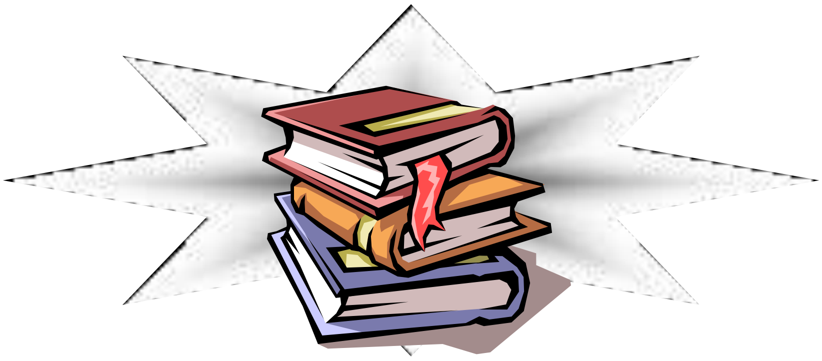
Tailieumontoan.com

Tài liệu sưu tầm



TUYỂN TẬP ĐỀ TOÁN
VÀO LỚP 10 CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH

Tài liệu sưu tầm

TUYỂN TẬP ĐỀ THI TOÁN
VÀO LỚP 10 CHUYÊN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh luyện thi vào lớp 10 môn toán, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em bộ đề thi vào lớp 10 chuyên thành phố Hồ Chí Minh. Đây là bộ đề thi mang tính chất thực tiễn cao, giúp các thầy cô và các em học sinh luyện thi vào lớp 10 có một tài liệu bám sát đề thi để đạt được thành tích cao, mang lại vinh dự cho bản thân, gia đình và nhà trường. Bộ đề gồm nhiều Câu toán hay được các thầy cô trên cả nước sưu tầm và sáng tác, ôn luyện qua sẽ giúp các em phát triển tư duy môn toán từ đó thêm yêu thích và học giỏi môn học này, tạo được nền tảng để có những kiến thức nền tốt đáp ứng cho việc tiếp nhận kiến thức ở các lớp, cấp học trên được nhẹ nhàng và hiệu quả hơn.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng tuyển tập đề toán này để giúp con em mình học tập. Hy vọng Tuyển tập đề thi toán vào lớp 10 chuyên thành phố Hồ Chí Minh này sẽ có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ bộ đề này!

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 1

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn: **TOÁN (chuyên)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1: *(1,0 điểm)*. Cho a,b,c là ba số thực thỏa điều kiện $a+b+c=1$. Tính giá trị của biểu thức: $A=a^3+b^3+c^3-3(ab+c)(c-1)$.

Câu 2: *(2,5 điểm)*.

a) Giải phương trình: $5\sqrt{x-1}-\sqrt{x+7}=3x-4$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2(x+y)-xy=4\\ xy(x+y-4)=-2\end{cases}$.

Câu 3: *(1,5 điểm)*. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên NP.
Chứng minh: KM là tia phân giác BKC.

Câu 4: *(2,0 điểm)*.
Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[0;2]$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

a) Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2<6$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Câu 5: *(2,0 điểm)*. Cho tam giác đều ABC. Gọi M, N là hai điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MAN=30°$ (M nằm giữa B và N). Gọi K là giao điểm của hai đường tròn (ABN) và (ACM). Chứng minh rằng:

a) Hai điểm K và C đối xứng với nhau qua AN.

b) Đường thẳng AK đi qua tâm đường tròn (AMN).

Câu 6: *(1,0 điểm)*.
Cho m,n là hai số nguyên. Chứng minh rằng: nếu $7(m+n)^2+2mn$ chia hết cho 225 thì mn cũng chia hết cho 225.

Hết

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH LỚP 10

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
Năm học : 2018 -2019
Môn thi: TOÁN (không chuyên)
Thời gian làm bài: 120 phút

Đề số 2

Bài 1 (1 điểm) Biết $0 < x \le y$ và

$$\left(\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+2\left(x+2y\right)\right)}\right)+\left(\frac{y}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{x}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\right)=\frac{5}{3}$$. Tính $\frac{x}{y}$

Bài 2: (2 điểm)

a) Giải phương trình $\frac{2x^2.(7-x)}{\sqrt{3-x}} = x(x-7)$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+3)(x-1)=(y-2)(x+3)\\(x-1)\sqrt{y^2-5y+8}=(y-2)^2\end{cases}$

Bài 3: (2 điểm) Cho phương trình $x^2-x+3m-11=0\,(1)$

a) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có nghiệm kép ? Tìm nghiệm đó

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ sao cho $2017x_1+2018x_2=2019$

