{AN} = \dfrac{EF}{MN}$ (2)

Mặt khác, MN là đường trung bình tam giác CBD suy ra $MN = \dfrac{1}{2}BD$, lại có $EF = \dfrac{1}{3}BD$

Thay vào (2), ta được $\dfrac{AF}{AN} = \dfrac{EF}{MN} = \dfrac{2}{3}$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{BF}{HN} = \dfrac{2}{3}$. (4)

Chứng minh tương tự, ta được $\dfrac{AD}{AG} = \dfrac{DE}{MG} = \dfrac{2}{3}$ (5)

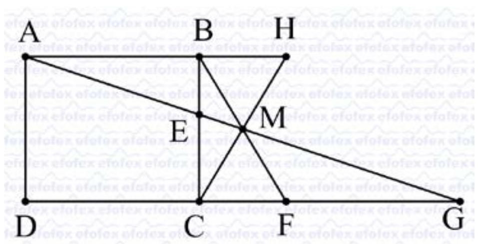
Từ $(3), (4)$ và (5) suy ra $HN = \dfrac{3}{2}EF, MN = \dfrac{3}{2}EF, MG = \dfrac{3}{2}DE$.

Do đó $HN = MN = MG$.

Do đó, ta có $\dfrac{GN}{HN} = \dfrac{2}{3}$, kết hợp với (4) suy ra BC song song AD. Chứng minh tương tự ta được AB song song CD và do đó $ABCD$ là hình bình hành.

🗁 **Bài 20**. Trên cạnh BC của hình vuông $ABCD$ cạnh 6, lấy điểm E sao cho $BE = 2$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho $CF = 3$. Gọi M là giao điểm của AE và BF. Tính $\widehat{AMC}$.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của CM và AB, G là giao điểm của AM và DF. Ta có

$AB \,//\, CG$ suy ra $\dfrac{AB}{CG} = \dfrac{BE}{CE} \Rightarrow \dfrac{6}{CG} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow CG = 12, FG = CG - CF = 9$

$AH \,//\, DG$ suy ra $\dfrac{HB}{CF} = \dfrac{MB}{MF} = \dfrac{AB}{FG}$, do đó $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{CF}{FG}$ nên $\dfrac{BH}{6} = \dfrac{3}{9}, BH = 2$.

Xét ΔBAE và ΔBCH , ta có

$AB = BC$;

$\widehat{ABE} = \widehat{CBH}$

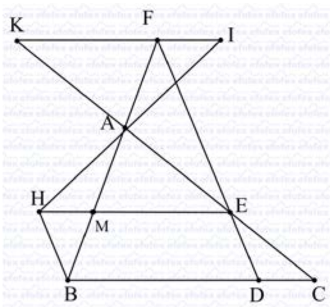
$BH = BE = 2$

$\Rightarrow \Delta BAE = \Delta BCH \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{AEB} = \widehat{MEC}$

Ta có $\widehat{MEC} + \widehat{ECM} = \widehat{BHC} + \widehat{ECM} = 90^\circ$ do đó $\widehat{AMC} = 90^\circ$.□

Bài 21. Cho tam giác ABC . Một đường thẳng cắt các cạnh BC, CA theo thứ tự ở D, E và cắt đường thẳng BA ở F . Vẽ hình bình hành $BDEH$. Đường thẳng đi qua F và song song với BC cắt HA ở I . Chứng minh rằng $FI = DC$.

Lời giải



Gọi K là giao điểm của AC và FI, M là giao điểm của AB và EH .

Ta có $KI \,//\, HE$ suy ra $\dfrac{FI}{FK} = \dfrac{MH}{ME}$. $\quad (1)$

Ta có $KI \,//\, BC$ suy ra $\dfrac{DC}{FK} = \dfrac{DE}{FE}$ $\quad (2)$

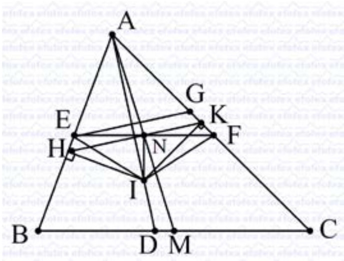
Ta có $ME \,//\, BC$ suy ra $\dfrac{BD}{ME} = \dfrac{FD}{FE} \Rightarrow \dfrac{BD - ME}{ME} = \dfrac{FD - FE}{FE} \Rightarrow \dfrac{MH}{ME} = \dfrac{DE}{FE}$. $\quad (3)$

Từ (1) (2) và (3) suy ra $\dfrac{FI}{FK} = \dfrac{DC}{FK}$ nên $FI = DC$.

□

Bài 22. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Qua điểm I thuộc đoạn thẳng AD, kẻ IH vuông góc với AB, IK vuông góc với AC. Gọi N là giao điểm của HK và AM. Chứng minh rằng NI vuông góc với BC.

Lời giải



Qua N kẻ đường $EF // BC$, do M là trung điểm BC nên $NE = NF$. Kẻ $EG // HK$, do N là trung điểm EF nên $GK = KF$. (1)

Ta có I thuộc phân giác AD, $IH \perp AB$, $IK \perp AC$ $\Rightarrow AH = AK$.

Tam giác AHK cân, $EG // HK$ suy ra $AE = AG$, nên $EH = GK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EH = KF$.

Xét tam giác IHE và IKF có

$IH = IK$,

$HE = KF$

$\widehat{EHI} = \widehat{FKI} \left(= 90^\circ\right)$

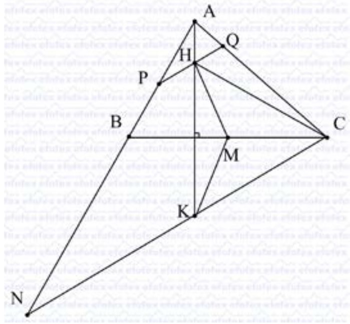
$\Rightarrow \Delta IHE = \Delta IKF$ (c- g-c) $\Rightarrow IE = IF$

ΔIEF cân tại I, IN là đường trung tuyến nên $IN \perp EF$. Do đó $IN \perp BC$.

□

Bài 23. Cho tam giác có ba góc nhọn, trực tâm H. Một đường thẳng đi qua H cắt AB, AC theo thứ tự ở P, Q sao cho $HP = HQ$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng HM vuông góc với PQ.

Lời giải



Qua C kẻ đường thẳng song song với PQ cắt AB ở N, cắt AH ở K.

Ta có $PQ // NC$ suy ra $\frac{PH}{NK} = \frac{QH}{KC}\left(=\frac{AH}{AK}\right)$.

Do $HP = HQ$ nên $KN = KC$.

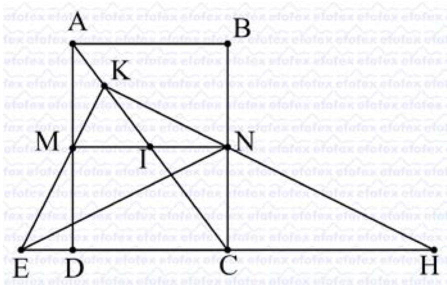
Ta có $MB = MC, KN + KC$ suy ra KM là đường trung bình của $\Delta CBN, KM // AB$. Mà $CH \perp AB$ nên $KM \perp CH$.

Lại có $BC \perp AH, KM \perp CH$ suy ra M là trực tâm của ΔCHK nên $HM \perp NC$. Lại có $PQ // NC$ suy ra $HM \perp PQ$.

□

Bài 24. Hình chữ nhật $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Gọi E là một điểm bất kì thuộc tia đối của tia DC, K là giao diểm của EM và AC. Chứng minh rằng NM là tia phân giác của góc KNE.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AC và MN, H là giao điểm KN và DC. Xét tứ giác NMCD có $DM // CN(AD // BC, M \in AD, N \in BC)$,

$$DM = CN\left(DM = \frac{1}{2}, AD = \frac{1}{2}BC, AD = BC\right)$$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNCD là hình bình hành $\Rightarrow MN // CD$. Xét ΔADC có M là trung điểm $AD, MI // DC(MN // CD, I \in MN), I \in AC \Rightarrow I$ là trung điểm $MN \Rightarrow IM = IN$.

Xét ΔKEC có

$MI // EC(MN // CD, I \in MN, E \in CD) \Rightarrow \dfrac{IM}{EC} = \dfrac{KI}{KC}$ (hệ quả của định lí Talét) (1)

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{IN}{HC} = \dfrac{KI}{KC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{IM}{EC} = \dfrac{IN}{HC} \Leftrightarrow \dfrac{EC}{HC} = \dfrac{IM}{IN} = 1 \Rightarrow C$ là trung điểm EH.

Xét ΔENH có NC vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên ΔENH cân tại N. (3)

Ta có $\widehat{KNE}$ là góc ngoài của ΔNEH. (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{KNE} = 2\widehat{NHE}$ (5)

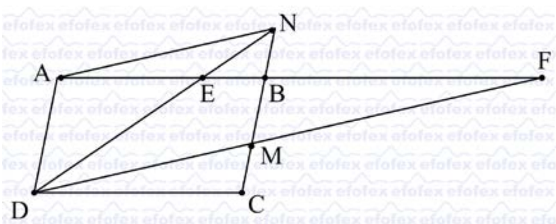
Ta lại có $\widehat{KNM} = \widehat{NHE}(MN // EH$, hai góc so le trong) (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \widehat{KNE} = 2\widehat{KNM} \Leftrightarrow NM$ là tia phân giác của góc $\widehat{KNE}$.

□

Bài 25. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thuộc cạnh BC, điểm N thuộc tia đối của tia BC sao cho $BN = CM$. Các đường thẳng DN, DM cắt AB theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng $AE^2 = EB \cdot EF$

Lời giải



Ta có $MN = BN + BM = CM + BM = BC = AD(BN = CM)$.

Xét tứ giác $AMND$ có

$AD // MN (AD // MN, N \in BC)$

$AD = MN$ (cmt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMND$ là hình bình hành (tứ giác có một cặp cạnh vừa song song vừa bằng nhau)

$\Rightarrow AN // DF$

Xét ΔDEF có $AN // DF \Rightarrow \dfrac{EA}{EF} = \dfrac{EN}{ED}$ (hệ quả của định lí Talét). (1)

Xét ΔAED có $AD // BN \Rightarrow \dfrac{EN}{ED} = \dfrac{EB}{EA}$ (hệ quả của định lí Talét). (2)

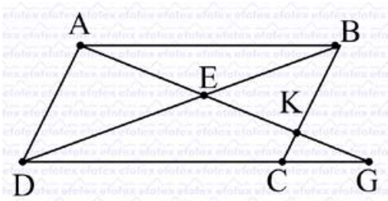
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{EA}{EF} = \dfrac{EB}{EA} \Leftrightarrow EA^2 = EB \cdot EF$.

Bài 26. Một đường thẳng di qua đỉnh A của hình bình hành $ABCD$ cắt BD, BC, DC theo thứ tự ở E, K, G . Chứng minh rằng:

a) $AE^2 = EK \cdot EG$

b) $\dfrac{1}{AE} = \dfrac{1}{AK} + \dfrac{1}{AG}$

c) Khi đường thẳng thay đổi vị trí nhưng vẫn di qua A thì tích $BK \cdot DG$ có giá trị không đổi.



Lời giải

a) Xét ΔAEB có $AB // DG (AB // DC, G \in DC) \Rightarrow \dfrac{EA}{EG} = \dfrac{EB}{ED}$ (1)

Xét ΔAED có $AD // BK (AD // BC, K \in BC) \Rightarrow \dfrac{EB}{ED} = \dfrac{EK}{EA}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{EA}{EG} = \dfrac{EK}{EA} \Leftrightarrow EA^2 = EK \cdot EG$.

b) Ta có $\frac{1}{AE}=\frac{1}{AK}+\frac{1}{AG}\Leftrightarrow\frac{AE}{AK}+\frac{AE}{AG}=1$.

Xét ΔAEB có $AB//DG(AB//DC,G\in DC)\Rightarrow\frac{AE}{AG}=\frac{BE}{BD}$ (3)

Xét ΔAED có $AD//BK(AD//BC,K\in BC)\Rightarrow\frac{AE}{AK}=\frac{DE}{DB}$. (4)

Từ (3) và (4) ta được $\frac{AE}{AK}+\frac{AE}{AG}=\frac{DE}{DB}+\frac{BE}{BD}=\frac{BD}{BD}=1$.

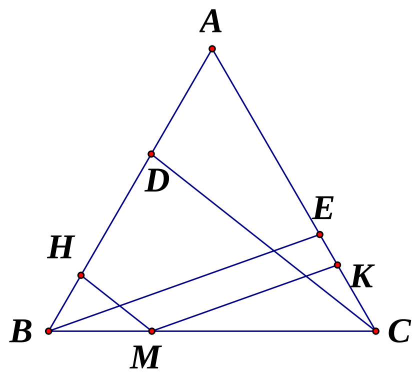
c) Xét ΔABK có $AB//CG(AB//DC,G\in DC)\Rightarrow\frac{KB}{KC}=\frac{AB}{CG}$ (5)

Xét ΔAGD có $AD//KC(AD//BC,K\in BC)\Rightarrow\frac{KC}{AD}=\frac{CG}{AD}$. (6)

Nhân từng vế (5) và (6) ta được $\frac{KB}{AD}=\frac{AB}{AD}\Leftrightarrow KB\cdot DG=AB\cdot AD$, mà AB,AD cố định nên $BK\cdot DG$ có giá trị không đổi.

Bài 27. Cho tam giác đều ABC. Các điểm D,E theo thứ tự thuộc các cạnh AB,AC sao cho $AD=CE$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh BC. Vẽ MH song song với CD (H thuộc AB), vẽ MK song song với BE(K thuộc AC). Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên cạnh BC thì tổng $MH+MK$ có giá trị không đổi.

Lời giải



Xét ΔADC và ΔCEB có:

$AD=CE$ (giả thiết)

$\hat{A}=\hat{C}=60^\circ$ (ΔABC đều)

$AC=BC$(ΔABC đều)

$\Rightarrow\Delta ADC=\Delta CEB(\text{c}-\text{g}-\text{c})\Rightarrow DC=BE$ (2 cạnh tương ứng)

Xét ΔBDC có $MH//DC$ (giả thiết)

$\Rightarrow\frac{MH}{DC}=\frac{MB}{BC}$ (hệ quả của định lí Talét).(1)

Xét ΔBCE có $MK//BE$ (giả thiết) $\Rightarrow\frac{MK}{BE}=\frac{MC}{BC}$ (hệ quả của định lí Talét).(2)

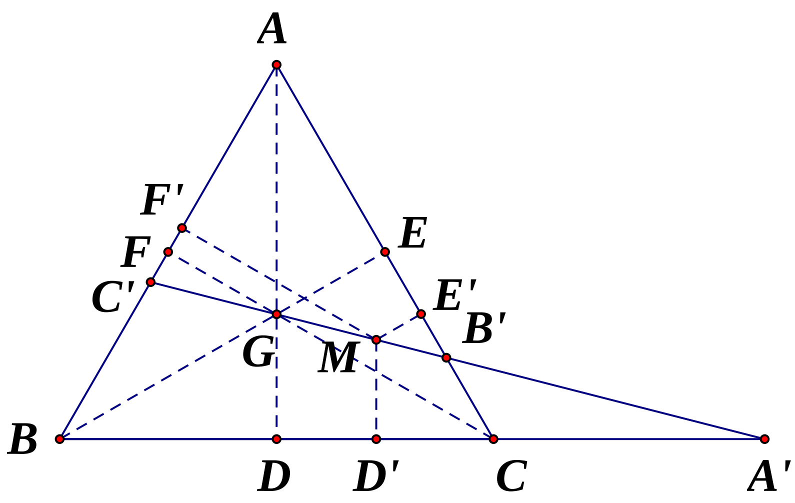
Từ (1) và (2) ta có $\frac{MH}{DC}+\frac{MK}{BE}=\frac{MB}{BC}+\frac{MC}{BC}=\frac{BC}{BC}=1$, mà $DC=BE$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \frac{MH}{DC}+\frac{MK}{DC}=1 \Rightarrow MH+MK=CD$$

Ta có C,D cố định nên $MH+MK$ có giá trị không đổi.

BÀI 28. Cho tam giác đều ABC, trọng tâm G,M là một điểm bất kì nằm bên trong tam giác. Đường thẳng MG cắt các đường thẳng BC,AC,AB theo thứ tự ở A',B',C'. Chứng minh rằng

$$\frac{A'M}{A'G}+\frac{B'M}{B'G}+\frac{C'M}{C'G}=3$$



Lời giải

Gọi 3 đường trung tuyến của ΔABC lần lượt là AD,BE,CF, mà ΔABC đều nên $GD=GE=GF$.

Vẽ D',E',F' lần lượt là hình chiếu của M trên BC,CA,AB.

Vì ΔABC đều, AD là đường trung tuyến nên AD cũng là đường cao, suy ra $AD\perp BC$, mà $MD'\perp BC$ $\left(D'\right.$ là hình chiếu của M trên BC). Vậy $AD//MD'$.

Xét $\Delta A'GD$ có $AD//MD'$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \frac{A'M}{A'G}=\frac{MD'}{GD}$ (hệ quả của định lí Talét). Chứng minh tương tự ta có $\frac{B'M}{B'G}=\frac{ME'}{GE};\frac{C'M}{C'G}=\frac{MF'}{GF}$

Vậy $\frac{A'M}{A'G}+\frac{B'M}{B'G}+\frac{C'M}{C'G}=\frac{MD'}{GD}+\frac{ME'}{GE}+\frac{MF'}{GF}=\frac{MD'+ME'+MF'}{GD}$(vì $GD=GE=GF$)

Mặt khác $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle AMC} + S_{\triangle BMC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot AD\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot MF' + \frac{1}{2}\cdot AC\cdot ME' + \frac{1}{2}BC.MD'$

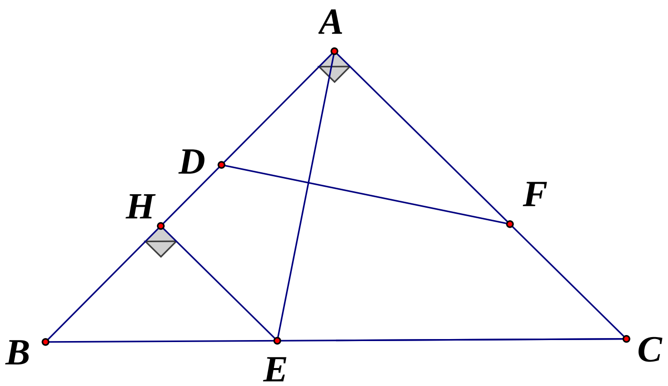
$\Leftrightarrow AD = MF' + ME' + MD'$

Vậy $\frac{A'M}{A'G} + \frac{B'M}{B'G} + \frac{C'M}{C'G} = \frac{AD}{GD} = 3$

BÀI 29. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E, F theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CA theo cùng một tỉ số. Chứng minh rằng:

1. $AE = DF$
2. AE vuông góc với DF.

Lời giải



Theo giả thiết, ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC}$.(1)

Vẽ $EH \perp AB, (H \in AB)$.

Ta có $HE // AC$ suy ra $\frac{HE}{AC} = \frac{BE}{BC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{HE}{AC} = \frac{AD}{AB}$, lại có $AB = AC$ suy ra $HE = AD$.

Mặt khác tam giác BHE vuông có $\widehat{HBE} = 45^\circ$ suy ra ΔHBE cân $\Rightarrow HB = HE$.

Vậy $AD = EH = BH$.

Theo giả thiết ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{CF}{AC}$ suy ra $AD = CF$.

Do đó ta có $AH = AF$.

Xét ΔAHE và ΔFAD

$AH = AF$(cmt)

$HE = AD$(cmt)

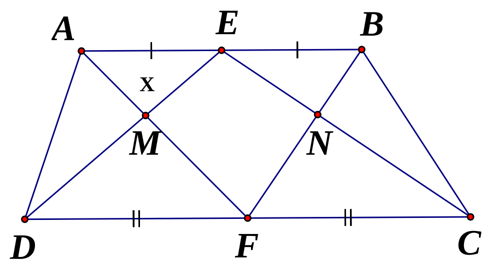
$\widehat{AHE} = \widehat{DAE} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta AHE = \Delta FAD(\text{c}-\text{g}-\text{c}) \Rightarrow AE = DF, \widehat{AFD} = \widehat{HAE}$

Ta có $\widehat{HAE} + \widehat{ADF} = \widehat{AFD} + \widehat{ADF} = 90^\circ \Rightarrow AE \perp DF$.

BÀI 30. Cho hình thang $ABCD(AB//CD)$ có diện tích $S.AB=\frac{2}{3}CD$. Gọi E,F theo thứ tự là trung điểm của AB,CD. Gọi M là giao điểm của AF và $DE.N$ là giao điểm của BF và CE. Tính diện tích tứ giác $EMFN$ theo S.

Lời giải



Đặt $S_{AEM}=x$

Ta có $AB//CD$, suy ra $\frac{MF}{MA}=\frac{MD}{ME}=\frac{DF}{AE}=\frac{3}{2}$

Do đó $\frac{S_{EMF}}{S_{AME}}=\frac{MF}{ME}=\frac{3}{2}\Rightarrow S_{EMF}=\frac{3}{2}x\left(1\right)$

Tương tự, ta có $S_{AMD}=\frac{3}{2}S_{AME}=\frac{3}{2}x, S_{DMF}=\frac{3}{2}S_{AMD}=\frac{9}{4}x$

Từ đó, ta có $S_{AEFD}=\frac{25}{4}x.\left(2\right)$

Từ (1) và (2) ta có $S_{EMF}=\frac{6}{25}S_{AEFD}$.

Tương tự $S_{ENF}=\frac{6}{25}S_{BEFC}$. Suy ra $S_{EMFN}=\frac{6}{25}S_{ABCD}=\frac{6}{25}S$.

BÀI 31.