Bài 4: (2 điểm)

a) Đầu tháng 5 năm 2018, khi đang vào vụ thu hoạch, giá dưa hấu bất ngờ giảm mạnh. Nông dân A cho biết vì sợ dưa hỏng nên phải bán 30% số dưa hấu thu hoạch được với giá 1500 đồng mỗi kilogam ($1500d/kg$), sau đó nhờ phong trào "giải cứu dưa hấu" nên đã may mắn bán hết số dưa còn lại với giá 3500đ/1 kg; nếu trừ tiền đầu tư thì lãi được 9 triệu đồng (không kể công chăm sóc hơn 2 tháng của cả nhà). Cũng theo ông A, mỗi sào đầu tư (hạt giống, phân bón….) hết 4 triệu đồng và thu hoạch được 2 tấn dưa hấu. Hỏi ông A đã trồng bao nhiêu sào dưa hấu

b) Một khu đất hình chữ nhật $ABCD\,(AB<CD)$ có chu vi 240 mét được chia thành hai phần khu đất hình chữ nhật ABMN làm chuồng trại và phần còn lại làm vườn thả để nuôi gà (M, N lần lượt thuộc các cạnh AD, BC). Theo quy hoạch trang trại nuôi được 2400 con gà, bình quân mỗi con gà cần một mét vuông của diện tích vườn thả và diện tích vườn thả gấp 3 lần diện tích chuồng trại. Tính chu vi của khu đất làm vườn thả.

Bài 5: (3 điểm) Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (T) tâm O, bán kính R, $CAD = 45^0$, AC vuông góc với BD và cắt BD tại I, $AD > BC$. Dựng CK vuông góc với AD $(K \in AD)$, CK cắt BD tại H và cắt (T) tại E $(E \ne C)$

a) Tính số đo góc COD. Chứng minh các điểm C, I, K, D cùng thuộc một đường tròn và $AC = BD$

b) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHE. Tính IK theo R

c) IK cắt AB tại F. Chứng minh O là trực tâm tam giác AIK và $CK.CB = CF.CD$

Hết

SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 3

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2018-2019
Môn thi: TOÁN CHUYÊN
Thời gian: 150 phút
Ngày thi: 03/06/2018

Câu 1 (1 điểm): Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$. Tính giá trị của biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$

Câu 2 (2 điểm)

a) Giải phương trình : $4\sqrt{x+3}=1+4x+\dfrac{2}{x}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^3=1 \\ x^2+y^5=x^3+y^2 \end{cases}$

Câu 3 (2 điểm): Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ vuông tai A có đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC

a) Chứng minh rằng: $BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=AH\sqrt{BC}$

b) Gọi D là điểm đối xứng của B qua H và gọi O là trung điểm của BC. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC cắt AC tại K. Chứng minh rằng $BK\perp AO$

Câu 4 (1,5 điểm):

a) Chứng minh rằng $x^4-x+\dfrac{1}{2}>0$ với mọi số thực x

b) Cho x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2-xy+y^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$

Câu 5 (1,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB. Đường thẳng AC cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Đường thẳng BK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại L.Các đường thẳng CL và KM cắt nhau tại E. Chứng minh rằng E nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM

Câu 6 (2 điểm)

Các số nguyên dương từ 1 đến 2018 được tô màu theo quy tắc sau: Các số mà khi chia cho 24 dư 17 được tô màu xanh; các số mà khi chia cho 40 dư 7 được tô màu đỏ. Các số còn lại được tô màu vàng

a) Chứng tỏ rằng không có số màu được tô cả hai màu xanh và đỏ. Hỏi có bao nhiêu số được tô màu vàng

b) Có bao nhiêu cặp số $(a;b)$ sao cho a được tô màu xanh; b được tô màu đỏ và $|a-b|=2$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN PTNK HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (Vòng 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề số 4

Câu 1 (1.0 điểm).

Biết a và b là các số dương, $a \neq b$ và

$$\left[\frac{(a+2b)^2-(b+2a)^2}{a+b}\right]:\left[\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})}{a-b}-3ab\right]=3$$

Tính $S=\dfrac{1+2ab}{a^2+b^2}$

Câu 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $(x^2-6x+5)(\sqrt{x-2}-x+4)=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}(\sqrt{x+2y}-3)=0\\ x^2-6xy-y^2=6\end{cases}$

Câu 3 (1.5 điểm). Cho phương trình $(x+m)^2-5(x+m)+6=0\ (1)$.

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ với mọi số thực m. Tính giác trị của biểu thức $S=(x_1+m)^2+(x_2+m)^2+5(x_1+x_2+2m)$

b) Biết $x_1<x_2$, tìm m sao cho $x_2<1$ và $x_1^2+2x_2=2(m-1)$.

Câu 4 (2.0 điểm).

a) Nam kể với Bình rằng ông Nam có một mảnh đất hình vuông ABCD được chia thành bốn phần; hai phần (gồm các hình vuông AMIQ và INCP với M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA) để trồng các loại rau sạch, các phần còn lại dùng để trồng hoa. Diện tích phần trồng rau sạch là $1200cm^2$ và phần để trồng hoa là $1300cm^2$. Bình nói: "Chắc bạn bị nhầm rồi!". Nam nói: "Bạn nhanh thật! Mình đã nói nhầm phần diện tích. Chính xác là phần trồng rau sạch là $1300cm^2$, còn lại $1200cm^2$ trồng hoa". Hãy tính cạnh hình vuông AMIO (biết $AM<BM$) và giải thích vì sao Bình biết Nam bị nhầm?

b) Lớp 9T có 30 bạn, mỗi bạn dự định đóng góp mỗi tháng 70000 đồng và sau ba tháng sẽ đủ tiền mua cho mỗi em ở "Mái ấm tình thương X" ba gói quà (Giá tiền các món quà như nhau). Khi các bạn đóng đủ số tiền như dự định thì "Mái ấm tình thương X" nhận thêm 9 em và giá tiền mỗi món quà sẽ lại tăng thêm 5% nên chỉ tặng được mỗi em hai gói quà. Hỏi có bao nhiêu em ở "Mái ấm tình thương X" được nhận quà?

Bài 5 (3.0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn T tâm O và bán kính R có $BAC = 120^0; ABC = 45^0$ và H là trực tâm. AH, BH, CH lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P.

a) Tính AC theo R. Tính số đo góc HPN và $\frac{MP}{MN}$.

b) Dựng đường kính AD của đường tròn T, HD cắt đường tròn T tại E khác D và cắt BC tại F. Chứng minh rằng các điểm A, N, H, P, E cùng thuộc một đường tròn và F là trung điểm của HD.

c) Chứng minh AD vuông góc với NP. Tia OF cắt đường tròn T tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và AI đi qua trung điểm của MP.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN PTNK HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN (Vòng 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề số 5

Câu 1 (2.0 điểm).

Cho phương trình $x^2 - 2\ m+1\ x + 2m^2 + 4m + 1 = 0\ \ 1$, với m là tham số.

a) Tìm m để phương trình $\ 1\ $ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$. Chứng minh rằng $\left|\dfrac{x_1+x_2}{2}\right| < 1$.

b) Giả sử hai nghiệm $x_1;x_2$ khác 0, chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \dfrac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2 \geq |x_1| + |x_2|$.

Câu 2 (2.0 điểm). Cho x, y là hai số nguyên với $x > y > 0$.

a) Chứng minh rằng nếu $x^3 - y^3$ chia hết cho 3 thì $x^3 - y^3$ chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng nếu $x^3 - y^3$ chia hết cho $x + y$ thì $x + y$ không thể là số nguyên tố.

c) Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho $x^k - y^k$ chia hết cho 9 với mọi x, y mà xy không chia hết cho 9.

Câu 3 (1.5 điểm).

a) Cho ba số $a,b,c \geq -2$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 0$. Chứng minh rằng $a = b = c = 0$.

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm A, B, C phân biệt với $OA = OB = OC = 1$. Biết rằng $x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + 6x_A.x_B.x_C = 0$. Chứng minh rằng $Min\ \ x_A;x_B;x_C\ \ < -\dfrac{1}{3}$ (kí hiệu x_M là hoành dộ của điểm M).

Câu 4 (3.5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $\ O\ $ với O là tâm. Gọi D là một điểm thay đổi trên cạnh BC (D khác B, C). Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và ACD lần lượt cắt AC, AB tại E và F (E, F khác A). Gọi K là giao điểm của BE và CF.

a) Chứng minh tứ giác AEKF nội tiếp đường tròn.