1. Cho hình bình hành $ABCD, M$ là trung điểm của BC. Điểm N trên cạnh CD sao cho $\frac{CN}{ND}=2$

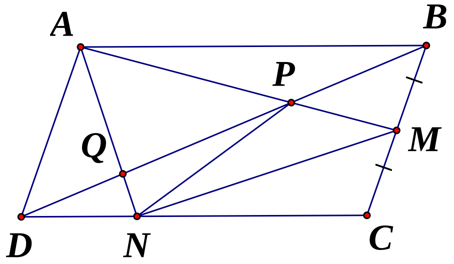
Gọi giao điểm của AM, AN với BD là P,Q. Chứng minh rằng $S_{APQ}=\frac{1}{2}S_{AMN}$

2. Chứng minh rằng kết luận ở câu a vẫn đúng nếu thay điều kiện " M là trung điểm của BC,N trên cạnh CD sao cho $\frac{CN}{ND}=2$ " bởi điều kiện tổng quát hơn " M trên cạnh BC; N trên cạnh CD sao cho $\frac{CN}{ND}=2\frac{BM}{MC}$"

Lời giải

Trước hết ta có $\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}}=\frac{S_{APQ}}{S_{APN}}\cdot\frac{S_{APN}}{S_{AMN}}=\frac{AQ}{AN}\cdot\frac{AP}{AM}$. Ta cần tính toán tỉ số $\frac{AQ}{AN}\cdot\frac{AP}{AM}$

1. Ta có $\frac{AQ}{QN}=\frac{AB}{DN}=3\Rightarrow\frac{AQ}{AQ+QN}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{AQ}{AN}=\frac{3}{4}$.



Và $\frac{AP}{PM}=\frac{AD}{BM}=2\Rightarrow\frac{AP}{AP+PM}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{AP}{AM}=\frac{2}{3}$

Do đó $\frac{AQ}{AN}\cdot\frac{AP}{AM}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

Vậy $S_{APQ}=\frac{1}{2}S_{AMN}$

2. Ta có $\frac{CN}{ND}=2\frac{BM}{MC}$. Đặt $\frac{BM}{MC}=k$ thì $\frac{CN}{ND}=2k$.

Đặt $MC=x$ thì $BM=kx$. Đặt $ND=y$ thì $CN=2ky$.

Ta có $\frac{AP}{PM}=\frac{AD}{BM}=\frac{x+kx}{kx}=\frac{k+1}{k}\Rightarrow\frac{AP}{AP+PM}=\frac{k+1}{2k+1}\Rightarrow\frac{AP}{AM}=\frac{k+1}{2k+1}(1)$

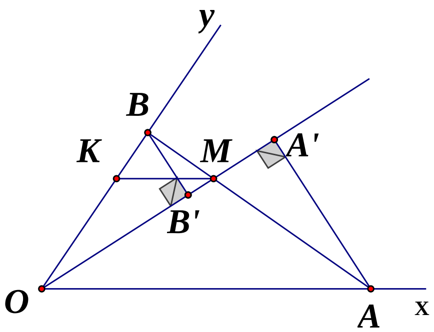
Mặt khác $\frac{AQ}{QN}=\frac{AB}{DN}=\frac{y+2ky}{y}=\frac{2k+1}{1}\Rightarrow\frac{AQ}{AQ+QN}=\frac{2k+1}{2k+2}\Rightarrow\frac{AQ}{AN}=\frac{2k+1}{2k+2}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AP}{AM}=\frac{AQ}{AN}=\frac{k+1}{2k+1}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{2}$.

Vậy $S_{APQ}=\frac{1}{2}S_{AMN}$

BÀI 32. Cho góc xOy và điểm M cố định thuộc miền trong của góc. Một đường thẳng thay đổi vị trí nhưng luôn đi qua M cắt các tia Ox,Oy theo thứ tự ở A,B. Gọi S_1,S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác MOA,MOB. Chứng minh rằng tổng $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}$ có giá trị không đổi.

Lời giải



Vẽ $MK//OA$, ta có

$$\frac{OK}{OB}=\frac{AM}{AB}\Rightarrow\frac{S_{MOK}}{S_{MOB}}=\frac{S_{MOA}}{S_{AOB}}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{MOK}}{S_2}=\frac{S_1}{S_1+S_2}\Rightarrow\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}=\frac{1}{S_{MOK}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}=\frac{1}{S_{MOK}}(\text{không doi })$$

Chú ý: Nếu vẽ thêm $AA' \perp OM, BB' \perp OM$ thì từ $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{s_2}$ không đổi, ta có

$\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot OM \cdot AA'} + \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot OM \cdot BB'}$ không đổi, suy ra $\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'}$ không đổi.

Ta lại có $MA \geq AA', MB \geq BB'$ nên $OM \cdot BB'$

$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} \leq \frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'}$ là hằng số.

Từ đó ta có bài toán: Cho góc xOy và một điểm M nằm trong góc ấy. Qua M hãy dựng một đường thẳng cắt hai cạnh của góc ở A và B sao cho $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$ lớn nhất. Đường thẳng phải dựng là đường vuông góc với OM tại M .

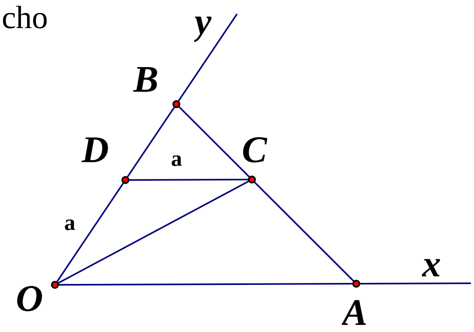
Dử đoán điểm cố định: Nếu lấy A' thuộc Oy, B' thuộc Ox sao cho $OA' = OA, OB' = OB$ thì $\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} = \frac{1}{k}$. Điểm cố định nếu có phải là giao điểm của AB và $A'B'$. Gọi giao điểm đó là C, rõ ràng C phải thuộc tia phân giác của góc xOy.

Chứng minh: Vẽ tia phân giác của góc xOy, cắt AB ở C. Vẽ $CD//Ox$ thì $OD = OC = a$.

Ta có $\frac{DC}{OA} = \frac{BD}{BO} \Rightarrow \frac{a}{OA} + \frac{a}{OB} = 1 \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{a}$. Mặt khác, theo giả thiết $1 \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{k}$. Vậy $DC = k, C$ là điểm cố định.

BÀI 33. Cho góc xOy. Các điểm A và B theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox và Oy sao cho $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{k}$($k$ là hằng số). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Dự đoán điểm cố định: Nếu lấy A' thuộc Oy, B' thuộc Ox sao cho $OA' = OA, OB' = OB$ thì $\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} = \frac{1}{k}$.

Điểm cố định nếu có phải là giao điểm của AB và $A'B'$.

Gọi giao điểm đó là C, rõ ràng C phải thuộc tia phân giác của góc xOy.

Chứng minh: Vẽ tia phân giác của góc xOy, cắt AB ở C.

Vẽ $CD//Ox$ thì $OD = OC = a$.

Ta có $\dfrac{DC}{OA} = \dfrac{BD}{BO} \Rightarrow \dfrac{a}{OA} = \dfrac{OB - a}{OB} \Rightarrow \dfrac{a}{OA} + \dfrac{a}{OB} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} = \dfrac{1}{a}$.

Mặt khác, theo giả thiết $\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} = \dfrac{1}{k}$.

Vậy $DC = k, C$ là điểm cố định.

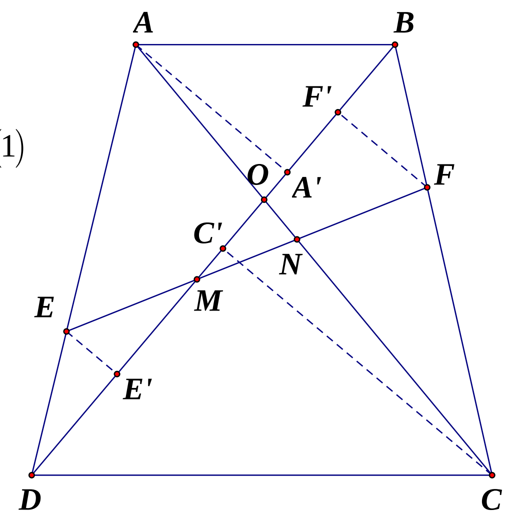
BÀI 34. Cho hình thang $ABCD(AB//CD)$. Điểm E thuộc cạnh AD, điểm F thuộc cạnh BC sao cho $\dfrac{DE}{DA} = \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{1}{3}$. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của EF với BD, AC. Chứng minh rằng $EM = NF$

Lời giải

Kẻ AA', CC', EE', FF' vuông góc với BD. Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra $EE' // CC' // \ AA' // FF'$

Vì $EE' // AA'$ (cách dựng) $\Rightarrow \dfrac{EE'}{AA'} = \dfrac{DE}{DA} = \dfrac{1}{3}$ (hệ quả của định lí Ta-let).

Vì $EE' // FF'$(cách dựng)



$\Rightarrow \dfrac{ME}{MF} = \dfrac{EE'}{FF'} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot AA'}{\frac{1}{3} \cdot CC'} = \dfrac{AA'}{CC'}$ (hệ quả của định lí Ta-let). (1)

Vì $AA' // CC'$ (cách dựng)

$\Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AA'}{CC}$ (hệ quả của định lí Ta-let). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{OA}{OC} (3)$

Chứng minh tương tự $\dfrac{NF}{NE} = \dfrac{OB}{OC} (4)$

Ta lại có $AB // CD \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} (5)$ (định lí Talet).

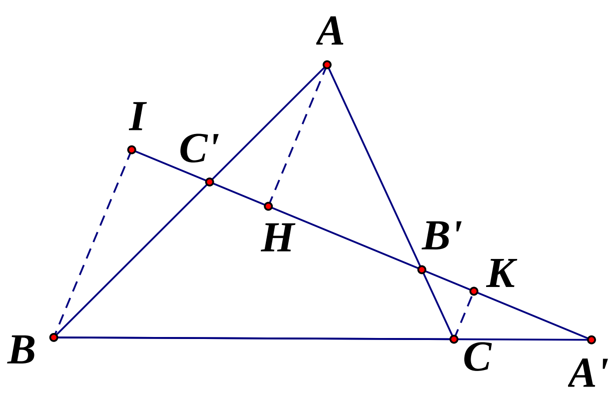
Từ $(3), (4), (5)$ suy ra $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{NF}{NE} \Rightarrow \dfrac{EM}{ME + MF} = \dfrac{NF}{NE + NF} \Rightarrow \dfrac{ME}{EF} = \dfrac{NF}{EF} \Rightarrow ME = MF$

🗁 BÀI 35

1. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm A' sao cho $\frac{BA'}{A'C}=3$. Trên cạnh CA lấy điểm B' sao cho $\frac{CB'}{B'A}=\frac{1}{3}$. Gọi C' là giao điểm của $A'B'$ và AB. Chứng minh rằng C' là trung điểm của AB.

2. Chứng minh bài toán tổng quát: Nếu một đường thẳng không đi qua các đỉnh của tam giác ABC và cắt các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự ở A', B', C' thì $\frac{AB'}{B'C'}\cdot\frac{CA'}{A'B'}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$ (định lí Mê-nê-la-uýt).

Lời giải



1. Kẻ AH, BI, CK vuông góc với $A'C'$ suy ra $AH//BI//CK$.

Vì $AH//CK$ (cách dựng)

$\Rightarrow \frac{AH}{CK}=\frac{B'A}{B'C}=3$ (hệ quả của định lí Ta-let). (1)

Vì $BI//CK$ (cách dựng) $\Rightarrow \frac{B1}{CK}=\frac{BA'}{A'C}=3$ (hệ quả của định lí Ta-let). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AH}{BI}=1$.

Vì $AH//BI$ (cách dựng) $\Rightarrow \frac{C'A}{C'B}=\frac{AH}{BI}=1$. Vậy C' là trung điểm AB.

2. Theo câu a ta có:

$\frac{AB'}{B'C}=\frac{AH}{CK}(3)$

$\frac{CA'}{A'B}=\frac{CK}{BI}(4)$

$\frac{BC'}{C'A}=\frac{BI}{AH}(5)$

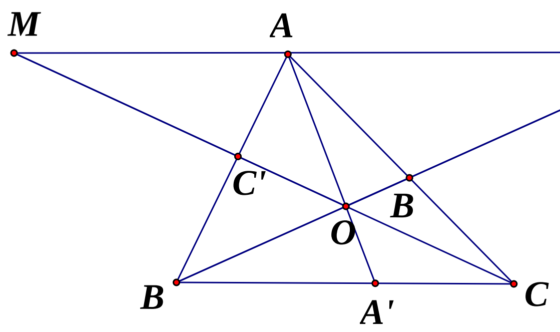
Nhân $(3),(4),(5)$ ta được

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=\frac{AH}{CK}\cdot\frac{CK}{BI}\cdot\frac{BI}{AH}=1$$

BÀI 36

1. Chứng minh rằng nếu trên các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC, ta lấy các điểm tương ứng A', B', C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy thì $\frac{AB'}{B'C'}\cdot\frac{CA'}{A'B'}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$ (định lí Xê-va).
2. Chứng minh rằng kết luận trên vẫn đúng nếu các điểm A', B', C' thuộc các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác, trong đó có đúng hai điểm nằm ngoài tam giác.

Lời giải

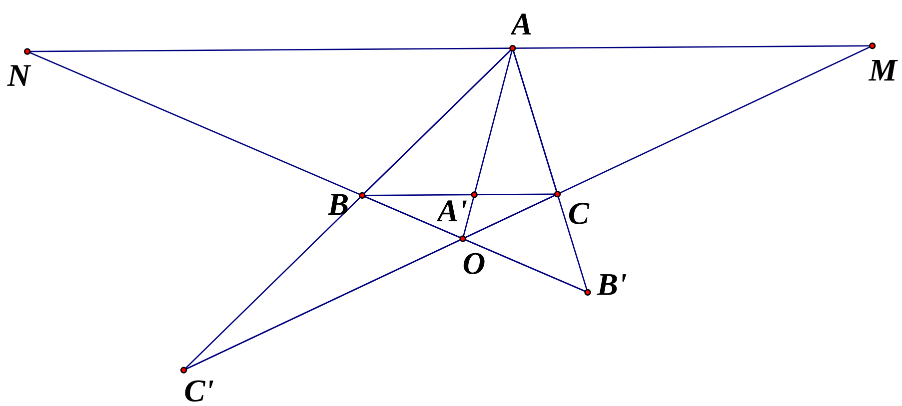


1. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BB', CC' ở N, M.

Ta có $MN // BC$ suy ra $\frac{AB'}{B'C}=\frac{AN}{CB}, \frac{BC'}{C'A}=\frac{BC}{AM}, \frac{CA'}{A'B}=\frac{MA}{AN}$

Nhân các các đẳng thức trên theo từng vế, ta được điều phải chứng minh.

2. Chứng minh tương tự câu a).



Các hệ thức viết ở đinh lý Mê-nê-la-uýt và đinh lí Xê-va như nhau. Chỗ khác nhau là vi trí các điểm A', B', C'

- Ở dinh lí Mê-ne-la-uýt: có đúng một điểm, hoăc cả ba điểm nằm ngoài tam giác.
- Ỏ đinh lí Xê-va: không có điểm nào, hoăc có đúng hai điểm nằm ngoài tam giác.

BÀI 37. Cho tam giác ABC. Tâm O của các hình chữ nhật $MNPQ$ thay đổi nhưng luôn có M thuộc AB, N thuộc AC, P và Q thuộc BC, chuyển động trên đường nào?

Lời giải

Gọi R là trung điểm của MQ, BR cắt AH tại E.

Ta có $MQ // AH$ suy ra $\frac{MR}{AE} = \frac{BR}{BE} = \frac{QR}{EH}$

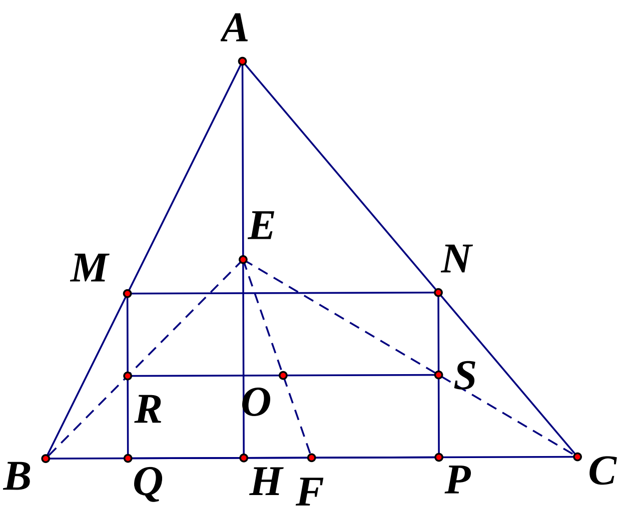
Lại có $MR = QR$ suy ra $AE = HE$.

Vậy BR cắt AH tại trung điểm E của AH.

Tương tự gọi S là trung điểm của NP,

ta cũng có CS đi qua trung điểm E của AH.

Tứ giác $MRPS$ là hình bình hành (do $MR // NP$ và $MR = NP$) lại có O là trung điểm MP (tính chất hình chữ nhật) nên O là trung điểm RS.



Do $RS // BC$, chứng minh tương tự trên ta có EO cắt BC tại trung điểm F của BC.

Ta có $O \in EF$, mặt khác do E, F là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC cố định nên EF cố định.

Vậy O luôn thuộc EF cố định.

Bài 2

Định lí Ta Lét đảo.

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lí 1 (Định lý Ta-lét đảo). Nếu một đường thẳng cắt hai canh của tam giác và định ra trên hai cạnh ấy những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

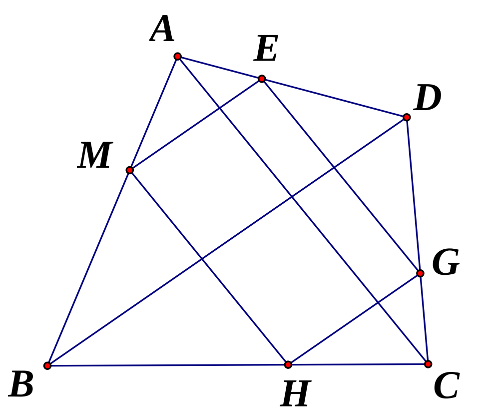
Đinh lý trên vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài của hai canh của tam giác.

2 Một số ví dụ

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$, điểm M thuộc cạnh AB. Lần lượt vẽ ME song song $BD(E \in AD), EG$ song song $AC(G \in CD), GH$ song song $BD(H \in BC)$

1. Chứng minh $MEGH$ là hình bình hành.
2. Tính chu vi tứ giác $MEGH$, nếu $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng m.

Lời giải



1. Ta có

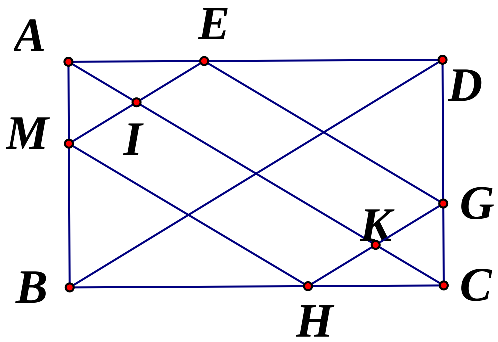
$$ME//BD \Rightarrow \frac{ME}{BD} = \frac{AE}{AD}.$$

$$EG//AC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{CG}{CD}$$

$$GH//BD \Rightarrow \frac{CG}{CD} = \frac{HG}{BD}$$

- Từ ba điều trên suy ra $\frac{ME}{BD}=\frac{HG}{BD}\Rightarrow ME=HG$.

Vậy ta có $\begin{cases} ME//HG \\ ME=HG \end{cases}\Rightarrow MEGH$ là hình bình hành.



2. Gọi I là giao điểm của ME, AC và O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\frac{IM}{OB}=\frac{AM}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{IE}{OD}$ mà $OB=OD$ nên $IM=IE$

Khi đó ta có $ME=2AI$ vì $\triangle AME$ vuông tại A.

Gọi K là giao điểm của HG và AC, tương tự ta có $HG=2CK$

Mặt khác $MH=EG=IK$, vậy chu vi tứ giác $MEGH$ bằng

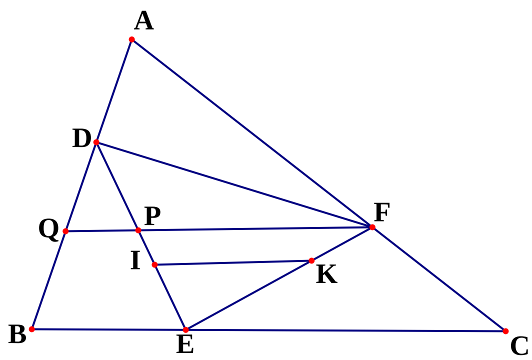
$$ME+HG+MH+EG=2\left(AI+CK+IK\right)=2m$$

VÍ DỤ 2: Cho tam giác ABC. Các điểm D,E,F theo thứ tự chia trong các cạnh AB,BC,CA theo tỉ số $1:2$. Các điểm I,K theo thứ tự chia trong các đoạn ED,FE theo tỉ số 1: 2.

Chứng minh IK song song với BC

Lời giải

Kẻ đường thẳng đi qua F và song song BC cắt ED, AB



lần lượt tại P,Q. Khi đó ta có $\frac{AF}{FC}=\frac{AQ}{QB}=2$, do đó Q là trung điểm của BD, suy ra P là trung điểm của DE.

Ta có $EI=\frac{1}{3}ED=\frac{2}{3}EP=2IP$, mặt khác $EK=2KF$ do đó $IK//PF$, mà $PF//BC$ nên $IK//BC$

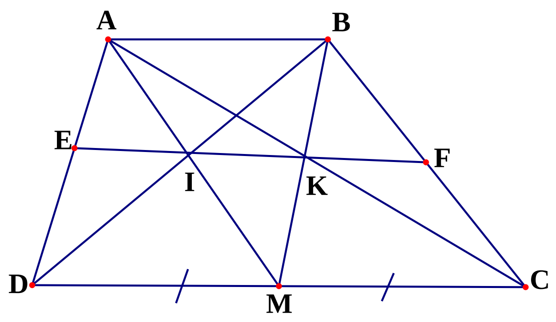
3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho hình thang $ABCD\left(AB//CD\right)$, M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của BM và AC.

1. Chứng minh $IK//AB$.
2. Đường thẳng IK cắt AD, BC theo thứ tự tại E, F. Chứng minh $EI = IK = KF$

Lời giải

1. Vì $AB//CD$ nên theo định lý Ta-lét ta có



$$\begin{cases} \dfrac{IM}{IA} = \dfrac{MD}{AB} \\ \dfrac{KM}{KB} = \dfrac{MC}{AB} \end{cases} \Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB} (\text{ vì } MC = MD)$$

Do đó theo định lý Ta-lét đảo ta có $IK//AB$.

2. Vì $IK//AB//CD$ nên theo định lý Ta-lét ta có:

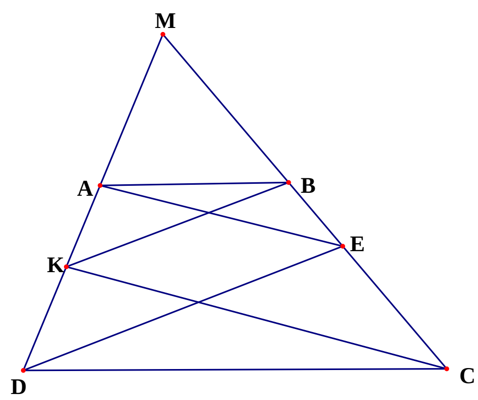
$$\frac{IE}{DM} = \frac{AI}{AM} = \frac{BI}{BD} = \frac{IK}{DM} \Rightarrow EI = IK$$

Tương tự ta có $FK = IK$. Vậy $EI = IK = KF$.

Bài 2. Điểm E thuộc cạnh bên BC của hình thang $ABCD$. Vẽ đường thẳng đi qua C và song song với AE, cắt AD ở K. Chứng minh BK song song với DE.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của AD và BC. Theo định lý Ta-lét ta có



$$\begin{cases} \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MB}{MC} \\ \dfrac{MA}{MK} = \dfrac{ME}{MC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MB.MD = MA.MC \\ ME.MK = MA.MC \end{cases}$$

Do đó $MB.MD = ME.MK \Rightarrow \dfrac{MB}{ME} = \dfrac{MK}{MD}$

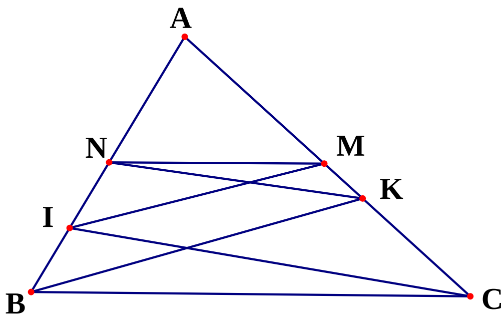
Vậy theo định lý Ta-lét đảo ta có $BK//DE$

Bài 3. Cho tam giác ABC, điểm I thuộc canh AB, điểm K thuộc cạnh AC. Vẽ MI song song với $BK\left(M \in AC\right)$, vẽ KN song song với $CI\left(N \in AB\right)$. Chứng minh MN song song với BC.

Lời giải

Theo định lý Ta-lét ta có

$$\begin{cases} \dfrac{AN}{AI} = \dfrac{AK}{AC} \\ \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AM}{AK} \end{cases} \Rightarrow AN \cdot AC = AI \cdot AK = AB \cdot AM$$



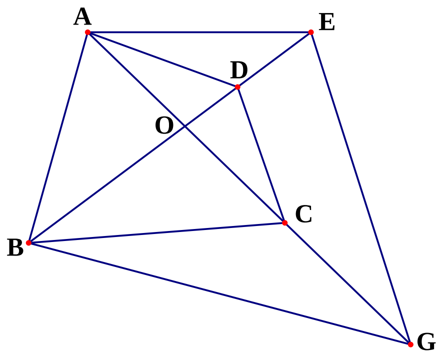
Suy ra $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AM}{AC}$.

Do đó theo định lý Ta-lét đảo ta có $MN // BC$.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Đường thẳng đi qua A song song với BC cắt BD tại E. Đường thẳng đi qua B song song với AD cắt AC tại G.

1. Chứng minh EG song song với DC
2. Giả sử AB song song với CD. Chứng minh: $AB^2 = EG.DC$.

Lời giải



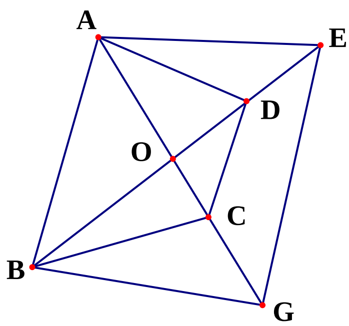
1. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $\begin{cases} AE // BC \\ BG // AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OA}{OC} \\ \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OG}{OA} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{OE}{OD} = \dfrac{OG}{OC}$

$\Rightarrow CD // EG$ (Định lý Ta-let đảo)

2. Ta có:

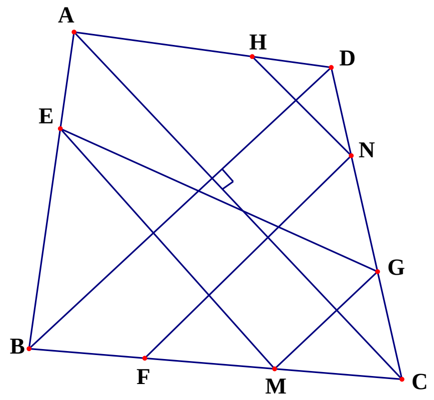
$$\begin{cases} EG // AB \\ BG // AD \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{EG} = \dfrac{OA}{OG} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{DC}{AB} \Rightarrow AB^2 = EG.DC$$



Bài 5. Tứ giác $ABCD$ có AC vuông góc và bằng BD. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số $1:2$. Chứng minh rằng $EG = FH$ và EG vuông góc FH.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của CF, N là trung điểm của DG.



Khi đó ta có $ME//AC$ và $ME = \frac{2}{3}AC$.

Đồng thời $NF//BD$ và $NF = \frac{2}{3}BD$.

Mặt khác $AC \perp BD, AC = BD$ nên $NF \perp ME$ và $NF = ME$.

Tương tự ta có $NH = MG$. Khi đó $\widehat{EMG} = \widehat{KNH} = 90^\circ$.

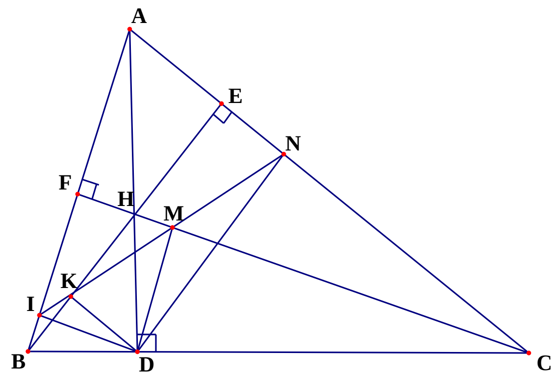
Vậy $\Delta EMG = \Delta FNH\,(\text{c}-\text{g}-\text{c})$

Từ đó ta có $EG = FH$ và $EG \perp FH$.

🗁 **Bài 6.** Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến BA, BE, CF, CA. Chứng minh bốn điểm I, K, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi H là trực tâm của ΔABC



Ta có: $\begin{cases} DI//FC \\ DK//EC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{BI}{IF} = \dfrac{BD}{DC} \\ \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BK}{KE} \end{cases}$

Suy ra $\frac{BI}{IF} = \frac{BK}{KE} \Rightarrow IK//FE$

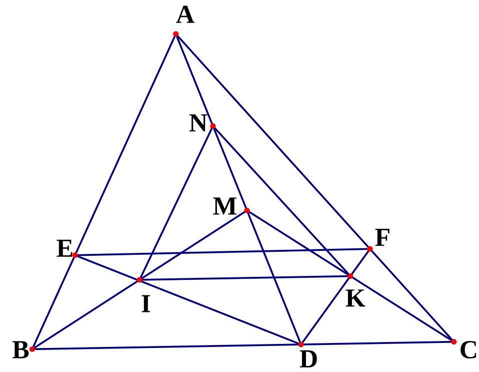
Tương tự ta có $MN//FE$

Ta lai có $\frac{IF}{FA} = \frac{DH}{HA} = \frac{NE}{EA} \Rightarrow IN//FE$

Vậy $IK//MN//IN \Rightarrow I, K, M, N$ thẳng hàng.

🗁 **Bài 7.** Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC, điểm M nằm giữa A và D. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của MB, MC. Gọi E là giao điểm của DI và AB, gọi F là giao điểm của DK và AC. Chứng minh rằng: EF song song với IK.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của AM

Ta có:

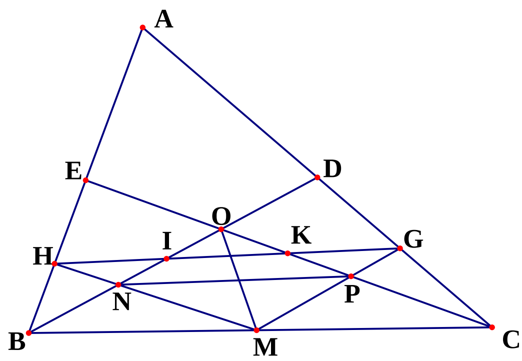
$$\begin{cases} IN // AE \\ KN // AF \end{cases} \Rightarrow \frac{EI}{ID} = \frac{FK}{KD} = \frac{AN}{ND}$$

Vậy $EF // IK$ (theo định lý Ta-lét đảo).

Bài 8. Cho tam giác ABC, có đường trung tuyến BD, CE. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC. Vẽ MG song song $BD(G \in AC)$, vẽ MH song song $CE(H \in AB)$.

1. Chứng minh BD và CE chia HG thành ba phần bằng nhau.
2. Chứng minh OM đi qua trung điểm HG (O là trọng tâm ΔABC).

Lời giải



1. Gọi I, K lần lượt là giao điểm của HG với BD, CE.

Gọi N là giao điểm của HM với BD,

P là giao điểm của MG với CE và O là trọng tâm ΔABC.

Theo định lý Ta-lét ta có $\frac{HI}{HG} = \frac{HN}{HM} = \frac{EO}{EC} = \frac{1}{3}$.

Tương tự ta có $\frac{GK}{HG} = \frac{1}{3}$

Vậy $HI = IK = KG$

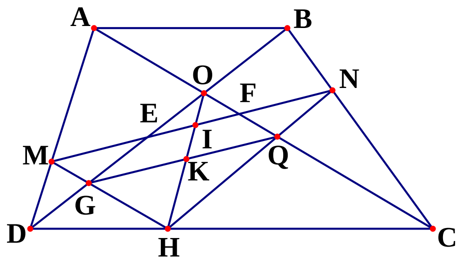
2. Ta có $\frac{HN}{HM} = \frac{GP}{GM} = \frac{1}{3} \Rightarrow NP // IK$

Mặt khác ta thấy $ONMP$ là hình bình hành nên OM đi qua trung điểm NP do đó OM cũng đi qua trung điểm của IK. Mà $IH = KG$ nên OM đi qua trung điểm của HG.

Bài 9. Cho hình thang $ABCD(AB // CD)$. Các điểm M, N thuộc cạnh AD, BC sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB}$. Gọi các giao điểm của MN với BD, AC theo thứ tự là E, F. Qua M kẻ đường thẳng song song AC cắt DC ở H.

1. Chứng minh rằng HN song song với BD.
2. Gọi I là giao điểm của HO và MN. Chứng minh rằng $IE = IF$, $ME = NF$ (O là giao điểm hai đường chéo AC và BD).

Lời giải



1. Ta có:
2. $\begin{cases} MH//AC \\ NH//BD \\ DH//RN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{DH}{HC} = \dfrac{DM}{MA} \\ \dfrac{DM}{MA} = \dfrac{BN}{NC} \end{cases}$

Do đó $\dfrac{DH}{HC} = \dfrac{BN}{NC} \Rightarrow HN//BD$.

3. Gọi G là giao điểm của HM và BD
   Q là giao điểm của HN và AC.

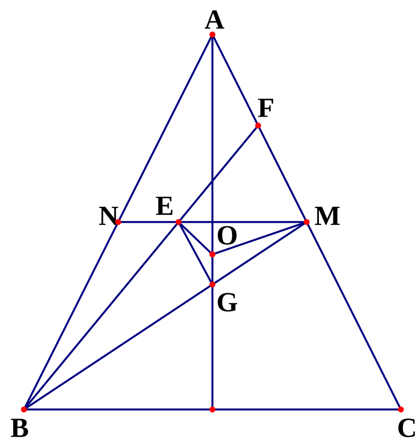
Ta có: $\dfrac{MG}{GH} = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{NQ}{QH} \Rightarrow GQ//MN$

Ta thấy $OGHQ$ là hình bình hành nên OH và GQ cắt nhau tại trung điểm K của mỗi đoạn thẳng. Do đó $IE = IF$ và $IM = IN$ nên $ME = NF$.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC, E là trọng tâm của tam giác ABM.

Chứng minh EO vuông góc với BM.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm ΔABC.

Gọi MN, BF là các đường trung tuyến của ΔABM.

Ta có: $\begin{cases} GO \perp BC \\ BC//MN \end{cases} \Rightarrow GO \perp MN$

Ta cũng có $\begin{cases} MO \perp AC \\ EG//AC \end{cases} \Rightarrow MO \perp EG$

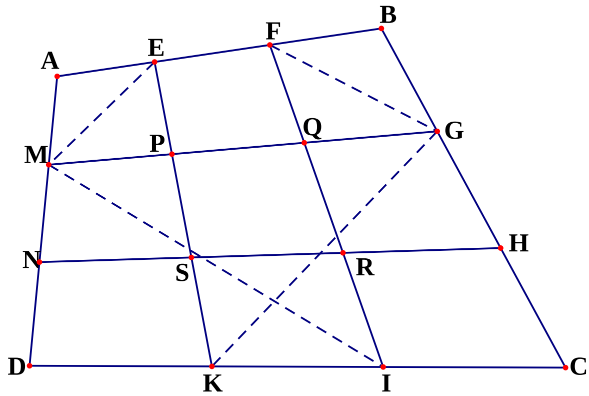
Vậy O là trực tâm ΔMEG nên $EO \perp BM$.

Bài 11. Chia mỗi cạnh của tứ giác thành ba phần bằng nhau rồi nối các điểm chia tương ứng trên các cạnh đối diện, ta được bốn đoạn thẳng (hai đoan thẳng nối các điểm chia tương ứng trên một cặp cạnh đối thì không cắt nhau). Chứng minh rằng:

1. Mỗi đoạn thẳng trong bốn đoan thẳng ấy đều bị chia thành ba phần bằng nhau.
2. Diện tích tứ giác ở giữa bằng $\frac{1}{9}$ diện tích tứ giác ban đầu.

Lời giải

Đặt tên các điểm như hình vẽ.



Ta có $\frac{AN}{AD}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow NE//BD\Rightarrow NE=\frac{1}{3}BD$.

Tương tự ta có $KG//BD$ và $KG=\frac{2}{3}BD$.

Do đó $NE//KG$ và $NE=\frac{1}{2}KG$

Dẫn dến $NP=\frac{1}{3}NG$.

Tương tự ta có $QG=\frac{1}{3}NG$. Vậy $NP=QG=PQ$.

Chứng minh tương tự cho các đoạn thẳng còn lại.

b) Ta có

$$\begin{cases} S_{\triangle EIK}=\frac{1}{2}S_{\triangle EID} \\ S_{\triangle IEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle IEB} \end{cases}\Rightarrow S_{EFIK}=\frac{1}{2}S_{EBDI}$$

$$\begin{cases} S_{\triangle BDI}=\frac{2}{3}S_{\triangle BDC} \\ S_{\triangle BDE}=\frac{2}{3}S_{\triangle DAB} \end{cases}\Rightarrow S_{EBID}=\frac{2}{3}S_{ABCD}$$

Do đó $S_{EFIK}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$, tương tự ta có $S_{PQRS}=\frac{1}{3}S_{EFIK}$

Vậy $S_{PQRS}=\frac{1}{9}S_{ABCD}$

Bài 3

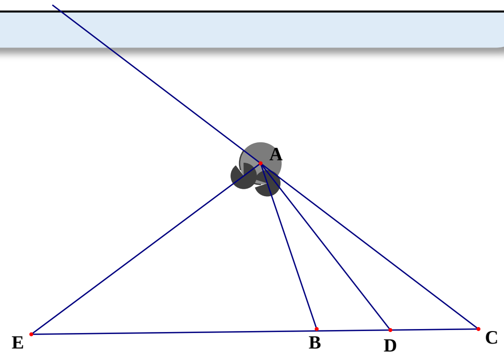
TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lí 1. Đường phân giác của một tam giác chia canh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai canh kề hai đoan thẳng ấy.

AD là đường phân giác trong của góc A nên $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

AE là đường phân giác ngoài của góc A nên $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$



Ta có thể nói: Nếu tam giác ABC có $\dfrac{AB}{AC} = k$ thì đường phân giác trong của góc A chia đoạn thẳng BC theo tỉ số k, và nếu $k \neq 1$ thì đường phân giác ngoài của góc A cũng chia ngoài đoạn thẳng BC theo tỉ số k.

2 Một số ví dụ

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ. Cho ΔABC có $BC = a; AC = b; AB = c$, đường phân giác AD.

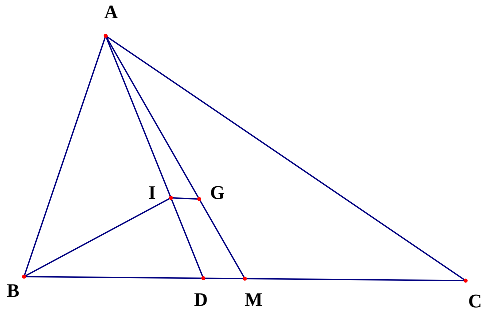
1. Tính độ dài $BD; DC$.
2. Tia phân giác của góc B cắt AD tại I. Tính tỉ số $AI : ID$.
3. Cho BC bằng trung bình cộng của AB và AC, gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh IG song song với BC

Lời giải

1. Vì AD là đường phân giác của ΔABC nên

$$\frac{DB}{AB}=\frac{DC}{AC}=\frac{DB+DC}{AB+AC}=\frac{a}{b+c}$$

Vậy $DB=\frac{ac}{b+c}$ và $DC=\frac{ab}{b+c}$



2. Vì BI là đường phân giác của ΔABD nên

$\frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD}=c:\frac{ac}{b+c}=\frac{b+c}{a}$.

3. Ta có $a=\frac{b+c}{2}$ khi đó $\frac{AI}{ID}=2$.

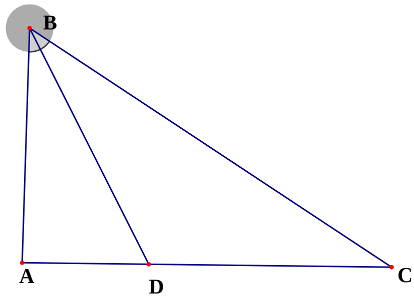
Mặt khác $\frac{AG}{GM}=2$, do đó $IG//BC$.

3 Bài tập tự luyện

Bài 219. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Biết $AD=3$ cm, $DC=5$ cm. Tính độ dài AB, BC ?

Lời giải

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có $BC^2-AB^2=AC^2=64$



Vì BD là tia phân giác nên $\frac{CB}{CD}=\frac{AB}{AD}$ suy ra

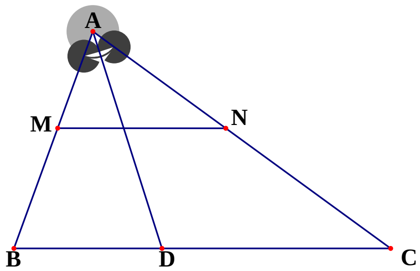
$$\frac{CB^2}{CD^2}=\frac{AB^2}{AD^2}=\frac{CB^2-AB^2}{CD^2-AD^2}=\frac{64}{16}$$

Vậy $CB=\frac{8\cdot 5}{4}=10$ cm và $AB=\frac{8\cdot 3}{4}=6$ cm

Bài 220. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Điểm M thuộc canh AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $BM=BD, CN=CD$. Chứng minh rằng MN song song với BC.

Lời giải

Vì AD là tia phân giác nên $\frac{DB}{AB}=\frac{DC}{AC}$



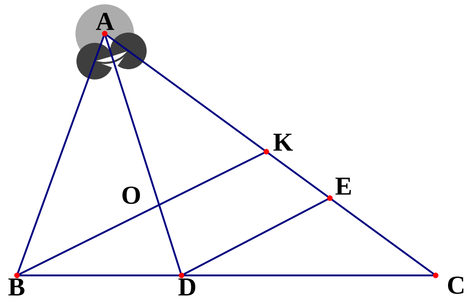
Mặt khác $BM = BD$ và $CN = DC$ nên

$$\frac{BM}{AB}=\frac{CN}{AC}\Rightarrow MN//BC$$

🗁 **Bài 221**. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, đường phân giác AD. Điểm O chia trong AD theo tỉ số $2:1$. Gọi K là giao điểm của BO và AC. Tính tỉ số $AK : KC$.

Lời giải

Kẻ $DE//BK\left(E\in AC\right)$. Ta có $\frac{AK}{KC}=\frac{AK}{KE}\cdot\frac{KE}{KC}$



mặt khác: $\frac{AK}{KE}=\frac{AO}{OD}=2;$ $\frac{KE}{EC}=\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{CA}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Suy ra $\frac{KE}{KC}=\frac{2}{5}$

Vậy $\frac{AK}{KC}=\frac{4}{5}$

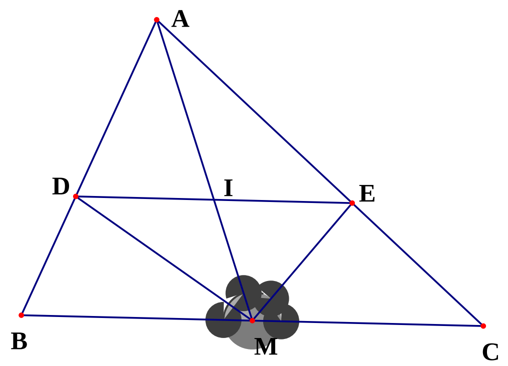
🗁 **Bài 222**. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Các tia phân giác của các góc $AMB,\ AMC$ cắt AB và AC theo thứ tự ở $D,\ E$. Gọi I là giao điểm của AM và DE.