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu A, O, D thẳng hàng thì HK song song với BC.

c) Ký hiệu S là diện tích tam giác KBC. Chứng minh rằng khi D thay đổi trên cạnh BC thì ta luôn có $S \le \left(\frac{BC}{2}\right)^2 . \tan\frac{BAC}{2}$.

d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Chứng minh rằng:

$$BF.BA - CE - CA = BD^2 - CD^2 \text{ và } ID \perp BC$$

Câu 5 (1.0 điểm). Lớp 9A có 6 học sinh tham gia một kỳ thi toán và nhận 6 điểm số khác nhau là các số nguyên từ 0 đến 20. Gọi m là trung bình cộng các điểm số của 6 em học sinh trên. Ta nói rằng hai học sinh (trong 6 học sinh trên) lập thành một cặp hoàn hảo nếu điểm trung bình cộng của hai em đó lớn hơn m.

a) Chứng minh rằng khôn thể chia 6 em học sinh trên thành 3 cặp mà mỗi cặp đều hoàn hảo.

b) Có thể có được nhiều nhất là bao nhiêu cặp hoàn hảo

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề số 6

Câu 1. (2.0 điểm).

a) Cho các số thực a, b, c sao cho $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=29$ và $abc=11$. Tính giá trị của $a^5+b^5+c^5$.

b) Cho biểu thức $A=\ m+n\ ^2+3m+n$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là một số chính phương thì n^3+1 chia hết cho m.

Câu 2. (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $2\ x+2\ \sqrt{3x-1}=3x^2-7x-3$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}-\dfrac{10}{x}=-1 \\ 20y^2-xy-y=1 \end{cases}$

Câu 3. (1.5 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC có $\mathrm{AB}<\mathrm{AC}<\mathrm{BC}$. Trên các cạnh BC, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\mathrm{AN}=\mathrm{AB}=\mathrm{BM}$. Các đường thẳng AM và BN cắt nhau tại K. Gọi H là hình chiếu của K lên AB. Chứng minh rằng:

a) Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên KH.

b) Các đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau.

Câu 4. (1.5 điểm)

Cho x, y là 2 số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{16\sqrt{xy}}{x+y}+\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Câu 5. (2.0 điểm)

Cho tam giác ABC có góc B tù. Đường tròn O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, CA, BC lần lượt tại L, H, J.

a) Các tia BO, CO cắt LH lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 7

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1.

a) Cho hai số thực a, b sao cho $|a| \neq |b|$ và $ab \neq 0$ thỏa mãn

$$\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{a^2-ab}=\frac{3a-b}{a^2-b^2}.$$

Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a^3+2a^2b+3b^3}{2a^3+ab^2+b^3}$.

b) Cho m, n là các số thực dương thỏa mãn $5m+n \vdots m+5n$. Chứng minh rằng $m \vdots n$.

Câu 2.

a) Giải phương trình $x^2-6x+4+2\sqrt{2x-1}=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=9\ x+y \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

Câu 3. Cho tam giác ABC có các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Gọi K là hình chiếu của A lên A_1B_1, L là hình chiếu của B lên B_1C_1. Chứng minh rằng $A_1K=B_1L$

Câu 4. Cho x, y là các số thực dương. Chứng minh rằng $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y}-\dfrac{x+y}{2}\leq\dfrac{1}{4}$

Câu 5. Cho tứ giác nội tiếp ABCD có AC cắt BD tại EE. Tia AD cắt tia BC tại F. Dựng hình bình hành AEBG.

a) Chứng minh rằng FD.FG = FB.FE

b) Gọi H là điểm đối xứng của E qua AD. Chứng minh rằng điểm F, H, A, G cùng thuộc một đường tròn

Câu 6. Nam cắt một tờ giấy ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng rồi lấy một số miếng nhỏ đó cắt ra làm 4 hoặc 8 miếng nhỏ hơn và Nam cứ tiếp tục thực hiện việc cắt như thế nhiều lần. Hỏi Nam có thể cắt được 2016 miếng lớn và nhỏ hay không?Vì sao?

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN PTNK HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn: **TOÁN (vòng 1)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề số 8

Bài 1. Biết a và b là các số thực dương với $a \ne b$ và

$$\left[\frac{a\ \ a-4b\ \ +b\ \ b+2a}{a+b}\right]:\left[\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\right]=2016$$

Tính tổng $S=a+b$.

Bài 2.

a) Giải phương trình $x\sqrt{x+5}=2x^2-5x$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{y}+x-3\ \ y+\sqrt{x}\ \ =0\\ x^2+y=5\end{cases}$

Bài 3. Cho phương trình $\dfrac{x+1\ \ x^2+mx+2m+14}{\sqrt{x}}=0$.

a) Giải phương trình trên khi $m=-8$.

b) Tìm các giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn

$$\sqrt{x_2^2+\ \ m+1\ \ x_2+2m+14}=3-\sqrt{x_1}$$

Bài 4.

a) Ông An cải tạo một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 2,5 lần chiều rộng. Ông thấy rằng nếu đào một cái hồ có mặt hồ hình chữ nhật thì sẽ chiếm 3% diện tích mảnh vườn, còn nếu giảm chiều dài 5m và tăng chiều rộng 2m thì mặt hồ có hình vuông và diện tích mặt hồ giảm được $20\,m^2$. Hãy tính các cạnh của mảnh vườn.

b) Lớp 9A có 27 học sinh nam và 18 học sinh nữ. Nhân dịp sinh nhật bạn X(là một thành viên của lớp), các bạn trong lớp cs nhiều món quà tặng X. Ngoài ra mỗi bạn nam trong lớp làm 3 tấm thiệp và mỗi bạn nữ trong lớp làm 2 hoặc 5 con hạc để tặng X. Biết rằng số tấm thiệp và số con hạc bằng nhau, hỏi bạn X là nam hay nữ?