1. Chứng minh rằng DE song song với BC.
2. Cho $BC = a, AM = m$. Tính độ dài DE.
3. Điểm I chuyển động trên đường nào nếu tam giác ABC có BC cố định, đường trung tuyến AM bằng m không đổi?
4. Tam giác ABC có điều kiện gì để DE là đường trung bình của tam giác đó?

Lời giải

1. Ta có $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{AE}{EC}\Rightarrow DE//BC$.

2. Ta có $\widehat{AMD}+\widehat{AME}=\dfrac{1}{2}\widehat{AMB}+\dfrac{1}{2}\widehat{AMC}=90^\circ$.



Đồng thời $\dfrac{ID}{BM}=\dfrac{AI}{AM}=\dfrac{IE}{MC}$ nên $ID=IE$.

Do đó $\triangle MDE$ vuông tại M nên $MI=\dfrac{1}{2}DE$.

Mặt khác $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AI}{AM}$.

Đặt $DE=x$ thì $\dfrac{x}{a}=\dfrac{m-\frac{x}{2}}{m}\Rightarrow DE=x=\dfrac{2am}{a+2m}$

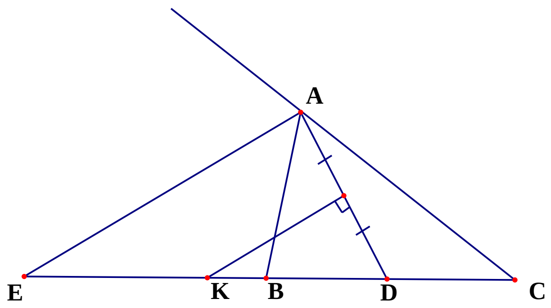
3. Ta có $MI=\dfrac{1}{2}DE=\dfrac{am}{a+2m}$ do đó I nằm trên đường tròn tâm M bán kính $\dfrac{am}{a+2m}$.

4. DE là đường trung bình của $\Delta ABC\Leftrightarrow AD=DB\Leftrightarrow MA=MB\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Bài 223. Trong tam giác ABC, đường phân giác AD chia cạnh đối diện thành các đoạn thẳng $BD=2$ cm, $DC=4$ cm. Đường trung trung trực của AD cắt đường thẳng BC ở K.

Tính độ dài KD?

Lời giải



Vẽ đường phân giác ngoài của góc A cắt BC tại E.

Ta có: $\dfrac{EB}{EC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{1}{2}$

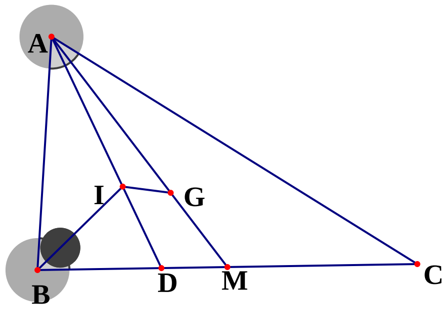
Suy ra $EB=BC=6$ cm, $ED=8$ cm.

Vậy $=\dfrac{ED}{2}=4$ cm.

Bài 224. Cho tam giác ABC có $AB=8$ cm, $AC=12$ cm, $BC=10$ cm. Gọi I là giao điểm của các đường phân giác, G là trọng tâm của tam giác ABC.

1. Chứng minh rằng IG song song với BC
2. Tính độ dài IG.

Lời giải



1. Ta có: $\frac{DB}{AB}=\frac{DC}{AC}=\frac{DB+DC}{AB+AC}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.

Đồng thời $\frac{IA}{ID}=\frac{AB}{BD}=2$ và $\frac{GA}{GM}=2$

Do đó IG song song với BC.

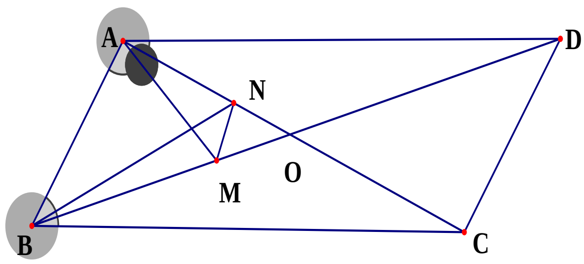
2. Ta có $BD=\frac{1}{2}AB=4$ cm và $BM=\frac{1}{2}BC=5$ cm

suy ra $DM=1$ cm

Vậy $=\frac{2}{3}$ cm.

Bài 225. Cho hình bình hành $ABCD$. Tia phân giác của góc BAD cắt BD ở M, tia phân giác của góc ABC cắt AC ở N. Chứng minh rằng MN song song với CD.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Đặt $AB=a,\ AD=b$

Ta có: $\frac{DM}{MB}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{DM}{DM+MB}=\frac{b}{b+a}$.

$\Rightarrow\frac{DM}{2DO}=\frac{b}{b+a}\Rightarrow\frac{DM}{DO}=\frac{2b}{b+a}$. (1)

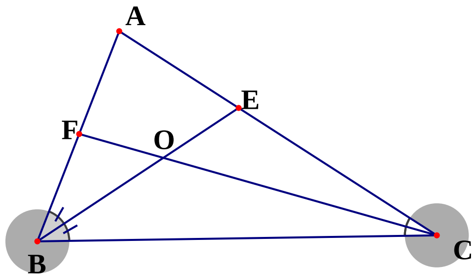
Tương tự ta có: $\frac{CN}{CO}=\frac{2b}{b+a}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DM}{DO}=\frac{CN}{CO}\Rightarrow MN//\text{CD}$

Bài 226. Cho tam giác ABC có các đường phân giác BE,CF cắt nhau ở O và $\frac{BO}{BE}\cdot\frac{CO}{CF}=\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

Lời giải

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$.



Ta tính được: $CE = \dfrac{ab}{a+c}, \dfrac{BO}{OE} = \dfrac{a+c}{b}, \dfrac{BO}{BE} = \dfrac{a+c}{a+b+c}$

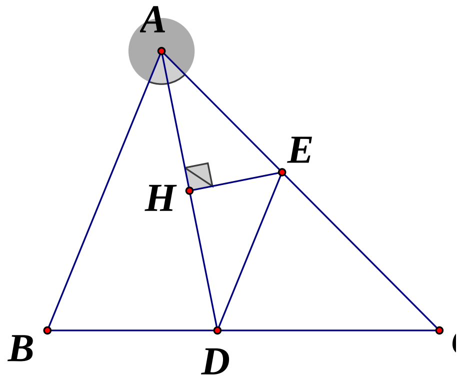
Tương tự $\dfrac{CO}{CF} = \dfrac{a+b}{a+b+c}$.

Suy ra $\dfrac{(a+c)(a+b)}{a+b+c} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

Do đó ΔABC vuông tại A.

Bài 227. Tính diện tích tam giác ABC, biết rằng $AB = 14$ cm, $AC = 35$ cm, đường phân giác AD bằng 12 cm.

Hướng dẫn: Vẽ $DE // AB$ và tính diện tích tam giác ADE.



Vẽ $DE // AB (E \in AC)$ và H là hình chiếu của E trên AD.

Ta có $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{EA}{35 - EC} = \dfrac{14}{35} \Rightarrow EA = 10$ cm.

Mặt khác $\dfrac{ED}{AB} = \dfrac{EC}{AC} \Rightarrow ED = 10$ cm.

Do đó ΔAED cân tại $E \Rightarrow AH = \dfrac{1}{2} AD = 6$ cm.

Theo định lý Py-ta-go ta có $EH = \sqrt{AE^2 - AH^2} = 8$ cm.
Ta có

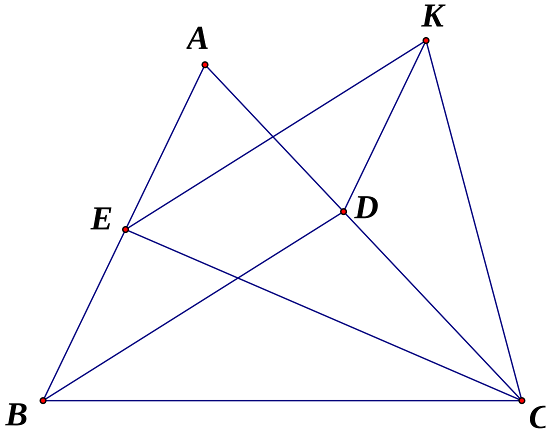
$S_{\Delta ADE} = \dfrac{1}{2} EH \cdot AD = 48\,\text{cm}^2 \Rightarrow S_{\Delta ADC} = \dfrac{AC}{AE} S_{\Delta ADE} = 16$

$\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{14}{35} \Rightarrow \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{49}{35}$

Vậy $S_{\Delta ABC} = \dfrac{BC}{DC} S_{\Delta ADC} = 235,2 \quad cm^2$

Bài 228.
Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c (b > c)$, các đường phân giác BD, CE

1. Tính các độ dài BD, CE rồi suy ra $CD > BE$.
2. Vẽ hình bình hành $BEKD$. Chứng minh rằng $CE > EK$.
3. Chứng minh rằng $CE > BD$.



1. Tương tự ví dụ đầu bài, ta chứng minh được

$CD = \dfrac{ab}{a+c}, BE = \dfrac{ac}{a+b}$

Mà $b > c$ nên

$\dfrac{ab}{a+c} > \dfrac{ac}{a+c} > \dfrac{ac}{a+b} \Rightarrow CD > BE$

2. Ta có $CD > BE$ và $BE = DK$ nên

$CD > DK \Rightarrow \widehat{CKD} > \widehat{KCD}$.

Ta lại có $b > c \Rightarrow \widehat{ABD} > \widehat{ACE}$ mà $\widehat{ABD} = \widehat{EKD}$

nên $\widehat{EKD} > \widehat{ACE}$.

Vậy ta có

$\widehat{CKD} + \widehat{EKD} > \widehat{KCD} + \widehat{ACE} \Rightarrow \widehat{EKC} > \widehat{KCE} \Rightarrow EC > E$

3. Ta có $EC > CK$ mà $EK = BD$ nên $CE > BD$.

Bài 4

Các trường hợp đồng dạng của tam giác

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lí 1. Hai tam giác đồng dạng với nhau nếu

- Ba cạnh của tam giác này tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia (trường hợp cạnh – cạnh – cạnh)
- Hai canh của tam giác này tương ứng tỉ lệ với hai canh của tam giác kia và các góc xen giũa hai cạnh ấy bằng nhau (trường hợp cạnh - góc – cạnh).
- Hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia (trường hợp góc - góc).

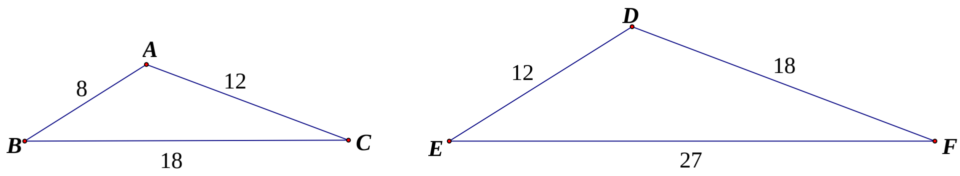
2 Một số ví dụ

Dạng 1. Trường hợp cạnh – cạnh – cạnh

Phương pháp giải:

Ví dụ 1. Hai tam giác sau có đồng dạng không nếu độ dài các cạnh của chúng bằng $8\text{cm}, 12\text{ cm}, 18\text{cm}$ và $27\text{cm}, 18\text{cm}, 12\text{cm}$?

Lời giải



Gọi hai tam giác có độ dài các cạnh theo yêu cầu đề bài là

ΔABC và ΔDEF.

Xét ΔABC và ΔDEF ta có

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF\,(\text{c}-\text{c}-\text{c})$

Ví dụ 2. Có thể khẳng định rằng hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau và ba cặp góc bằng nhau thì hai tam giác ấy bằng nhau hay không?

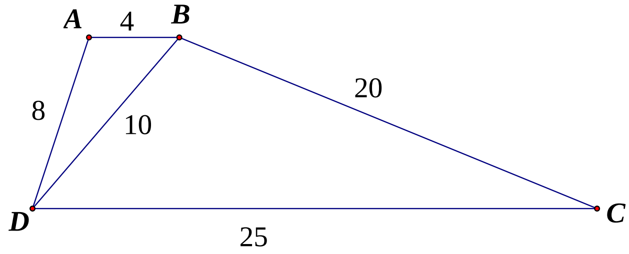
Lời giải

Không thể khẳng định như vậy. Hai tam giác ở Ví dụ 1 có hai cặp cạnh bằng nhau và ba cặp góc bằng nhau (vì hai tam giác đồng dạng) nhưng không phải là hai tam giác bằng nhau.

3 Bài tập tự luyện

Bài 1. Tứ giác $ABCD$ có $AB=4\text{cm}, BC=20\text{cm}, CD=25\text{cm}, AD=8\text{cm}, BD=10\text{cm}$. Hãy xác định dạng của tứ giác.

Lời giải



Xét ΔABD và ΔBDC ta có

$\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC$ (c – c – c)

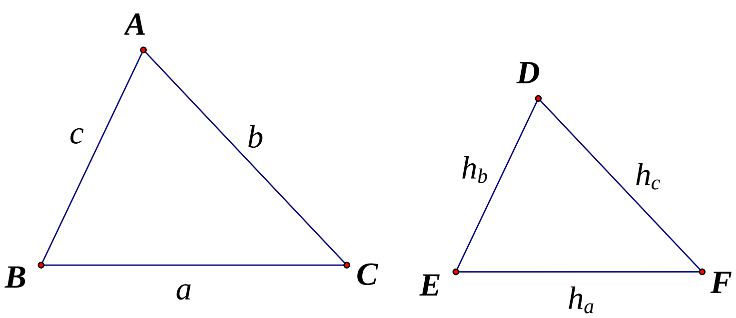
$\Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{BDC}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AB//CD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình thang.

Bài 2. Tam giác ABC có $BC=a, AC=b, AB=c$ và $a^2=bc$. Chứng minh rằng tam giác ABC đồng dạng với tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài ba đường cao của tam giác ABC.

Lời giải



Gọi độ dài ba đường cao kẻ từ A, B, C của ΔABC lần lượt là h_a, h_b, h_c.

Gọi tam giác ΔDEF là tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài ba đường cao của ΔABC.

Ta có $\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot h_b=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$ (cùng là diện tích ΔABC).

$\Rightarrow a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c$

$\Rightarrow \dfrac{a\cdot h_a}{bc}=\dfrac{b\cdot h_b}{bc}=\dfrac{c\cdot h_c}{bc}$

Mà $bc=a^2$ (giả thiết) nên $\dfrac{a\cdot h_a}{a^2}=\dfrac{h_b}{c}=\dfrac{h_c}{b}$.

$\Rightarrow \dfrac{h_a}{a}=\dfrac{h_b}{c}=\dfrac{h_c}{b}$

Xét ΔABC và ΔDEF ta có

$\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{BC}{EF}\left(\text{ vì } \dfrac{h_a}{a}=\dfrac{h_b}{c}=\dfrac{h_c}{b}\right)$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DEF$ (c – c – c)

Vậy tam giác ABC đồng dạng với tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài ba đường cao của tam giác ABC

Dạng 2. Trường hợp cạnh – góc – cạnh

Phương pháp giải:

Ví dụ 3. Tam giác ABC có $AB=12\,cm, AC=18\,cm, BC=27\,cm$, điểm D thuộc cạnh BC sao cho $CD=12\,cm$. Tính độ dài AD.

Lời giải

Xét ΔCAD và ΔCBA ta có

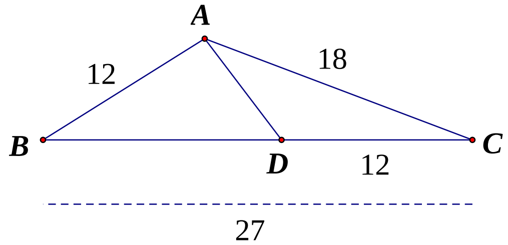
$\widehat{C}$ là góc chung,

$\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \Delta CAD \backsim \Delta CBA(c-g-c)$

$\dfrac{AD}{BA}=\dfrac{CD}{CA}$

$\Rightarrow AD=8$ cm



🗁 **Bài 3.** Tam giác ABC có $AB=4\text{cm}, AC=6\text{cm}, BC=8\text{cm}, M$ là trung điểm của BC, D là trung điểm của BM. Tính độ dài AD.

Lời giải

M là trung điểm của BC nên $BM=\dfrac{BC}{2}=4$

D là trung điểm của BM nên $BD=\dfrac{BM}{2}=2$.

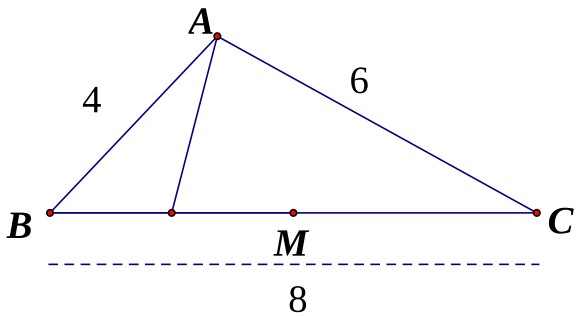
Xét ΔBAD và ΔBCA ta có

$\hat{B}$ là góc chung,

$\Rightarrow \Delta BAD \backsim \Delta BCA(\text{c}-\text{g}-\text{c})$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{CA}=\dfrac{BA}{BC}$

$\Rightarrow AD=3(\text{cm})$



🗁 **Bài 4.** Tam giác ABC có $AB=4\text{cm}, AC=5\text{cm}, BC=6\text{cm}$. Chứng minh rằng $\hat{A}=2\hat{C}$.

Lời giải

Ta có $BE=BA+AE=9(\text{cm})$

Xét ΔBAC và ΔBCE ta có

$\hat{B}$ là góc chung,

$\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \Delta BAC \backsim \Delta BCE(\text{c}-\text{g}-\text{c})$

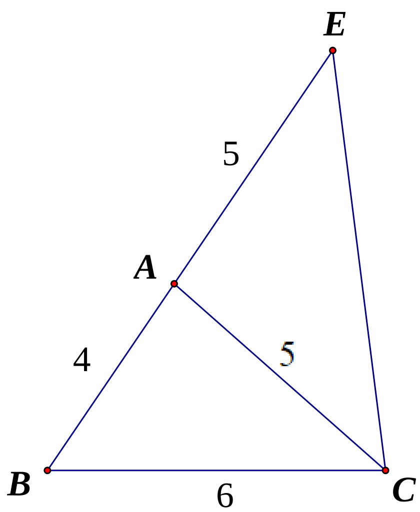
$\Rightarrow \widehat{ACB}=\hat{E}$ (1)

Ta có $AE=AC=5\text{cm} \Rightarrow \Delta ACE$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ACE}=\hat{E}$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{ACB}+\widehat{ACE}=\hat{E}+\hat{E} \Rightarrow \widehat{BCE}=2\cdot\hat{E}$

Mặt khác $\widehat{ACB}=\hat{E}, \widehat{BAC}=\widehat{BCE}$ (vì $\Delta BAC \backsim \Delta BCE$) nên $\widehat{BAC}=2\cdot\widehat{ACB}$.

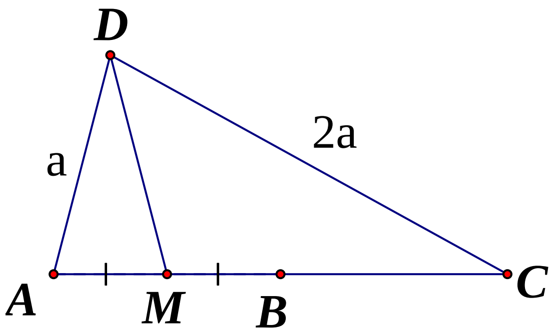


🗁 **Bài 5.** Cho đoạn thẳng $AB=a$. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B. Vẽ điểm D sao cho $DA=a$, $DC=2a$. Gọi M là trung điểm của

Lời giải

Vì C đối xứng với A qua B nên $AC = 2AB = 2a$

Vì M là trung điểm của AB nên $AM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.



Xét ΔMAD và ΔDAC ta có

$\hat{A}$ là góc chung,

$\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \Delta MAD \backsim \Delta DAC(\text{c}-\text{g}-\text{c})$

$\Rightarrow \dfrac{MD}{CD} = \dfrac{AD}{AC}$

$\Rightarrow MD = a$

Bài 6. Chỉ bằng compa, hãy dựng trung điểm M của đoạn thẳng AB cho trước, cho biết tia Bx là tia đối của tia BA.

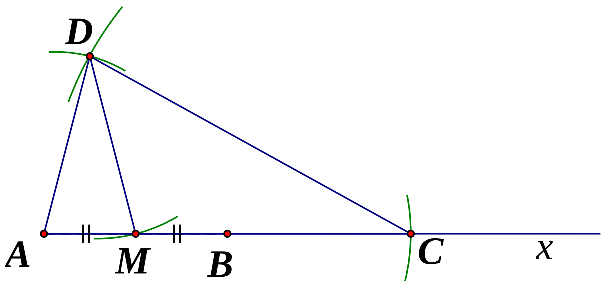
Lời giải

Dựng đường tròn $(B; BA)$ cắt tia Bx ở C.

Dựng hai đường tròn $(A; AB)$ và $(C; CA)$ cắt nhau tại D.

Dựng đường tròn $(D; DA)$ cắt AB ở M.

Vậy ta đã dựng được M là trung điểm của AB



Dạng 3. Trường hợp góc - góc

Phương pháp giải:

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC đường phân giác AD. Giả sử $AC = b, AB = c, DB = m$, $DC = n.$ Kẻ tia Cx sao cho $\widehat{DCx} = \widehat{BAD}$ (tia Cx khác phía với A đối với BC).