Bài 5. Cho tam giác đều ABC có tâm O và $AB = 6a$, các điểm M và N lần lượt trên cạnh AB, AC sao cho $AM = AN = 2a$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, CA và MN.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N, B, C cùng thuộc một đường tròn T. Tính diện tích của tứ giác BMNC theo a.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK. Chứng minh đường tròn đường kính NC tiếp xúc với AI.

c) Giả sử AE tiếp xúc với đường tròn T tại E(E và B cùng phía đối với AI). Gọi F là trung điểm của OE. Tình số đo góc $\mathrm{AF}J$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 9

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN PTNK HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn: **TOÁN (vòng 2)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1(2.5 điểm).

a) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x-2y \quad x+my & = m^2-2m-3 \\ y-2x \quad y+mx & = m^2-2m-3 \end{cases}$

Giải phương trình khi $m=-3$ và tìm m để hệ phương trình có ít nhất một nghiệm $x_0;y_0$ thỏa mãn điều kiện $x_0>0, y_0>0$.

b) Tìm $a\ge 1$ để phương trình $ax^2+\ 1-2a\ \ x+1-a=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_2^2-\mathrm{ax}_1=a^2-a-1$.

Câu 2(2.0 điểm).

Cho x, y là hai số nguyên dương thỏa mãn x^2+y^2+10 chia hết cho xy.

a) Chứng minh rằng x và y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh rằng $k=\dfrac{x^2+y^2+10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k\ge 12$.

Câu 3(1.5 điểm).

Biết $x\ge y\ge z; x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=6$.

a) Tính $S=\ x-y\ ^2+\ x-y\quad y-z\ +\ y-z\ ^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $P=\left|\ x-y\quad y-z\quad z-x\ \right|$.

Câu 4(3.0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn có $BAC>45^0$. Dựng các tam giác vuông ABMN, ACPQ(M và C khác phía đối với AB, B và Q khác phía đối với AC). AQ cắt đoạn BM tại E và NA cắt CP tại F.

a) Chứng minh rằng $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$ và tứ giác EFQN nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) MN cắt PQ tại D, các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNQ cắt nhau tại K(khác D), các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại J. Chứng minh rằng các điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Câu 5(1.0 điểm).

Với mỗi số nguyên dương m lớn hơn 1, kí hiệu $s(m)$ là ước nguyên dương lớn nhất của m và khác m. Cho số tự nhiên $n > 1$, đặt $n_0 = n$ và lần lượt tính các số

$$n_1 = n_0 - s(n_0);n_2 = n_1 - s(n_1);...;n_{i+1} = n_i - s(n_i);...$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k để $n_k = 1$ và tính k khi $n = 2^{16}.14^{17}$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: **TOÁN (chuyên)**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề số 10

Câu 1. *(1,5 điểm)*

Cho hai số thực a, b thỏa điều kiện $ab=1$, $a+b\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\left(a+b\right)^{3}}\left(\frac{1}{a^{3}}+\frac{1}{b^{3}}\right)+\frac{3}{\left(a+b\right)^{4}}\left(\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{b^{2}}\right)+\frac{6}{\left(a+b\right)^{5}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

a) Giải phương trình: $2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}$

b) Chứng minh rằng: $abc\left(a^3-b^3\right)\left(b^3-c^3\right)\left(c^3-a^3\right)\,\vdots\,7$ với mọi số nguyên a, b, c.

Câu 3. *(2 điểm)* Cho hình bình hành $ABCD$. Đường thẳng qua C vuông góc với CD cắt đường thẳng qua A vuông góc với BD tại F. Đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt đường trung trực của AC tại E. Hai đường thẳng BC và EF cắt nhau tại K. Tính tỉ số $\frac{KE}{KF}$.

Câu 4. *(1 điểm)* Cho hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện: $a+b\leq 1$.

Chứng minh rằng: $a^2-\frac{3}{4a}-\frac{a}{b}\leq -\frac{9}{4}$

Câu 5. *(2 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của cạnh BC và N là điểm đối xứng của M qua O. Đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B vuông góc với BC tại D. Kẻ đường kính AE. Chứng minh rằng:

a) Chứng minh $BA.BC=2BD.BE$

b) CD đi qua trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC.