1. Chứng minh rằng $AD \cdot DI = mn$.
2. Chứng minh rằng $AD^2 = bc - mn$.

Lời giải

1. Chứng minh rằng $AD \cdot DI = mn$.

Xét ΔABD và ΔCID ta có

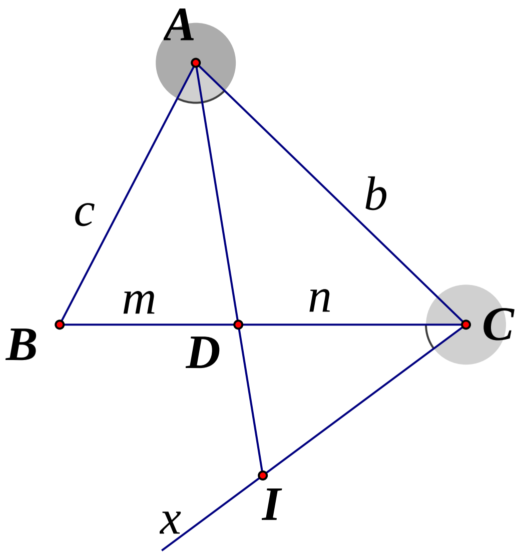
$\widehat{BAD} = \widehat{ICD}$ (giả thiết)

$\widehat{BDA} = \widehat{IDC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta CID (g-g)$

$\Rightarrow \hat{B} = \hat{I}$ và $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{CD}{ID}$

$\Rightarrow AD.ID = DB.DC = mn$ (1)



2. Chứng minh rằng $AD^2 = bc - mn$.

Xét ΔABD và ΔAIC ta có

$\widehat{BAD} = \widehat{IAC}$ (giả thiết)

$\hat{B} = \hat{I}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta AIC (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AI} = \dfrac{AD}{AC}$

$\Rightarrow AD \cdot AI = AC \cdot AB = bc$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$AD \cdot AI - AD \cdot DI = bc - mn$$

$\Rightarrow AD(AI - DI) = bc - mn \Rightarrow AD^2 = bc - mn$

Bài 7. Cho tam giác $ABC (AB < AC)$ đường phân giác AD. Đường trung trực của AD cắt BC ở K

1. Chứng minh rằng $\Delta KAB \backsim \Delta KCA$.
2. Tính độ dài KD biết rằng $BD = 2\,\text{cm}, DC = 4\,\text{cm}$.

Lời giải

1. Chứng minh rằng $\Delta KAB \backsim \Delta KCA$.

Do K thuộc đường trung trực của AD nên

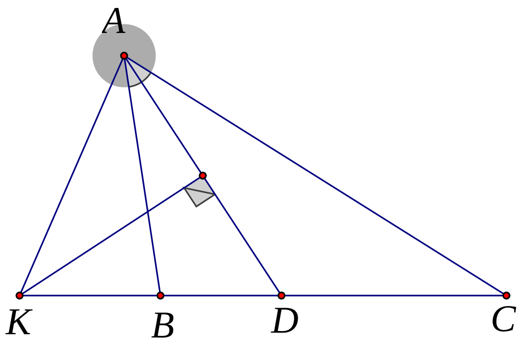
$$KA = KD.$$

$\Rightarrow \Delta KAD$ cân tại K

$\Rightarrow \widehat{KDA} = \widehat{KAD}$

$\Rightarrow \widehat{DAC} + \widehat{DCA} = \widehat{KAB} + \widehat{BAD}$ ($\widehat{KDA}$ là góc ngoài tại đỉnh D của ΔDAC)

Mà $\widehat{DAC} = \widehat{BAD}$ (AD là phân giác của ΔABC) nên $\widehat{DCA} = \widehat{KAB}$



Xét ΔKAB và ΔKCA ta có

$\widehat{AKC}$ là góc chung,

$\widehat{KAB} = \widehat{KCA}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta KAB \backsim \Delta KCA$.

2. Tính độ dài KD biết rằng $BD = 2\,\text{cm}, DC = 4\,\text{cm}$.

Ta có

$\dfrac{KB}{KA} = \dfrac{AB}{AC}$(vì $\Delta KAB \backsim \Delta KCA$),

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$($AD$ là phân giác của ΔABC).

Suy ra $\dfrac{KB}{KA} = \dfrac{1}{2}$.

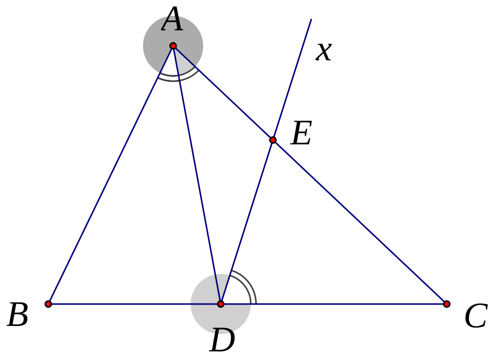
Mà $KA = KD$ (chứng minh trên) nên $KD = 2KB$.

$\Rightarrow KD = 2BD = 4(\text{cm})$

Bài 8. Cho tam giác $ABC(AB < AC)$ có đường phân giác AD. Vẽ tia Dx sao cho $\widehat{CDx} = \widehat{BAC}$ (tia Dx và A cùng phía đối với BC), tia Dx cắt AC ở E. Chứng minh rằng

1. $\Delta ABC \backsim \Delta DEC$
2. $DE = DB$

Lời giải



1. Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta DEC$.

Xét ΔABC và ΔDEC ta có

$\widehat{ACB}$ là góc chung,

$\widehat{CAB} = \widehat{CDE}$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DEC(\text{g}-\text{g})$

2. Chứng minh $DE = DB$

Ta có $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DC}$(vì $\Delta ABC \backsim \Delta DEC$)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DC}$

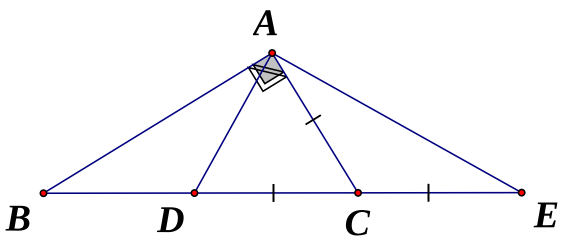
Mà $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$(vì AD là phân giác của ΔABC) nên $DE = BD$

Bài 9. Trên cạnh huyền CB của tam giác vuông ABC, lấy điểm D sao cho $CD = CA$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua C

1. Chứng minh rằng các tam giác ABD và EBA đồng dạng.

2. Gọi $BC = a, AC = b, AB = c$. So sánh a^2 với $b^2 + c^2$ mà không dùng định lí Py -ta-go.

Lời giải



1.Chứng minh rằng các tam giác ABD và EBA đồng dạng.

ΔADE có AC là đường trung tuyến (E đối xứng với D qua C) và $AC = \dfrac{1}{2}DE$(cùng bằng CD).

$\Rightarrow \Delta ADE$ vuông tại A.

$\Rightarrow \widehat{DAC} + \widehat{CAE} = 90^\circ$

Mà $\Rightarrow \widehat{DAC} + \widehat{BAD} = 90^\circ$ (ΔABC vuông tại A)

nên $\widehat{CAE} = \widehat{BAD}$

ΔACE có $AC = CE$ (cùng bằng CD) $\Rightarrow ACE$ cân tại C

$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CEA}$

Xét ΔABD và ΔEBA ta có

$\widehat{ABE}$ là góc chung,

$\widehat{BAD} = \widehat{BEA}$ (cùng bằng $\widehat{CAE}$)

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta EBA(\text{g}-\text{g})$

2.Gọi $BC = a, AC = b, AB = c$. So sánh a^2 với $b^2 + c^2$ mà không dùng định lí Py-ta-go.

Ta có $\Delta ABD \backsim \Delta EBA$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{BD}{BA} \Rightarrow \dfrac{c}{a+b} = \dfrac{a-b}{c} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

Bài 10. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Chứng minh rằng $AD^2 < AB \cdot AC$.

Lời giải

Lấy E trên AC sao cho $\widehat{ADE} = \hat{B}$

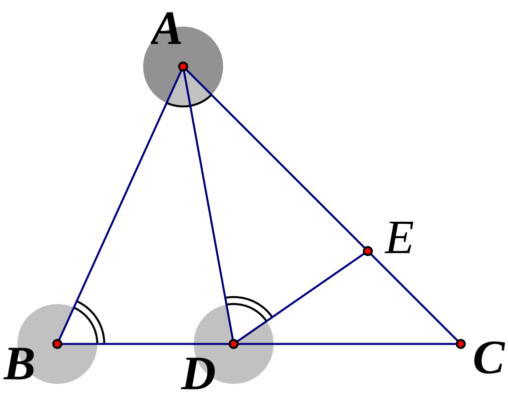
Xét ΔADE và ΔABD ta có

$\widehat{ADE} = \widehat{ABD}$ (giả thiết)

$\widehat{DAE} = \widehat{BAD}$($AD$ là phân giác của ΔABC)

$\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABD(\text{g}-\text{g})$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AE < AB \cdot AC.$



Bài 11. Tam giác ABC có $\hat{B} = 2\hat{C}, AB = 4\text{cm}, BC = 5\text{cm}$. Tính độ dài AC.

Lời giải

Trên tia đối của tia BA lấy $BD = BC$.

$\Rightarrow \Delta BCD$ cân tại B

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{BDC}$($\widehat{ABC}$ là góc ngoài tại đỉnh B)

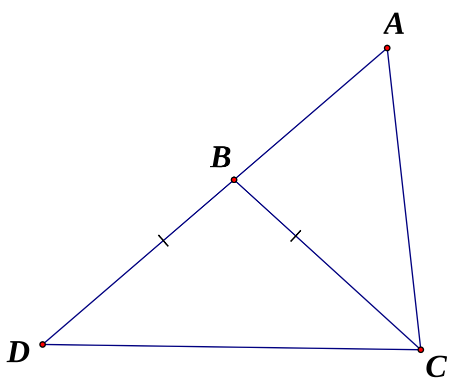
Xét ΔACD và ΔABC ta có

$\widehat{BAC}$ là góc chung,

$\widehat{ADC} = \widehat{ACB}\left(\text{ cùng bằng } \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}\right)$

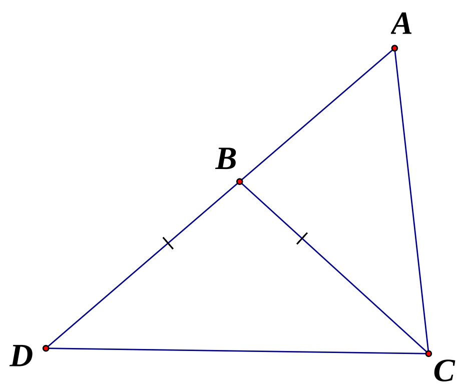
$\Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta ABC(\text{g}-\text{g})$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow AC = 6(\text{cm})$



Bài 12. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC có $\hat{B} = 2\hat{C}$ biết rằng số đo các cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải



Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$ là ba số tự nhiên liên tiếp.

Trên tia đối của tia BA lấy $BD = BC$.

$\Rightarrow \Delta BCD$ cân tại B

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{BDC}$ ($\widehat{ABC}$ là góc ngoài tại đỉnh B)

Xét ΔACD và ΔABC ta có

$\widehat{BAC}$ là góc chung,

$\widehat{ADC} = \widehat{ACB}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}\widehat{ABC}$)

$\Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta ABC (\text{g}-\text{g})$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD = AB(AB + BD) \Rightarrow b^2 = c^2 + ac$

Ta có $b > c$ nên chỉ có hai khả năng là $b = c + 1$ hoặc $b = c + 2$.

- Nếu $b = c + 1$ thì từ (1) suy ra $(c+1)^2 = c^2 + ac \Rightarrow 2c + 1 = ac \Rightarrow c(a-2) = 1$, loại vì $c = 1$, $a = 3, b = 2$ không là các cạnh của một tam giác.

- Nếu $b = c + 2$ thì từ (1) suy ra $(c+2)^2 = c^2 + ac \Rightarrow 4c + 4 = ac \Rightarrow c(a-4) = 4$. Xét c lần lượt bằng 1, 2, 4 thì chỉ có $c = 4, a = 5, b = 6$ thỏa mãn bài toán.

Bài 13. Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Tính độ dài BD biết rằng $BC = 5\,\text{cm}$, $AC = 20\,\text{cm}$.

Lời giải

Ta có BD là phân giác của ΔABC nên

$$\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}=4 \Rightarrow DA=4DC.$$

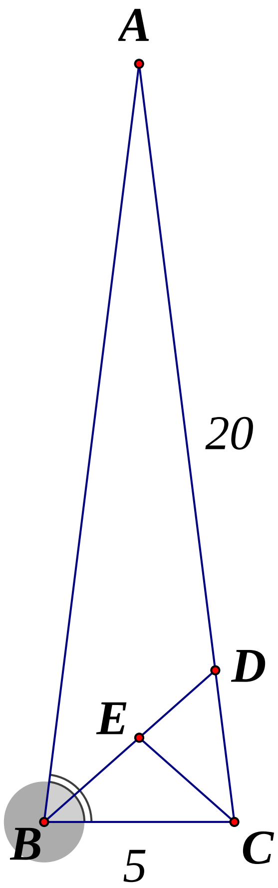
Mà $DA+DC=20$ nên $5DC=20 \Rightarrow DC=4(\text{cm})$

Cách 1. Làm tiếp như Bài 9

Cách 2. Tính BD theo công thức tổng quát

$BD^2=AB\cdot BC-AD\cdot DC$ nêu ở Ví dụ 4 .

Cách 3. Vẽ đường phân giác CE của ΔCBD $(E\in BD)$.



Ta có $\widehat{ABD}=\widehat{CBD}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}$ (BD là phân giác của $\widehat{ABC}$)

$\widehat{DCE}=\widehat{ECB}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$ (CE là phân giác của $\widehat{ACB}$)

$\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$ (ΔABC cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{CBD}=\widehat{DCE}=\widehat{ECB}$

$\Rightarrow \Delta EBC$ cân tại E

Đặt $DE=x, EB=y$, ta có $CE=y$

Xét ΔCED và ΔBCD ta có

$\widehat{BDC}$ là góc chung,

$\widehat{DCE}=\widehat{DBC}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta CED \backsim \Delta BCD(\text{g}-\text{g})$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BD}=\frac{ED}{CD}=\frac{EC}{BC}$$

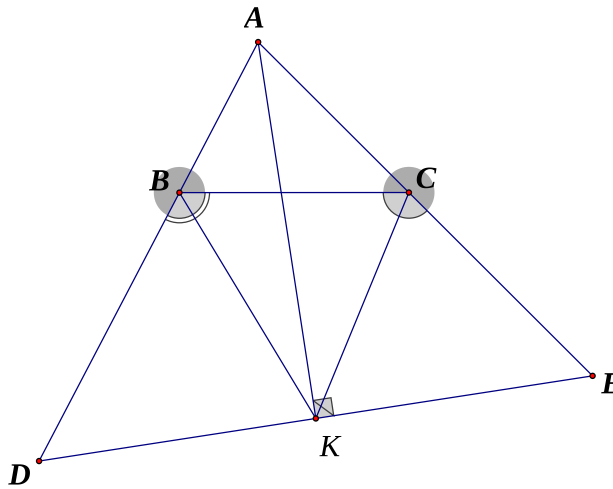
$$\Rightarrow \frac{4}{BD}=\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{x+y}{9}=\frac{BD}{9}$$ (tính chất dãy tỉ số bằng nhau).

$\Rightarrow BD^2=36 \Rightarrow BD=6(\text{cm})$

Bài 14. Các đường phân giác các góc ngoài tại các đỉnh B và C của ΔABC cắt nhau ở K. Đường thẳng vuông góc với AK tại K cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự ở D, E. Chứng minh rằng.

1. Các tam giác DBK và EKC đồng dạng.
2. $DE^2=4BD\cdot CE$

Lời giải



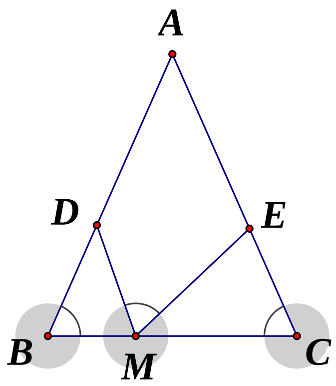
1. Chứng minh các tam giác DBK và EKC đồng dạng.
Vì các đường phân giác các góc ngoài tại các đỉnh B và C của ΔABC
cắt nhau ở K nên K cách đều AB, AC và BC. Suy ra AK là phân giác của $\widehat{BAC}$.
ΔADE có AK vừa là phân giác vừa là đường cao nên ΔADE cân tại A
Đặt $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \alpha, \widehat{CBK} = \widehat{KBD} = \beta, \widehat{BCK} = \widehat{KCE} = \gamma$
Tứ giác $BCED$ có $\widehat{DBC} + \widehat{BCE} + \widehat{CED} + \widehat{EDB} = 360^\circ$.
$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$

Mặt khác $\widehat{CKE} + \beta + \gamma = 180°$ (tổng ba góc trong ΔCKE) nên $\widehat{CKE} = \beta$
Xét ΔDBK và ΔEKC ta có
$\widehat{DBK} = \widehat{ECK} = \beta$
$\widehat{BDK} = \widehat{CEK} = \alpha$
$\Rightarrow \Delta DBK \backsim \Delta EKC$ (g – g)
2. Chứng minh $DE^2 = 4BD \cdot CE$.
ΔADE cân tại A có AK là đường cao nên AK cũng là trung tuyến.
Vì $\Delta DBK \backsim \Delta EKC$ (chứng minh trên) nên $\dfrac{DK}{CE} = \dfrac{BD}{KE}$
$\Rightarrow DK.KE = BD.CE$.
$\Rightarrow \dfrac{1}{4}DE^2 = BD \cdot CE$(vì K là trung điểm của DE)
$\Rightarrow DE^2 = 4BD \cdot CE$

Bài 15. Cho tam giác ABC cân tại A, góc đáy α. Các điểm D, M, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $\widehat{DME} = \alpha$. Chứng minh rằng các tam giác BDM và CME đồng dạng.

Lời giải

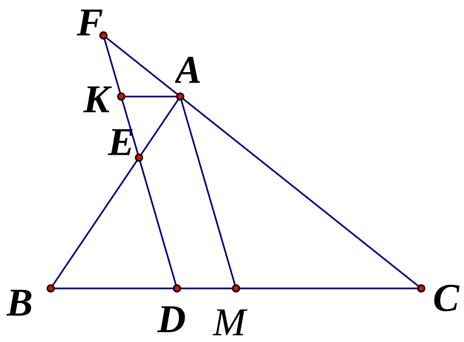
Ta có $\widehat{B} + \widehat{BMD} + \widehat{BDM} = 180°$ (tổng ba góc trong ΔBDM),
$\widehat{DME} + \widehat{BMD} + \widehat{CME} = 180°$ (B, M, C thẳng hàng),
$\widehat{B} = \widehat{DME} = \alpha$
$\Rightarrow \widehat{DBM} = \widehat{CME}$
Xét ΔBDM và ΔCME ta có
$\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$,
$\widehat{BDM} = \widehat{CME}$ (chứng minh trên).
$\Rightarrow \Delta BDM \backsim \Delta CME$ (g – g)



Bài 16. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F.

1. Chứng minh rằng khi điểm D chuyển động trên cạnh BC thì tổng $DE+DF$ có giá trị không đổi.
2. Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt EF ở K. Chứng minh rằng K là trung điểm của EF

Lời giải



1.Chứng minh rằng khi điểm D chuyển động trên cạnh BC thì tổng $DE+DF$ có giá trị không đổi.

Ta có $\frac{DE}{AM}=\frac{BD}{BM}$ (hệ quả định lý Ta-lét, $DE//AM$),

$\frac{DF}{AM}=\frac{CD}{CM}$ (hệ quả định lý Ta-lét, $AM//DF$)

$\Rightarrow \frac{DE}{AM}+\frac{DF}{AM}=\frac{BD}{BM}+\frac{CD}{CM}=\frac{BC}{BM}=2$

Vậy $DE+DF=2AM$ không đổi khi D chuyển động trên cạnh BC

2.Chứng minh rằng K là trung điểm của EF

Xét ΔFAK và ΔACM ta có

$\widehat{FAK}=\widehat{ACM}$ (đồng vị, $AK//BC$)

$\widehat{AFK}=\widehat{CAM}$ (đồng vị, $AM//DF$)

$\Rightarrow \Delta FAK \backsim \Delta ACM$ (g – g)

Xét ΔAEK và ΔBAM ta có

$\widehat{AEK}=\widehat{BAM}$ (so le trong, $DF//AM$)

$\widehat{EAK}=\widehat{ABM}$ (so le trong, $AK//BC$)

$\Rightarrow \Delta AEK \backsim \Delta BAM$ (g – g)

$\Rightarrow \frac{EK}{AM}=\frac{AK}{BM}=\frac{AK}{CM}$ (M là trung điểm của BC).

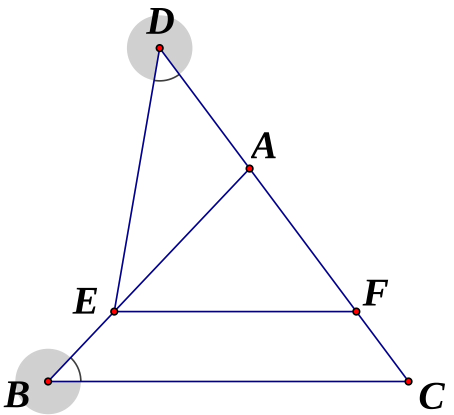
Mặt khác $\frac{FK}{AM}=\frac{AK}{CM}$ (vì $\Delta FAK \backsim \Delta ACM$) nên

$EK=FK$.

Suy ra K là trung điểm của EF.