Câu 6. *(1 điểm)* Mười vận động viên tham gia cuộc thi đấu quần vợt. Cứ hai người trong họ chơi với nhau đúng một trận. Người thứ nhất thắng x_1 trận và thua y_1 trận, người thứ hai thắng x_2 trận và thua y_2 trận, ..., người thứ mười thắng x_{10} trận và thua y_{10} trận. Biết rằng trong một trận đấu quần vợt không có kết quả hòa. Chứng minh rằng:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_{10}^2$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 11

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN PTNK HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2014 – 2015
Môn: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I. Cho phương trình $(m^2+5)x^2-2mx-6m=0(1)$ với m là tham số.

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện

$$(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2})^4=16$$

Câu II. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2(1+x\sqrt{y})^2=9y\sqrt{x}\\2(1+y\sqrt{x})^2=9x\sqrt{y}\end{cases}$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN. Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA}\ge 3+2\sqrt{2}$

Câu III. Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$

a) Chứng minh rằng a + b không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu c > 1 thì a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố

Câu IV. Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính AB = 2R (C ≠ A, C ≠ B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB; I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH. Các đường thẳng CI, CJ cắt AB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng AN = AC, BM = BC.

b) Chứng minh 4 điểm M, N, J, I cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.

c) Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác CMN theo R.

Câu V. Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

a) Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

b) Tìm tất cả các bộ gồm 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

........................Hết......................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2014 – 2015
Môn: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề số 12

Câu 1: (2 điểm)

a) Giải phương trình: $x\sqrt{2x-3}=3x-4$

b) Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: x + y + z = 0 và xyz ≠ 0.

Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\dfrac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\dfrac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$

Câu 2: (1,5 điểm)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \\ x+y-\dfrac{4}{x}=\dfrac{4y}{x^2} \end{cases}$

Câu 3: (1,5 điểm)

Cho tam giác đều ABC và M là một điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi D, E lần lượt là hình chiếuvuông góc của M trên AB và AC. Xác định vị trí của M để tam giác MDE của chu vi nhỏ nhất

Câu 4: (2 điểm).

a) Cho x, y là 2 số thực khác 0. Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\ge\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

b) Cho a, b là hai số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$

Câu 5: (2 điểm)

Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếpđiểm). Gọi H là giao điểm của AB voi OM, I là trung điểm của MH. Đường thẳng AI cắt (O) tạiđiểm K (K khác A).

a) Chứng minh HK vuông góc AI.

b) Tính số đo góc MKB

Câu 6: (1 điểm)

Tìm cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn phương trình: $2015(x^2+y^2)-2014(2xy+1)=25$

……………………Hết…………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề số 13
(Không có lời giải)

Câu 1. (2 điểm)

a) Giải phương trình: $x\sqrt{2x-2}+5x=9$.

b) Cho ba số thực *x*, *y*, *z* đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Tính giá trị biểu thức: $A=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}$

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho phương trình: $x^2-5mx-4m=0$ (x là ẩn số).

a) Định *m* để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm *m* để biểu thức:

$A=\frac{m^2}{x_1^2+5mx_2+12m}+\frac{x_2^2+5mx_1+12m}{m^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho ΔABC có *BC* là cạnh dài nhất. Trên cạnh *BC* lấy các điểm *D*, *E* sao cho *BD*=*BA*, *CE*=*CA*. Đường thẳng qua *D* và song song *AB* cắt *AC* tại *M*. Đường thẳng qua *E* và song song *AC* cắt *AB* tại *N*. Chứng minh *AM*=*AN*.

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho *x*, *y* là hai số dương thỏa mãn *x* + *y* = 1. Chứng minh rằng: $3(3x-2)^2+\frac{8x}{y}\geq 7$

Câu 5. (2 điểm) Từ điểm *A* ở ngoài đường tròn (*O*) vẽ các tiếp tuyến *AB*, *AC* và cát tuyến *AEF* đến đường tròn (*EF* không qua *O* và *B*, *C* là các tiếp điểm). Gọi *D* là điểm đối xứng của *B* qua *O*. *DE*, *DF* cắt *AO* theo thứ tự ở *M* và *N*. Chứng minh:

a) $\Delta CEF \sim \Delta DNM$.

b) *OM*=*ON*.