Bài 17. Cho các tam giác ABC và $A'B'C'$ có $\hat{A}+\widehat{A'}=180^\circ, \hat{B}=\widehat{B'}$. Gọi $BC=a, AC=b, AB=c$, $B'C'=a', A'C'=b', A'B'=c'$. Chứng minh rằng $aa'=bb'+cc'$.

Lời giải



Vẽ ΔADE bằng $\Delta A'B'C''$ C' như hình bên. Kẻ $EF//BC$.

Do $EF//BC$ nên $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$ (định lý Ta-lét).

$\Rightarrow \dfrac{b'}{c}=\dfrac{AF}{b}\Rightarrow bb'=c\cdot AF$ (1)

Xét ΔABC và ΔEDF ta có

$\widehat{ACB}=\widehat{EFD}$ (đồng vị $EF//BC$)

$\hat{B}=\hat{D}$ (cùng bằng $\widehat{B'}$)

$\Rightarrow \Delta ABC \# \Delta EDF$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{BC}{DF}=\dfrac{AB}{ED}\Rightarrow \dfrac{a}{AF+c'}=\dfrac{c}{a'}\Rightarrow aa'=c\cdot AF+cc'$ (2)

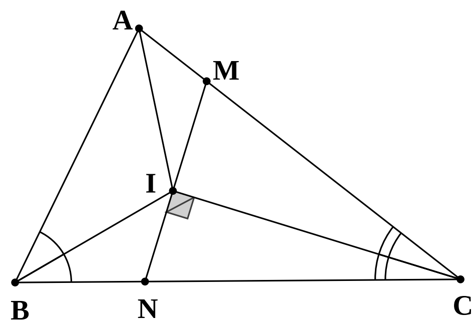
Từ (1) và (2) suy ra $aa'=bb'+cc'$

Bài 18. Cho tam giác ABC, I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng vuông góc với CI tại I cắt AC, BC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng

1. $\Delta AIM \square \Delta ABI$
2. $\dfrac{AM}{BN}=\left(\dfrac{AI}{BI}\right)^2$

Lời giải

1. Chứng minh $\Delta AIM \square \Delta ABI$



Ta có $\widehat{CMI}=90^\circ-\widehat{MCI}$ (ΔCMI vuông tại I).

$\Rightarrow \widehat{CMI}=90^\circ-\dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$ (CI là phân giác của $\widehat{ACB}$).

$\Rightarrow \widehat{CMI}=\dfrac{180^\circ-\widehat{ACB}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{CMI}=\dfrac{\widehat{ABC}+\widehat{BAC}}{2}$ (tổng ba góc trong ΔABC).

$\Rightarrow \widehat{CMI}=\widehat{MAI}+\widehat{ABI}$ (AI, BI là phân giác của ΔABC).

Mà $\widehat{CMI}=\widehat{MAI}+\widehat{MIA}$ (góc ngoài tại đỉnh M của ΔAIM) nên $\widehat{ABI}=\widehat{MIA}$.

Xét ΔAIM và ΔABI ta có $\widehat{MIA}=\widehat{ABI}$ (chứng minh trên),

$\widehat{MAI}=\widehat{IAB}$ (AI là phân giác của $\widehat{BAC}$).

$\Rightarrow \Delta AIM \backsim \Delta ABI$ (g – g).

2. Chứng minh: $\dfrac{AM}{BN}=\left(\dfrac{AI}{BI}\right)^2$.

Ta có $\dfrac{AM}{AI}=\dfrac{AI}{AB}\Rightarrow AI^2=AM.AB$.

Chứng minh tương tự ở trên, ta có: $BI^2 = BN.AB$.

Vậy: $\dfrac{AI^2}{BI^2} = \dfrac{AM.AB}{BN.AB} = \dfrac{AM}{BN}$.

Bài 19. Tam giác ABC có $AB < AC$, các đường phân giác BD và CE. Kẻ tia Bx sao cho $\widehat{DBx} = \widehat{DCE}$ (tia Bx và A nằm cùng phía đối với BD), Bx cắt DA ở F, cắt CE ở G. Chứng minh rằng:

1. $CG < CE$
2. $BD < CE$.

Lời giải

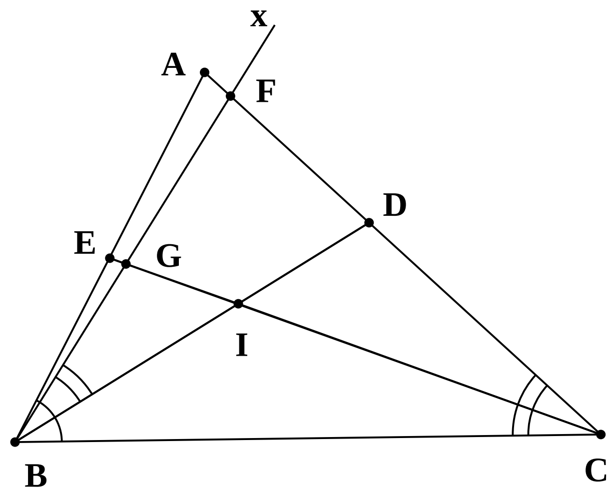
1. Chứng minh $CG < CE$.

ΔABC có $AB < AC$ (giả thiết) nên $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ (quan hệ cạnh và góc đối diện).

$\Rightarrow \widehat{DBE} > \widehat{DCE}$ (BD và CE là phân giác của ΔABC).

Mà $\widehat{DCE} = \widehat{DBG}$ (giả thiết) nên $\widehat{DBE} > \widehat{DBG}$.

Gọi I là giao điểm của BD và CE thì G nằm giữa I và E, suy ra $CG < CE$



2. Chứng minh : $BD < CE$.

Ta có $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \widehat{DBC} > \widehat{ECB}$ (BD, CE là phân giác của ΔABC)

Mà $\widehat{DBF} = \widehat{FCE}$ (giả thiết)

nên $\widehat{DBC} + \widehat{DBF} > \widehat{ECB} + \widehat{FCE}$.

$\Rightarrow \widehat{FBC} > \widehat{FCB}$

$\Rightarrow CF > BF$. (quan hệ cạnh và góc đối diện trong ΔFBC).

Xét ΔFBD và ΔFCG, ta có :

$\widehat{BFD}$ là góc chung,

$\widehat{FBD} = \widehat{FCG}$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta FBD \backsim \Delta FCG (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{CG} = \dfrac{BF}{CF}$

Mà $CF > BF$ (chứng minh trên) nên $CG > BD$.

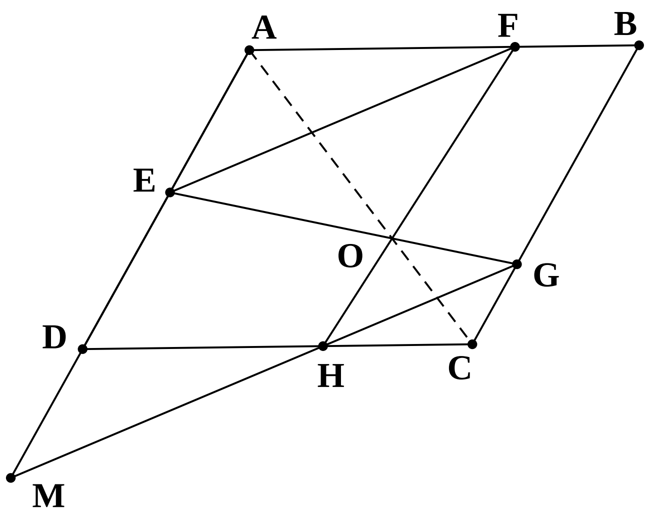
Mặt khác $CG < CE$ (chứng minh câu a) nên $BD < CE$.

Dạng 4. Phối hợp các các trường hợp cạnh – góc – cạnh và góc - góc

Phương pháp giải:

Ví dụ 5. Một hình thang có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh của một hình bình hành. Chứng minh rằng tồn tại một đường chéo của hình bình hành đi qua giao điểm hai đường chéo của hình thang.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của các đường chéo EG và FH của hình thang $EFGH$ nội tiếp hình bình hành $ABCD$.

Gọi M là giao điểm của GH và AD.

Xét ΔOEF và ΔOGH ta có :

$\widehat{OEF} = \widehat{OGH}$ (so le trong, $EF // GH$)

$\widehat{OFE} = \widehat{OHG}$ (so le trong, $EF // GH$)

$\Rightarrow \Delta OEF \backsim \Delta OGH\,(\text{g}-\text{g})$.

$\Rightarrow \dfrac{OE}{OG} = \dfrac{EF}{GH}$ (1)

Xét ΔAEF và ΔCGH, ta có:

$\widehat{A} = \widehat{C}$ ($ABCD$ là hình bình hành),

$\widehat{AEF} = \widehat{CGH}$ (cùng bằng $\widehat{M}$)

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta CGH\,(\text{g}-\text{g})$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{CG} = \dfrac{EF}{GH}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{AE}{CG} = \dfrac{OE}{OG}$.

Xét ΔAOE và ΔCOG ta có :

$\dfrac{AE}{CG} = \dfrac{OE}{OG}$ (chứng minh trên)

$\widehat{AEO} = \widehat{CGO}$ (so le trong, $AD // BC$)

$\Rightarrow \Delta AOE \backsim \Delta COG(\text{c}-\text{g}-\text{c})$.

$\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{COG}$.

Mà $\widehat{AOE}+\widehat{AOG}=180^\circ$ nên $\widehat{COG}+\widehat{AOG}=180^\circ$.

Suy ra A,O,C thẳng hàng.

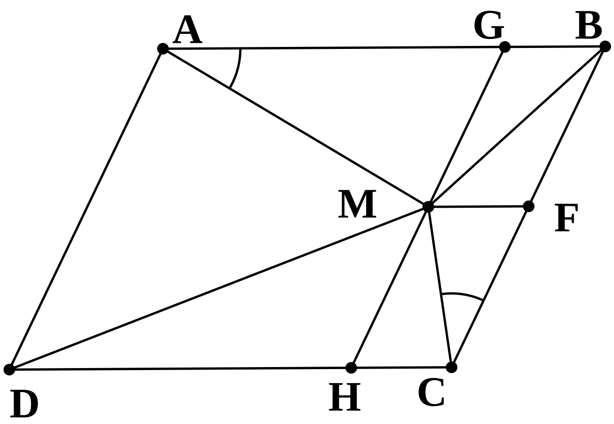
Vậy đường chéo AC của hình bình hành $ABCD$ đi qua giao điểm hai đường chéo của hình thang $EFGH$.

Bài 20. Cho điểm M nằm trong hình bình hành $ABCD$ sao cho $\widehat{MAB}=\widehat{MCB}$. Qua M vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AB và CD theo thứ tự ở G và H. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB, cắt BC ở F. Chứng minh rằng:

1. Tam giác AGM đồng dạng với tam giác CFM.

2. $\widehat{MBC}=\widehat{MDC}$.

Lời giải



1. Chứng minh tam giác AGM đồng dạng với tam giác CFM.

Ta có $\widehat{AGM}=\widehat{ABC}$ (đồng vị, $GM//BC$),

$\widehat{CFM}=\widehat{ABC}$ (đồng vị, $MF//AB$).

$\Rightarrow \widehat{AGM}=\widehat{CFM}$

Xét ΔAGM và ΔCFM, ta có:

$\widehat{AGM}=\widehat{CFM}$ (chứng minh trên),

$\widehat{MAG}=\widehat{MCF}$ (giả thiết).

$\Rightarrow \Delta AGM \backsim \Delta CFM\,(g-g)$

2. Chứng minh : $\widehat{MBC}=\widehat{MDC}$.

Tứ giác $ADHG$ có:

$AD//GB$ (cùng song song với BC),

$AG//DH$ ($ABDC$ là hình bình hành).

$\Rightarrow ADHG$ là hình bình hành.

Chứng minh tương tự ta cũng có $MFBG$, $MHCF$ là hình bình hành.

Ta có $\dfrac{AG}{CF}=\dfrac{MG}{MF}$ (vì $\Delta AGM \backsim \Delta CFM$),

$AG=DH\,(ADHG$ là hình bình hành)

$CF=MH\,(MHCF$ là hình bình hành)

$MG=BF\,(MFBG$ là hình bình hành).

$\Rightarrow \dfrac{DH}{MH}=\dfrac{BF}{MF}$

$\Rightarrow \dfrac{DH}{BF} = \dfrac{\vec{M}H}{MF}$.

Ta có: $\widehat{DHM} = \widehat{BCD}$ (đồng vị, $HM // BC$),

$\widehat{BFM} = \widehat{BCD}$ (đồng vị, $MF // AB // CD$)

$\Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{BFM}$

Xét ΔDHM và ΔBFM, ta có :

$\dfrac{DH}{BF} = \dfrac{MH}{MF}$ (chứng minh trên),

$\widehat{DHM} = \widehat{BFM}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta DHM \backsim \Delta BFM\,(\text{c}-\text{g}-\text{c})$

$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{MBC}$

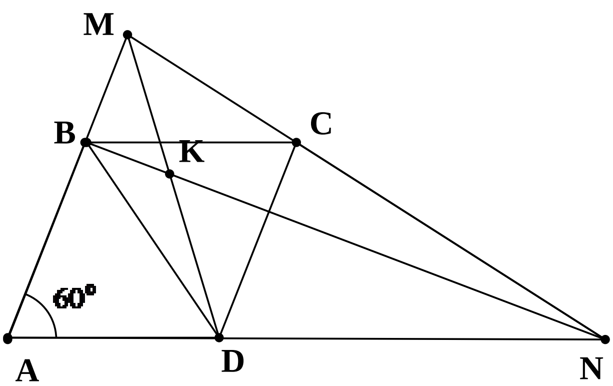
Bài 21. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a có $\hat{A} = 60^0$. Một đường thẳng bất kì đi qua C cắt tia đối của các tia BA và DA theo thứ tự tại M và N.

1. Chứng minh rằng: tích $BM.DN$ có giá trị không đổi.

2. Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính $\widehat{BKD}$.

Lời giải

1. Chứng minh rằng: tích $BM.DN$ có giá trị không đổi.



Xét ΔMBC và ΔCDN ta có :

$\widehat{BMC} = \widehat{DCN}$ (đồng vị, $AM // CD$)

$\widehat{BCM} = \widehat{DNC}$ (đồng vị, $BC // AN$)

$\Rightarrow \Delta MBC \backsim \Delta CDN\,(\text{g}-\text{g}). \Rightarrow \dfrac{BM}{CD} = \dfrac{BC}{DN}$

$\Rightarrow BM.DN = a^2$

2. Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính $\widehat{BKD}$.

ΔABD có $AB = AD = a$ và $\hat{A} = 60^\circ$

nên ΔABD đều $\Rightarrow BD = a$.

Mà $BM.DN = a^2$ (câu a)

nên $BM.DN = BD^2$.

Vì $\widehat{DBM}$ kề bù với $\widehat{DBA}$ nên $\widehat{DBM} = 120^\circ$.

Vì $\widehat{BDN}$ kề bù với $\widehat{BDA}$ nên $\widehat{BDN} = 120^\circ$.

Xét ΔBDM và ΔDNB, ta có :

$\widehat{DBM} = \widehat{BDN} = 120^\circ$,

$\frac{BM}{BD} = \frac{BD}{DN}$ (vì $BM.DN = BD^2$)

$\Rightarrow \Delta BDM \backsim \Delta DNB\ (c-g-c)$

Xét ΔDBM và ΔDKB ta có:

$\widehat{BDK}$ là góc chung

$\widehat{BMD} = \widehat{DBK}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \Delta DBM \backsim \Delta DKB\ (g-g)$

$\Rightarrow \widehat{DBM} = \widehat{BKD}$

$\Rightarrow \widehat{BKD} = 120^o$

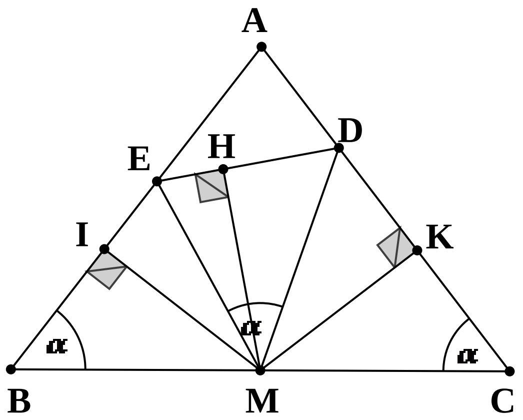
Bài 22. Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 2a$, M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$.

1. Chứng minh rằng: tích $BC.CE$ không đổi.

2. Chứng minh rằng: DM là tia phân giác của góc BDE.

3. Tính chu vi ΔAED nếu tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải



1. Ta có: $\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{CME}$, mặt khác

$\widehat{DMC} = \widehat{B} + \widehat{BDM}$ mà $\widehat{CME} = \widehat{B}$ nên $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$

Do đó ΔBDM và ΔCME đồng dạng (g-g)

$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE}$

$\Rightarrow BD.CE = CM.BM = a^2$

2. ΔBDM và ΔCME đồng dạng còn suy ra

$\frac{DM}{ME} = \frac{BD}{CM} \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{BM}$.

(vì $CM = BM$). Do đó ΔDME và ΔDBM đồng dạng (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{BDM}$

3. Từ câu b) suy ra DM là tia phân giác của góc BDE, EM là tia phân giác của góc CED. Kẻ $MH \perp DE$, $MI \perp AB$, $MK \perp AC$.

Ta có $DH = DI, EH = EK$, do đó chu vi $\Delta ADE = AI + AK = 2AK$.

Ta lại có $CK = \frac{MC}{2} = \frac{a}{2}, AC = 2a$ nên $AK = 1,5a$.

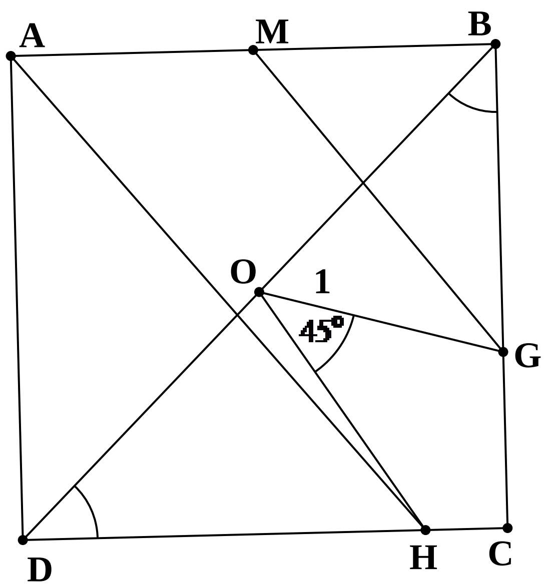
Vậy chu vi tam giác ADE bằng $3a$.

Bài 23. Cho hình vuông $ABCD, O$ là giao điểm của hai đường chéo. Lấy điểm G thuộc cạnh BC, $\widehat{GOH} = 45^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

1. Tam giác HOD đồng dạng với tam giác OGB.

2. MG song song với AH.

Lời giải



1. Ta có

$\widehat{HOD} + \widehat{O_1} = 135^\circ, \widehat{OGB} + \widehat{O_1} = 135^\circ$ nên $\widehat{HOD} = \widehat{OGB}$

ΔHOD và ΔOGB đồng dạng (g.g).

2. Từ câu a) suy ra $\dfrac{HD}{OB} = \dfrac{DO}{BG}$.

Đặt $BM = a$ thì $AD = 2a, OB = OD = a\sqrt{2}.$

Ta có $HD \cdot BG = OB \cdot OD = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 2a \cdot a = AD \cdot BM$

$\Rightarrow \dfrac{HD}{AD} = \dfrac{BM}{BG}$

ΔAHD và ΔGMB đồng dạng (c.g.c) suy ra

$\widehat{AHD} = \widehat{GMB}$.

Do đó $\widehat{HAB} = \widehat{GMB}$.

Vậy $MG // AH$.

Bài 24. Lục giác $ABCDEF$ có $\hat{B} = \hat{D} = \hat{F}, AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Gọi K là điểm đối xứng với F qua AE. Chứng minh rằng $BCDK$ là hình bình hành.

Lời giải

ΔABC và ΔAKE đồng dạng (g.g) ,

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AK}$, do đó ΔBAK và ΔCAE đồng dạng (c.g.c).

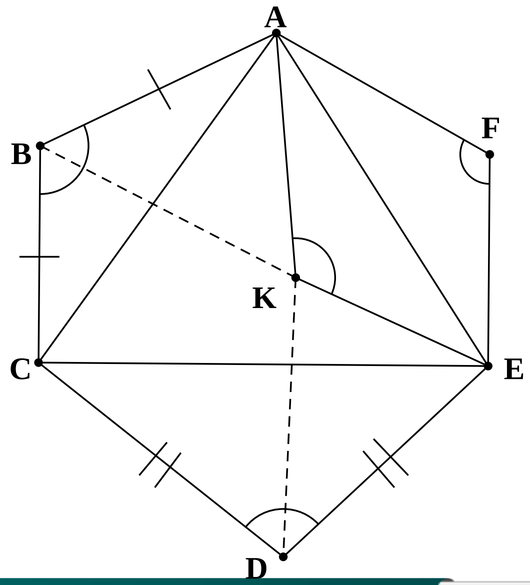
Tương tự: ΔDKE và ΔCAE đồng dạng. Suy ra ΔBAK và ΔDKE đồng dạng.

Tỉ số đồng dạng bằng $\dfrac{AK}{KE} = 1$ nên $\Delta BAK = \Delta DKE$

$\Rightarrow BC = DK$

Tương tự $CD = BK$.

Vậy $BCDK$ là hình bình hành.



Dạng 5. Dựng hình

Phương pháp giải:

Bài 25. Dựng tam giác ABC, biết độ dài ba đường cao của nó bằng h_a, h_b, h_c cho trước.