Câu 6. (1,5 điểm) Chữ số hàng đơn vị trong hệ thập phân của số $M=a^2+ab+b^2$ (*a*, *b* ∈ $\mathbb{N}^*$)là 0.

a) Chứng minh rằng *M* chia hết cho 20.

b) Tìm chữ số hàng chục của *M*.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề số 14
(Không có lời giải)

Câu 1 : (4 điểm)

1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + y = 1 \\ \dfrac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases}$

2) Giải phương trình: $(2x^2 - x)^2 + 2x^2 - x - 12 = 0$

Câu 2 : (3 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2(2m + 1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$ (x là ẩn số)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa $|x_1| = 2|x_2|$

Câu 3 : (2 điểm)

Thu gọn biểu thức: $A = \dfrac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

Câu 4 : (4 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng:

a) $ABP = AMB$

b) MA. MP = BA. BM

Câu 5 : (3 điểm)

a) Cho phương trình: $2x^2 + mx + 2n + 8 = 0$ (x là ẩn số và m, n là các số nguyên). Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên.

Chứng minh rằng: $m^2 + n^2$ là hợp số.

b) Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$.

Tính $P = a^{2010} + b^{2010}$

Câu 6 : (2 điểm) Cho tam giác OAB vuông cân tại O với OA = OB = 2a. Gọi (O) là đường tròn tâm O bán kính a. Tìm điểm M thuộc (O) sao cho MA + 2MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 7 : (2 điểm) Cho a, b là các số dương thoả $a^2 + 2b^2 \leq 3c^2$. Chứng minh $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} \geq \dfrac{3}{c}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 15

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Câu 1: Giải phương trình : $\sqrt{8x+1}+\sqrt{46-10x}=-x^3+5x^2+4x+1$

Câu 2: Cho đa thức f(x) = ax^3+bx^2+cx+d. với a là số nguyên dương, biết: f(5) – f(4) = 2012

Chứng minh: f(7) – f(2) là hợp số.

Câu 3: Cho ba số dương a; b và c thỏa a + b + c = 1. Tìm GTNN của :

$$A=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Câu 4: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O; R) có AC vuông góc BD tại H. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho: AM = 1/3 AB. Trên cạnh HC lấy trung điểm N. chứng minh MH vuông góc với DN.

Câu 5: Cho đường tròn tâm O và đường tròn tâm I cắt nhau tại hai điểm A và B(O và I khác phía đối với A và B). IB cắt (O) tại E: OB cắt (I) tại F. Qua B vẽ MN // EF(M thuộc (O) và N thuộc (I).

a) Chứng minh :Tứ giác OAIE nội tiếp ;

b) Chứng minh :AE + AF = MN

Câu 6: Trên mặt phẳng cho 2013 điểm tùy ý sao cho khi 3 điểm bất kỳ thì tồn tại 2 điểm mà khoảng cách giữa 2 điểm đó luôn bé hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1007 điểm(kể cả biên).

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN PTNK HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2008– 2009
Môn: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **150 phút**
(Không kể thời gian giao đề)

Đề số 16

Câu 1 (4 điểm):

a) Tìm m để phương trình $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả $|x_1 - x_2| = 17$.

b) Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x \geq m - 1 \\ mx \geq 1 \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất.

Câu 2(4 điểm): Thu gọn các biểu thức sau:

a) $S = \dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$ (a, b, c khác nhau đôi một)

b) $P = \dfrac{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}}$ $(x \geq 2)$

Câu 3(2 điểm): Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa $a \leq b \leq c \leq d$ và $a + d = b + c$.

Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là tổng của ba số chính phương.

b) $bc \geq ad$.

Câu 4 (2 điểm):

a) Cho a, b là hai số thực thoả $5a + b = 22$. Biết phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Hãy tìm hai nghiệm đó.

b) Cho hai số thực sao cho $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^4 + y^4$ là các số nguyên. Chứng minh $x^3 + y^3$ cũng là các số nguyên.

Câu 5 (3 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ một điểm C thuộc đường tròn (O) kẻ CH vuông góc với AB (C khác A và B; H thuộc AB). Đường tròn tâm C bán kính CH cắt đường tròn (O) tại D và E. Chứng minh DE đi qua trung điểm của CH.

Câu 6 (3 điểm): Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $\angle ABD = \angle CBE = 20^0$. Gọi M là trung điểm của BE và N là điểm trên cạnh BC sao BN = BM. Tính tổng diện tích hai tam giác BCE và tam giác BEN.

Câu 7 (2 điểm): Cho a, b là hai số thực sao cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh $0 < a + b \leq 2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề số 1

Câu 1: *(1,0 điểm).*

Cho a, b, c là ba số thực thỏa điều kiện $a+b+c=1$. Tính giá trị của biểu thức:
$A=a^3+b^3+c^3-3(ab+c)(c-1)$.