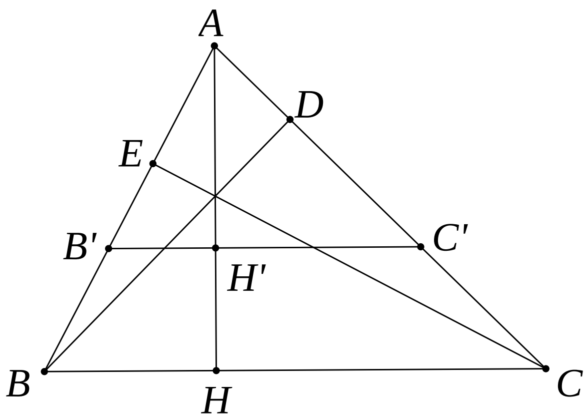
Lời giải

Phân tích. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của ΔABC phải dựng. Ta có $ah_a = bh_b = ch_c$.

Chia cho $h_a h_b$ được $\dfrac{a}{h_b} = \dfrac{b}{h_a} = \dfrac{c}{\dfrac{h_a h_b}{h_c}}$.

Do đó ba cạnh a, b, c tỉ lệ với $h_a, h_b, \dfrac{h_a h_b}{h_c}$.

Biết h_a, h_b, h_c ta dựng được $k = \dfrac{h_a h_b}{h_c}$ (dựng đoạn tỉ lệ thứ tự).



Do đó ta dựng được một tam giác đồng dạng với tam giác phải dựng.

Cách dựng. Dựng $AB'C'$ có $AB' = k, AC' = h_a, B'C' = h_b$.

Dựng đường cao AH'. Trên tia AH' đặt $AH = h_a$. Qua H dựng đường thẳng song song $B'C'$, cắt AB', AC' ở B, C, ta được ΔABC cần dựng.

Chứng minh. Gọi BD, CE là các đường cao của ΔABC Ta sẽ chứng minh rằng $BD = h_b$, $CE = h_c$

Tỉ số hai đường cao bằng tỉ số nghịch đảo của hai cạnh tương ứng nên

$$\frac{AH}{BD}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{h_a}{BD}=\frac{AC}{BC}$$

Ta lại có

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AC'}{B'C'}=\frac{h_a}{h_b}$$

Từ $(1),(2)$ suy ra $\frac{h_a}{BD}=\frac{h_a}{h_b}$ nên $BD=h_b$.

Tương tự ta có

$$\frac{AH}{CE}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{h_a}{CE}=\frac{AB}{BC}$$

Ta lại có

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'}=\frac{h_ah_b:h_c}{h_b}=\frac{h_a}{h_c}$$

Từ (3), (4) suy ra $\frac{h_a}{CE}=\frac{h_a}{h_c}$ nên $CE=h_c$.

Biện luận. Bài toán có một nghiệm hình $\Leftrightarrow$ dựng được $\Delta AB'C'$

$$\Leftrightarrow\left|h_a-h_b\right|<\frac{h_ah_b}{h_c}<h_a+h_b\Leftrightarrow\left|\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_a}\right|<\frac{1}{h_c}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_a}$$

Chú ý: Sẽ không chính xác nếu dựng $\Delta A'B'C'$ như sau:

- Dựng tam giác có độ dài ba cạnh bằng h_a,h_b,h_c.
- Dựng $\Delta A'B'C'$ có độ dài ba cạnh là chiều cao của tam giác trên.
- $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với tam giác phải dựng.

Sai lầm của cách dựng này là ngay trong bước dựng thứ nhất đã đòi hỏi trong ba đoạn thẳng h_a,h_b, h_c, mỗi đoạn phải nhỏ hơn tổng của hai đoạn kia, trong khi điều kiện đó không nhất thiết phải có. Chẳng hạn, một tam giác cân có cạnh đáy a, cạnh bên b trong đó $a:b=1:5$ thì $h_a:h_b=5:1$ do đó $h_a:h_b:h_c=5:1:1$, tam giác này có $h_a>h_b+h_c$.

🗁 **Bài 26.** Cho tam giác ABC. Dựng hình bình hành $AEMD$ có D,M,E theo thứ tự thuộc các cạnh AB,BC,CA sao cho các tam giác MDE và ABC đồng dạng.

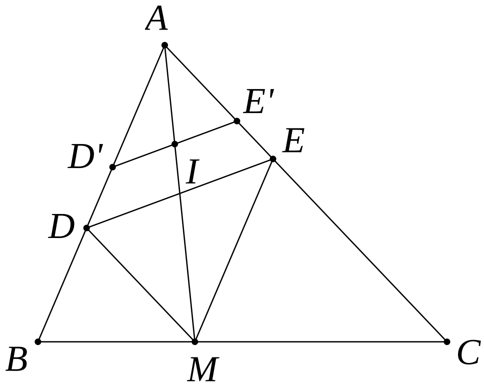
Lời giải

Chú ý rằng $\Delta MDE = \Delta AED$ nên cần dựng ΔAED đồng dạng với ΔABC.

Dựng E' bất kì thuộc AC.

Dựng D' thuộc AB sao cho $\widehat{AE'D'} = \widehat{B}$

Gọi I là trung điểm của $D'E'$, giao điểm của AI và BC cho ta điểm M



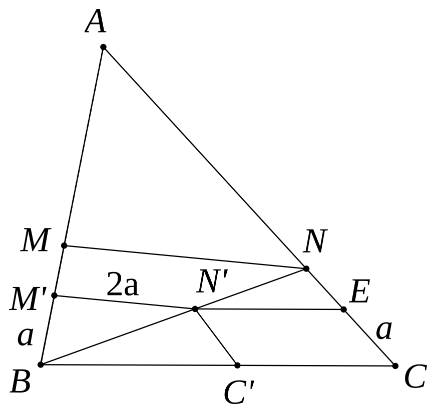
Bài 27. Cho tam giác ABC. Dựng điểm M thuộc cạnh AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $BM = CN = \frac{1}{2}MN$

Lời giải

Lấy N' bất kì thuộc BN, kẻ $N'M' // NM, N'C' // NC$.

Ta có:
$\frac{BM'}{BM} = \frac{M'N'}{MN} = \frac{BN'}{BN} = \frac{N'C'}{NC}$
$\Rightarrow BM' : M'N' : N'C' = BM : MN : NC = 1:2:$

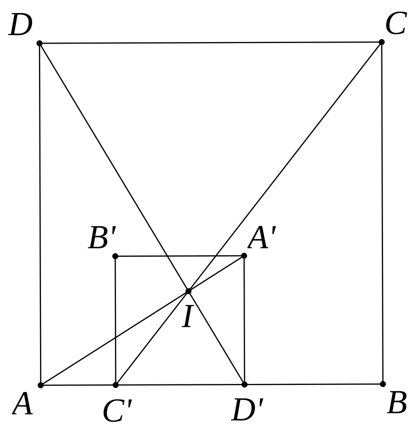
Từ đó suy ra cách dựng: trước hết dựng tứ giác $BM'N'C'$ biết ba cạnh và hai góc kề với cạnh thứ tư: $BM' = a$, $M'N' = 2a, N'C' = a$ (a là một độ dài tùy ý),
$\widehat{M'BC'} = \widehat{ABC}$, $\widehat{N'C'B} = \widehat{ACB}$, cách dựng được thể hiện trên hình 146. BN' cắt AC ở N. Dựng $NM // N'M'$



Hình 146

Bài 28. Cho bốn điểm A, C', D', B thẳng hàng theo thứ tự ấy. Vẽ về một phía của AB các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AA' và BB'. Ta sẽ chứng minh rằng các đường thẳng CC', DD' cũng đi qua O. Thật vậy:

$$\frac{OB'}{OB}=\frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$$

Do đó $\Delta OB'C'$ và ΔOBC đồng dạng (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{B'OC'}=\widehat{BOC}$$

Từ đó C, O, C' thẳng hàng. Tương tự D, O, D' thẳng hàng.

Bài 5
Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

1 Tóm tắt lý thuyết

Dạng 1. Hai tam giác vuông đồng dạng

Phương pháp giải: Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu:

☒ Hai cạnh góc vuông của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác kia (trường hợp cạnh – góc – cạnh).

☒ Một góc nhọn của tam giác này bằng một góc nhọn của tam giác kia (trường hợp góc – góc)

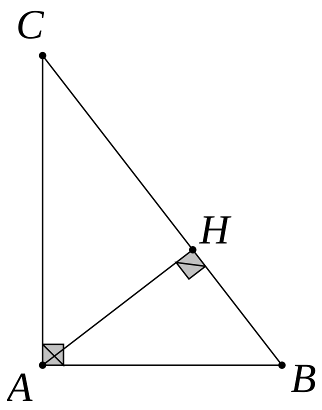
☒ Cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác kia (trường hợp cạnh huyền – cạnh góc vuông).

2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Tính chu vi của tam giác ABC vuông tại A, biết rằng đường cao AH chia tam giác đó thành hai tam giác AHB và AHC có chu vi theo thứ tự bằng 18 cm và 24 cm.

Lời giải

Xét ΔAHB và ΔCHA, ta có



$-\widehat{AHB}=\widehat{CAB}=90^\circ$

$-\widehat{ABH}=\widehat{CAH}$ (cùng phụ với góc HAB)

Do đó ΔAHB và ΔCHA đồng dạng $(\mathrm{g}\cdot\mathrm{g})$, suy ra

$$\frac{AH}{CH}=\frac{AB}{CA}=\frac{HB}{HA}=\frac{AH+AB+HB}{CH+CA+HA}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}\quad(1)$$

Xét ΔAHB và ΔCAB, có:

$-\widehat{AHB}=\widehat{CAB}=90^\circ$

$-\widehat{B}$ là góc chung.

Do đó ΔAHB và ΔCAB đồng dạng $(\mathrm{g}\cdot\mathrm{g})$, suy ra

$$\frac{AH}{CA}=\frac{AB}{CB}=\frac{HB}{AB}=\frac{AH+AB+HB}{CH+CB+AB}=\frac{18}{CH+CB+AB}\quad(2)$$

Từ (1), ta đặt $AB=3k, CA=4k$. Xét ΔABC vuông tại A :

$$CB^2=AB^2+CA^2=(3k)^2+(4k)^2=(5k)^2$$

nên $CB=5k$. Do đó $\frac{AB}{CB}=\frac{3}{5}$

Từ (2) suy ra $\frac{3}{5}=\frac{18}{\text{chu vi }\Delta ABC}$

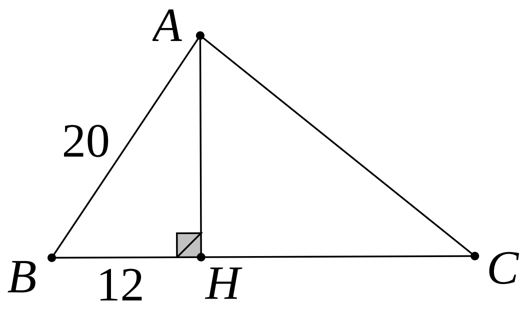
Vậy chu vi ΔABC bằng $18\cdot\frac{5}{3}=30\ (\text{ cm})$.

Ví dụ 2. Tam giác ABH vuông tại H có $AB=20\ cm;\ BH=12\,cm$. Trên tia đối HB lấy điểm C sao cho $AC=\frac{5}{3}AH$.

1. Chứng minh các tam giác ABH và CAH đồng dạng.
2. Tính $\widehat{BAC}$

Lời giải

1. Ta có $\frac{AB}{BH}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}=\frac{AC}{AH}$



Xét ΔABH và ΔCAH có:

$-\widehat{AHB}=\widehat{CHA}=90^\circ$

$-\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{AH}$ (chứng minh trên)

Do đó ΔABH và ΔCAH đồng dạng (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

2. Từ câu a suy ra $\widehat{CAH}=\widehat{ABH}$.

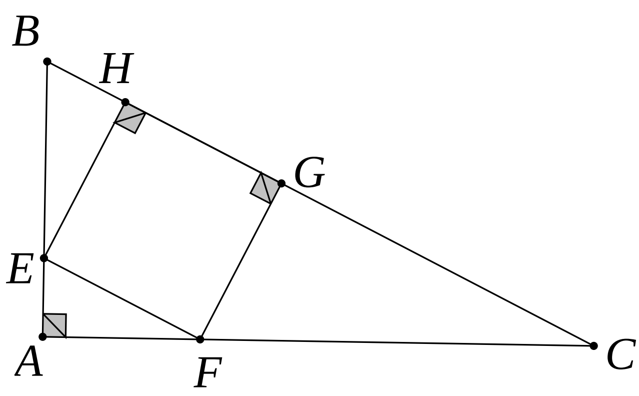
Ta lại có $\widehat{BAH}+\widehat{ABH}=90^o$ nên $\widehat{BAH}+\widehat{CAH}=90^o$.

Do đó $\widehat{BAC}=90^\circ$.

1 Bài tập tự luyện

Bài 257. Cho tam giác ABC vuông tại A, hình vuông $EFGH$ nội tiếp tam giác sao cho E thuộc AB, F thuộc AC, H và G thuộc BC. Tính độ dài của cạnh hình vuông biết rằng $BH=2$ cm, $GC=8$ cm

Lời giải



ΔEHB và ΔCGF đồng dạng (g.g)

Suy ra $\frac{EH}{CG}=\frac{BH}{FG}\Rightarrow EH^2=BH\cdot CG=16\Rightarrow EH=4(\text{ cm})$

Vậy cạnh của hình vuông $EFGH$ bằng 4 cm.

Bài 258. Cho hình bình hành $ABCD$, các đường cao CE, CF. Kẻ DH, BK vuông góc với AC. Chứng minh rằng $AC^2 = AD \cdot DF + AB \cdot AE$.

Lời giải

Lời giải

Từ ΔADH và ΔACF đồng dạng (g.g) suy ra được

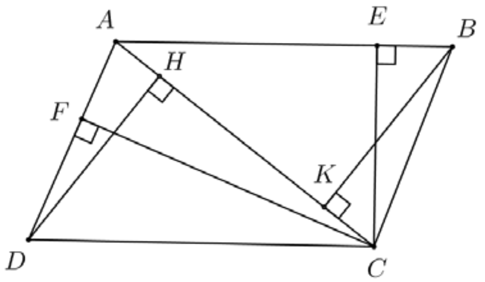
$$AD \cdot AF = AC \cdot AH \quad (1)$$

Từ ΔACE và ΔABK đồng dạng $(g \cdot g)$ suy ra được

$$AB \cdot AE = AC \cdot AK \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AD \cdot AF + AB \cdot AE = AC \cdot (AH + AK) = AC^2$$



Bài 259. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Chứng minh rằng $BC^2 = BH \cdot BD + CH \cdot CE$

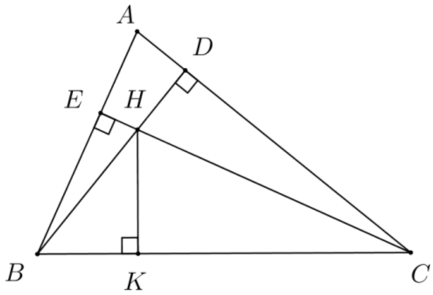
Lời giải

Kẻ $HK \perp BC$. Từ các tam giác đồng dạng, ta chứng minh được

$BH \cdot BD = BK \cdot BC \quad (1)$

$CH \cdot CE = CK \cdot CB \quad (2)$

Cộng (1) và (2) ta được đẳng thức cần phải chứng minh.



Bài 260. Cho tam giác $ABC(AB \neq AC)$. Gọi E và F theo thứ tự là các hình chiếu của B và C trên tia phân giác của góc A. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng FB và CE. Chứng minh rằng AK là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC.

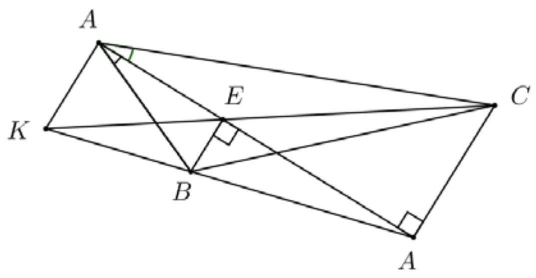
Lời giải

ΔABE và ΔACF đồng dạng, ΔKBE và ΔKFC đồng dạng, ta có:

$$\frac{KB}{KF}=\frac{BE}{CF}=\frac{AE}{AF}$$

$\Rightarrow AK \,//\, BE \Rightarrow AK \perp AE$

Vậy AK là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A của ΔABC



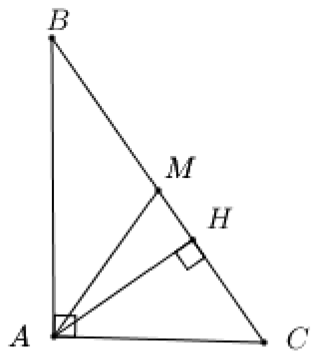
Bài 261. Tính tỉ số hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông biết rằng đường cao và đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác tỉ lệ $12:13$.

Lời giải

Đặt $AH=12k, AM=13k$ thì $HM=5k, CH=18k$ (giả sử $AB<AC$).

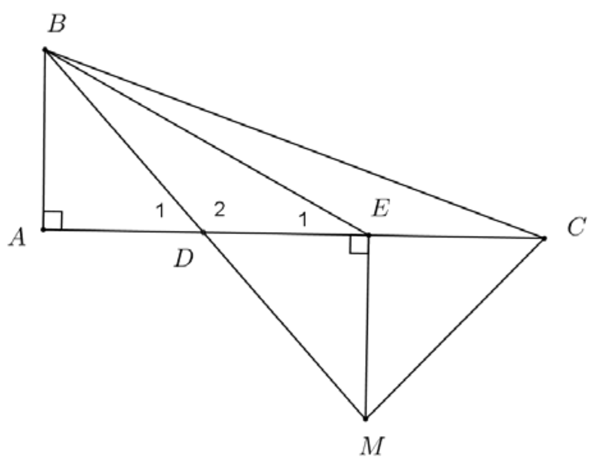
Ta có ΔAHB và ΔCHA đồng dạng nên

$$\frac{AB}{CA}=\frac{HA}{HC}=\frac{12k}{18k}=\frac{2}{3}$$



Bài 262. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AC=3AB$. Lấy các điểm D, E thuộc AC sao cho $AD=DE=EC$. Chứng minh rằng $\widehat{AEB}+\widehat{ACB}=45^\circ$

Lời giải



Cách 1. Vẽ M đối xứng với B qua $D, \Delta EAB$ và ΔBMC đồng dạng (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{E_1}=\widehat{MBC}$

Do đó $\widehat{E_1} + \hat{C} = \widehat{MBC} + \hat{C} = \widehat{D_1} = 45^\circ$

Cách 2. Đặt $AB = AD = DE = EC = a$ thì

$$BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = 2a \cdot a = CD \cdot ED \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{BD}{ED}$$

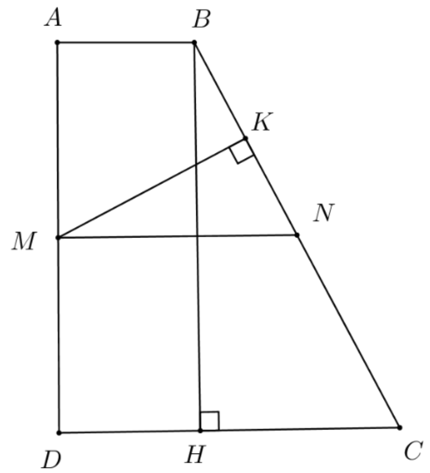
ΔCDB và ΔBDE đồng dạng (c.g.c)

$\Rightarrow \hat{C} = \widehat{DBE}$

Do đó $\widehat{E_1} + \hat{C} = \widehat{E_1} + \widehat{DBE} = \widehat{D_1} = 45^\circ$.

Bài 263. Hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, AB = 4$ cm, $DC = 9$ cm, $BC = 13$ cm. Tính khoảng cách từ trung điểm M của AD đến BC.

Lời giải



Vẽ $BH \perp CD, MK \perp BC$

ΔMKN và ΔBHC đồng dạng (g.g)

$$\frac{MK}{BH} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow MK = \frac{MN \cdot BH}{BC}$$

Ta có

$$MN = DH + \frac{HC}{2} = AB + \frac{HC}{2} = 4 + 2,5 = 6,5(\text{cm})$$

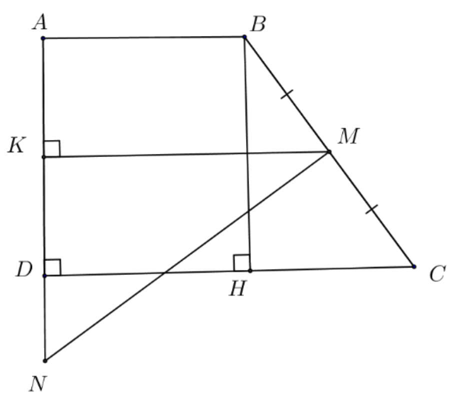
$$BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{cm})$$

Vậy $MK = \dfrac{6,5 \cdot 12}{13} = 6(\text{cm})$

Vẽ $BH \perp CD, MK \perp BC$

Bài 264. Hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, AB = 7$ cm, $DC = 13$ cm, $BC = 10$ cm. Đường trung trực của BC cắt đường thẳng AD ở N. Tính độ dài MN (M là trung điểm BC).

Lời giải

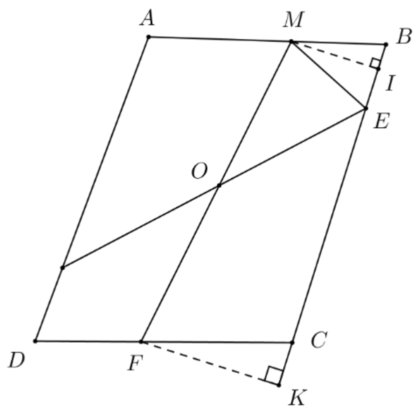


Vẽ $BH \perp CD, MK \perp AD, \Delta MKN$ và ΔBHC đồng dạng (g.g) nên tính được

$$MN = \frac{BC \cdot MK}{BH} = \frac{10 \cdot 10}{8} = 12,5\left(\text{ cm}\right)$$

Bài 265. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai đường thẳng đi qua tâm của hình bình hành chia nó ra bốn tứ giác có diện tích bằng nhau. Đường thẳng thứ nhất cắt BC ở E, đường thẳng thứ hai cắt CD ở F. Chứng minh rằng điểm E chia cạnh BC và điểm F chia cạnh CD theo cùng một tỉ số.

Lời giải



Gọi M là giao điểm của FO và AB (O là tâm của hình bình hành).

Ta có $S_{OMBE} = S_{OFCE}$ mà $S_{MOE} = S_{FOE}$ nên $S_{MBE} = S_{FCE}$

Do đó $EB \cdot MI = EC \cdot FK\left(MI, FK \perp BC\right)$.

Vậy $\frac{EB}{EC} = \frac{FK}{MI} = \frac{FC}{MB} = \frac{FC}{FD}$

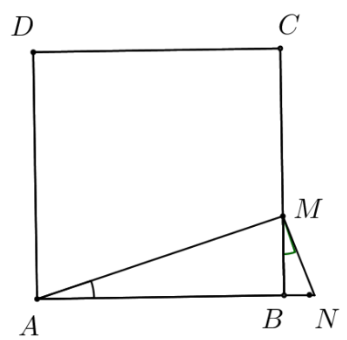
Bài 266. Cho hai điểm A, M. Dựng hình vuông $ABCD$ sao cho điểm M chia cạnh BC theo tỉ số $1:2$

Lời giải

Qua M vẽ đường vuông góc với AM, cắt AB tại N.

ΔABM và ΔMBN đồng dạng nên $\frac{MN}{AM} = \frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}$, do đó ta dựng được điểm N.

Có hai cách lấy điểm N về hai phía của AM nên bài toán có hai nghiệm hình.

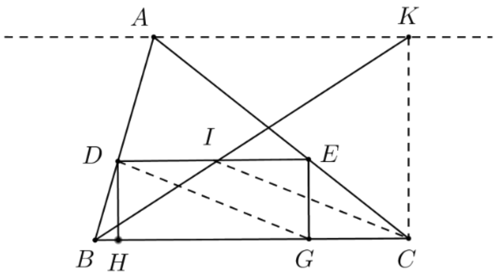


Bài 267. Cho tam giác ABC. Hình chữ nhật $DEGH$ có D thuộc AB, E thuộc AC, G và H thuộc BC

1. Vẽ Ax song song với BC, vẽ CK vuông góc với Ax $(K$ thuộc $Ax)$. Gọi I là giao điểm của BK và DE. Chứng minh rằng $GC = DI$.

2. Suy ra cách dựng hình chữ nhật nói trên biết tam giác ABC và độ dài đường chéo của hình chữ nhật.

Lời giải



1. ΔEGC và ΔCKA đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow \frac{GC}{AK} = \frac{EC}{AC} = \frac{DB}{AB} = \frac{DI}{AK} \Rightarrow GC = DI$

2. Suy ra $DICG$ là hình bình hành $\Rightarrow CI = DG = m$.

Dựng K rồi vẽ đường tròn $(C; m)$, cắt BK ở I

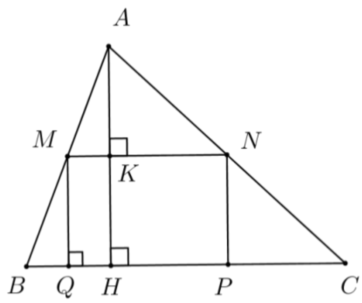
Tùy theo số giao điểm của đường tròn với BK mà bài toán có $0,1,2$ nghiệm hình.

B TỈ SỐ CÁC ĐƯỜNG CAO, TỈ SỐ DIỆN TÍCH CỦA HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Nếu hai tam giác đồng dạng thì:
− Tỉ số các đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.
− Tỉ số các diện tích bằng bình phương của tỉ số đồng dạng.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có các góc B và C nhọn, $BC = a$, đường cao $AH = h$. Tính cạnh của hình vuông $MNPQ$ có M thuộc AB, N thuộc AC, P, Q thuộc BC.

Lời giải



Gọi giao điểm của AH và MN là K. Do $MN \parallel BC$ nên $AK \perp MN$.

Ta có $MN \parallel BC$ nên ΔAMN và ΔABC đồng dạng, do đó tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng:

$$\frac{AK}{AH} = \frac{MN}{BC}$$

Đặt $MN = KH = x$, ta có

$$\frac{h-x}{h} = \frac{x}{a} \Rightarrow xh = ah - ax$$

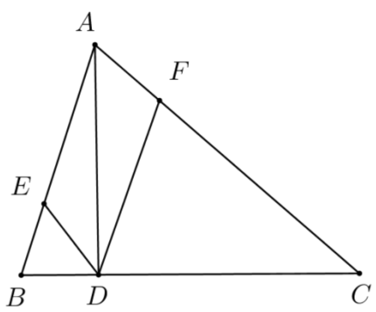
$$\Rightarrow x(h+a) = ah$$

$$\Rightarrow x = \frac{ah}{a+h}$$

Cạnh của hình vuông $MNPQ$ bằng $\frac{ah}{a+h}$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC và hình bình hành $AEDF$ với E thuộc AB, D thuộc BC, F thuộc AC. Tính diện tích hình bình hành, biết rằng $S_{EBD} = 3\text{ cm}^2, S_{FDC} = 12\text{ cm}^2$.

Lời giải



ΔEBD và ΔFDC đồng dạng $(\text{g} \cdot \text{g})$ nên

$$\frac{S_{EBD}}{S_{FDC}} = \left(\frac{BE}{DF}\right)^2 = \left(\frac{ED}{FC}\right)^2$$

Ta có $S_{EBD} : S_{FDC} = 3:12 = 1:4 = \frac{1}{4}$

Do đó $\frac{BE}{DF} = \frac{ED}{FC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $AE = DF = 2BE; AF = ED = \frac{1}{2}FC.$

Vậy

$$S_{ADE} = 2S_{BED} = 2 \cdot 3 = 6\left(\text{cm}^2\right)$$

$$S_{ADF}=\frac{1}{2}S_{FDC}=\frac{1}{2}\cdot 12=6\left(\text{cm}^2\right)$$

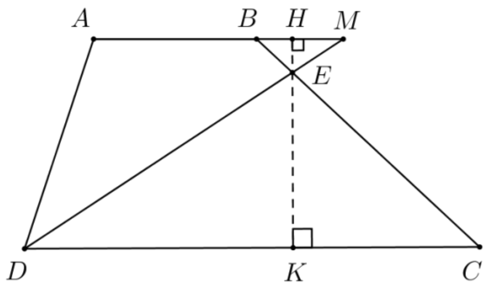
$$S_{AEDF}=S_{ADE}+S_{ADF}=6+6=12\left(\text{cm}^2\right)$$

Chú ý: Tổng quát, nếu $S_{EBD}=m\cdot S_{FDC}=n$ thì $S_{AEDF}=2\sqrt{mn}$

1 Tỉ số các đường cao

Bài 268. Hình thang $ABCD$ có cạnh đáy AB dài 8 cm, cạnh đáy CD dài 12 cm. Điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho đường thẳng DM chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài BM.

Lời giải



Chú ý rằng

$$S_{ABD}:S_{ABCD}=\frac{8}{20}<\frac{1}{2}$$

nên M thuộc tia đối của tia BA. Gọi E là giao điểm của DM và BC, đặt $EH=h_1, EK=h_2$, $HK=h$ (EH là đường cao của $\Delta BEM, HK$ là đường cao của hình thang).

$$S_{DEC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}\Rightarrow\frac{12h_2}{20h}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{h_2}{h}=\frac{5}{6}$$

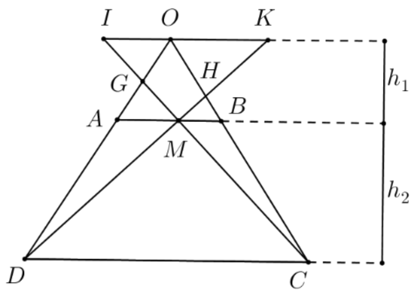
$$\Delta BEM\backsim\Delta CED$$

$$\Rightarrow\frac{BM}{CD}=\frac{EH}{EK}\Rightarrow\frac{BM}{12}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{1}{5}.$$

Vậy $BM=2,4$ cm

Bài 269. Điểm M chuyển động trên đáy nhỏ AB của hình thang $ABCD$. Gọi O là giao điểm của các đường thẳng chứa các cạnh bên của hình thang, G là giao điểm của OA và CM, H là giao điểm của OB và DM. Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên cạnh AB thì tổng $\frac{OG}{GD}+\frac{OH}{HC}$ không đổi.

Lời giải



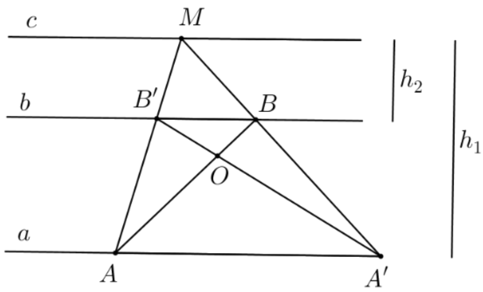
Qua O vẽ đường thẳng song song với AB, cắt CM, DM thứ tự tại I, K. CI cắt OD tại G, DK cắt OC tại H. Ta có

$$\frac{OG}{GD}+\frac{OH}{HC}=\frac{OI}{CD}+\frac{OK}{CD}=\frac{IK}{CD}$$

Tổng không đổi bằng $h_1 : h_2$ (h_1 là khoảng cách từ O đến AB, h_2 là chiều cao hình thang).

Bài 270. Cho ba đường thẳng song song a, b, c theo thứ tự ấy, điểm A thuộc a, điểm B thuộc b. Gọi M là một điểm bất kì thuộc c. MA cắt b tại B', MB cắt a tại A'. Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên c thì đường thẳng $A'B'$ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

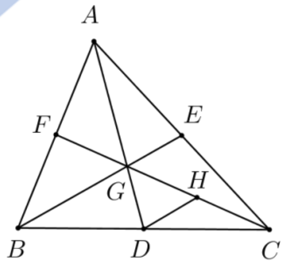


Gọi giao điểm của $A'B'$ với AB là O. Hãy chứng minh rằng O là điểm cố định (O chia trong đoạn thẳng AB theo tỉ số $\left(\frac{OA}{OB}=\frac{AA'}{BB'}=\frac{h_1}{h_2}\right)$

2 Tỉ số diện tích tích

Bài 271. Cho tam giác ABC có diện tích S, các đường trung tuyến AD, BE, CF. Gọi S' là diện tích tam giác có độ dài ba cạnh bằng AD, BE, CF. Chứng minh rằng $S'=\frac{3}{4}S$.

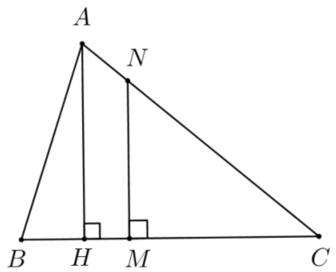
Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, H là trung điểm của CG. Lấy S_{GDH} làm trung gian: $S' =$ $9S_{GDH}$ và $S = 12S_{GDH}$

🗁 **Bài 272.** Đường cao của một tam giác dài 16 cm, nó chia cạnh đáy thành hai đoạn thẳng tỉ lệ $1:8$. Tính độ dài đoạn thẳng song song với đường cao ấy và chia tam giác đã cho ra hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải

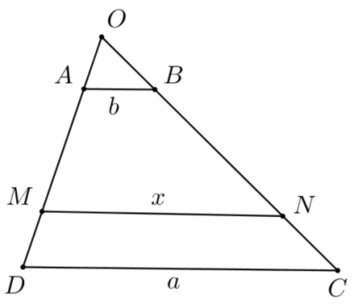


Kí hiệu như hình 163, $S_{NMC} = \frac{1}{2}S_{ABC}, S_{AHC} = \frac{8}{9}S_{ABC}$. Suy ra

$$\frac{S_{NMC}}{S_{AHC}} = \left(\frac{NM}{AH}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow NM = 12 \text{ cm}$$

🗁 **Bài 273.** Hình thang $ABCD$ có các đáy $AB = b, CD = a$ $(a > b)$. Đoạn thẳng MN song song với đáy, có hai đầu thuộc hai cạnh bên chia hình thang ra hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng $MN^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AD và BC. Đặt $S_{ABNM} = S_{MNCD} = S$ và $MN = x$.

$$\Delta OAB \backsim \Delta OMN \Rightarrow \frac{S_{OAB}}{S_{OMN}} = \left(\frac{b}{x}\right)^2$$

$$\Delta ODC \backsim \Delta OMN \Rightarrow \frac{S_{ODC}}{S_{OMN}} = \left(\frac{a}{x}\right)^2$$

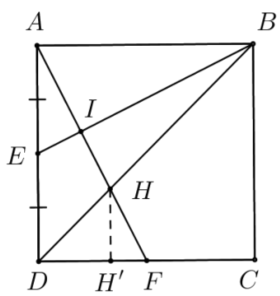
Do đó

$$\frac{a^2 + b^2}{x^2} = \frac{S_{OCD} + S_{OAB}}{S_{OMN}} = \frac{\left(S_{OMN} + S\right) + \left(S_{OMN} - S\right)}{S_{OMN}} = 2$$

Vậy $MN^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$

🗁 **Bài 274.** Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 2 cm. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, DC. Gọi I, H theo thứ tự là giao điểm của AF với BE, BD. Tính diện tích tứ giác $EIHD$.

Lời giải



Trước hết ta tính diện tích các tam giác AIE, DHF.

Dễ dàng chứng minh được $AF \perp BE. \Delta AIE \backsim \Delta ADF$ nên

$$\frac{S_{AIE}}{S_{ADF}} = \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{1}{5}$$

Ta có $S_{ADF} = 1\text{ cm}^2$ nên $S_{AIE} = \frac{1}{5}\text{ cm}^2$

ΔDHF và ΔBHA đồng dạng theo tỉ số $\frac{1}{2}$ nên ta tính được đường cao HH' của ΔDHF bằng $\frac{2}{5}\text{ cm}$. Do đó $S_{DHF} = \frac{1}{3}\text{ cm}^2$. Từ đó ta tính được $S_{EIHD} = \frac{7}{15}\text{ cm}^2$.

Bài 275. Cho hai tam giác đồng dạng có tỉ số đồng dạng là một số tự nhiên. Một cạnh của tam giác nhỏ bằng 3 cm, diện tích của tam giác nhỏ này cũng là một số tự nhiên (đơn vị cm^2). Tính diện tích của mỗi tam giác, biết hiệu diện tích của chúng bằng 18 cm^2.

Lời giải

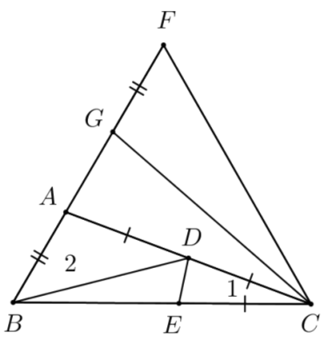
Gọi diện tích của tam giác nhỏ là x, tỉ số đồng dạng của hai tam giác là $k, (x, k \in \mathbb{N})$.

Ta có $\frac{x+18}{x} = k^2$ nên $\frac{18}{x} = k^2 - 1$ và $k^2 - 1$ là ước của 18. Từ đó tìm được $k = 2, x = 6$.

Diện tích của hai tam giác là 6 cm^2 và 24 cm^2.

Bài 276. Tam giác ABC có $B = 60^\circ, C = 20^\circ, BC = 4\text{ cm}$. Gọi D là trung điểm của AC. Trên cạnh CB lấy điểm E sao cho $CE = CD$. Tính tổng diện tích các tam giác ECD và ABD.

Lời giải



Vẽ tam giác đều BCF (F và A cùng phía đối với BC). Trên cạnh FB lấy điểm G sao cho $FG = AB$. Ta có ΔACG cân có góc ở đỉnh bằng $20^\circ, \Delta ABC = \Delta GFC$ (c.g.c).

Đặt $S_{ECD} = S_1, S_{ABD} = S_2$. Ta có ΔECD và ΔACG đồng dạng $(g.g)$

$$S_1 = \frac{1}{2} S_{ACG}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{4}\left(S_{ABC} + S_{GFC}\right)$$

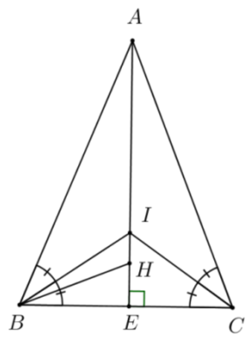
Từ (1) và (2) suy ra

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{4}\left(S_{ACG} + S_{ABC} + S_{GFC}\right)$$

$$= \frac{1}{2} S_{BFC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Bài 277. Cho tam giác ABC cân tại A, trực tâm H chia đường cao AE theo tỉ số $7:1$. Giao điểm I các đường phân giác của tam giác chia AE theo tỉ số nào?

Lời giải



Theo tính chất đường phân giác

$$\frac{AI}{IE} = \frac{AB}{BE} \Rightarrow \left(\frac{AI}{IE}\right)^2 = \frac{AB^2}{BE^2} = \frac{AE^2 + BE^2}{BE^2} = \left(\frac{AE}{BE}\right)^2 + 1$$

ΔAEB và ΔBEH đồng dạng (g.g) suy ra

$$\left(\frac{AE}{BE}\right)^2 = \frac{S_{AEB}}{S_{BEH}} = \frac{AE}{HE} = 8$$

Từ (1) và (2) suy ra

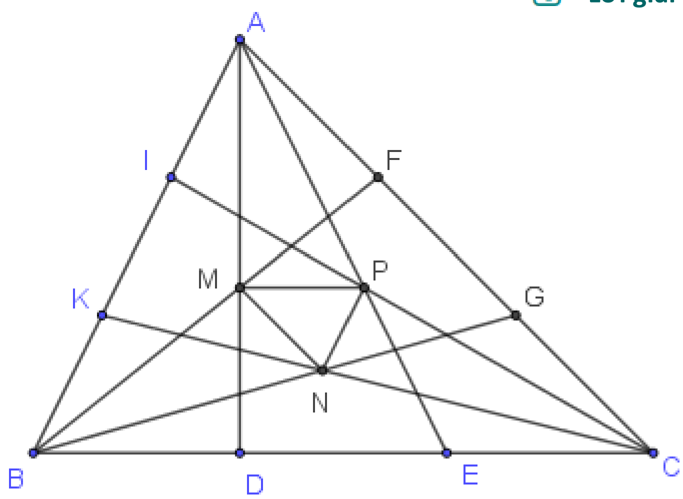
$$\left(\frac{AI}{IE}\right)^2 = 8 + 1 = 9 \Rightarrow \frac{AI}{IE} = 3$$

Bài 278. Cho tam giác ABC.Trên cạnh AB lấy điểm I và K sao cho $AI = IK = KB$, trên cạnh BC lấy các điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$, trên cạnh AC lấy các điểm F và G sao cho $AF = FG = GC$. Gọi M là giao điểm của AD và BF, N là giao điểm của BG và CK, P là giao điểm của AE và CI.

a) Chứng minh rằng các cạnh của tam giác MNP song song với các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác MNP theo diện tích tam giác ABC.

Lời giải



a) Ta có $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{AG}{AC} = \dfrac{2}{3}$ nên $KG \mathbin{/\mkern-6mu/} BC$ và $KG = \dfrac{2}{3}BC$. Do đó $NK = \dfrac{2}{3}NC$, suy ra $CN = \dfrac{3}{5}CK$.

Chứng minh tương tự, $CP = \dfrac{3}{5}CI$. Suy ra $NP \mathbin{/\mkern-6mu/} IK$ và $NP = \dfrac{3}{4}IK$.

Chứng minh tương tự, $MP \mathbin{/\mkern-6mu/} BC, MN \mathbin{/\mkern-6mu/} AC$.

b) $NP = \dfrac{3}{5}IK = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{3}AB = \dfrac{1}{5}AB$. Do đó $S_{MNP} = \dfrac{1}{25}S_{ABC}$

Bài 279. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường cao AH và đường phân giác BE. Đường vuông góc với BE tại E cắt cạnh BC tại G, cắt tia đối của tia AB tại D. Kẻ EF vuông góc với BC. Cho biết $AD = 15$ cm, $HF = 20$ cm, tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải

Kẻ $EN \mathbin{/\mkern-6mu/} BC$, cắt AH tại M, cắt AB tại N. Ta thấy $\triangle ABC$ và ΔANE đồng dạng.

Trước hết ta tính S_{ANE}.

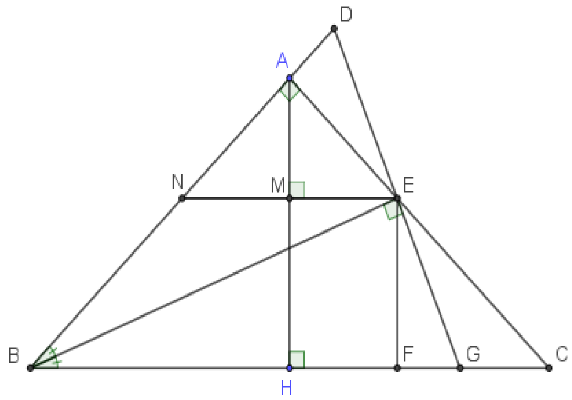
ΔBDG cân tại B. Do $NE \mathbin{/\mkern-6mu/} BG$ nên ΔNDE cân tại N. Ta dễ dàng tính được

$$EN = 2EM = 2\cdot 20 = 40(\text{ cm})$$

Suy ra $NE = 40$ cm, $NA = 25$ cm.

Ta có $AM^2 = AN^2 - NM^2 = 25^2 - 20^2 = 225$ nên $AM = 15$ cm.

$$S_{ANE} = \frac{1}{2} \cdot NE \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 15 = 300\left(\text{ cm}^2\right)$$



Bây giờ ta tính tỉ số đồng dạng $\frac{AB}{AN}$ của ΔABC và ΔANE.

ΔBDG có $DE = EG, EN \parallel BC$ nên $BN = ND = 40$ cm, do đó

$AB = 25 + 40 = 65\left(\text{ cm}\right), \frac{AB}{AN} = \frac{65}{25} = \frac{13}{5}$

$S_{ABC} = S_{ANE} \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^2 = 300 \cdot \frac{169}{25} = 2028\left(\text{ cm}^2\right)$