Lời giải

Ta có: $ab+c=ab+c(a+b+c)=(a+c)(b+c)$

và $c-1=-(a+b)$.

Do đó: $A=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^3=1$.

Câu 2: *(2,5 điểm).*

a) Giải phương trình: $5\sqrt{x-1}-\sqrt{x+7}=3x-4$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+y)-xy=4 \\ xy(x+y-4)=-2 \end{cases}$.

Lời giải

a) $5\sqrt{x-1}-\sqrt{x+7}=3x-4$

Điều kiện: $x \geq 1$.

Với điều kiện trên phương trình trở thành: $\dfrac{25(x-1)-(x+7)}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}=3x-4$

$\Leftrightarrow \dfrac{8(3x-4)}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}=3x-4 \Leftrightarrow (3x-4)\left(\dfrac{8}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}-1\right)=0$

$$\left[\begin{array}{l} 3x-4=0 \\ \dfrac{8}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{3}(nhan) \\ 5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}=8\ (*) \end{array}\right.$$

Giải $(*)$, ta được: $25(x-1)+x+7+10\sqrt{x^2+6x-7}=64$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+6x-7}=-13x+41\left(x \leq \dfrac{41}{13}\right)$

$\Leftrightarrow 25(x^2+6x-7)=169x^2-1066x+1681$

$\Leftrightarrow -144x^2+1216x-1856=0$

$$\Leftrightarrow -144(x-2)\left(x-\frac{58}{9}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(nhan) \\ x=\frac{58}{9}(loai) \end{array}\right..$$

Vậy $S=\left\{\frac{4}{3};2\right\}$.

b) $\begin{cases} 2(x+y)-xy=4 \\ xy(x+y-4)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-2)-2(y-2)=0 \\ xy(x+y-4)=-2 \end{cases}$

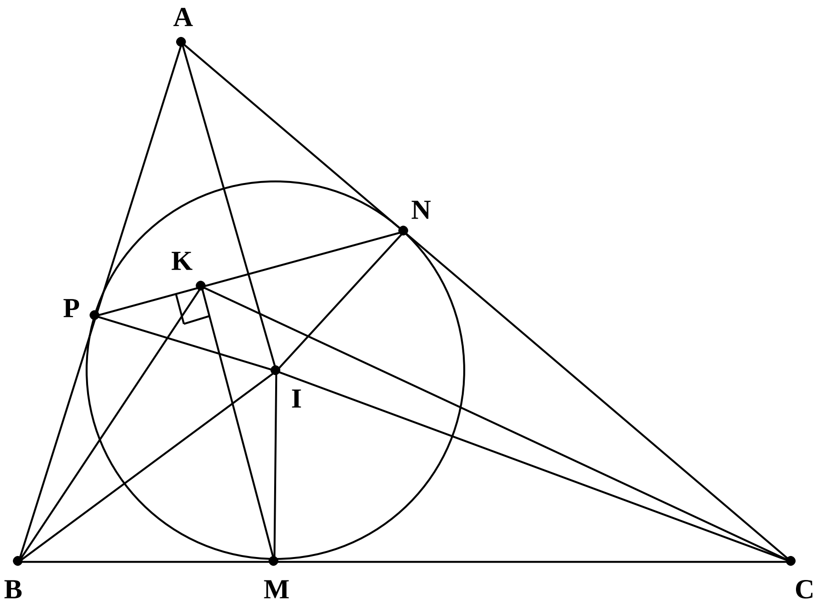
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(x-2)=0 \\ xy(x+y-4)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2;x=2 \\ xy(x+y-4)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình trên có nghiệm: $(1;2)$, $(2;1)$.

Câu 3: *(1,5 điểm)*.

Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên NP. Chứng minh: KM là tia phân giác BKC.

Lời giải



Theo tính chất của tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $MB=BP$, $MC=CN$, $AN=AP$.

Trên đoạn NP, ta lấy điểm K' sao cho: $\frac{K'N}{K'P}=\frac{CN}{BP}$.

Ta có ΔANP cân tại A nên $ANP=APN$.

Lại có: $BPK' + APN = 180°$ và $CNK' + ANP = 180°$ nên $BPK' = CNK'$.

xét $\Delta BPK'$ và $\Delta CNK'$, có:

$BPK' = CNK'$

$\frac{K'N}{K'P} = \frac{CN}{BP}$

Vậy $\Delta BPK' \# \Delta CNK'$ $(c-g-c)$.

Suy ra: $BK'P = CK'N$ và $\frac{K'B}{K'C} = \frac{BP}{CN} = \frac{MB}{MC}$.

Do $\frac{K'B}{K'C} = \frac{MB}{MC}$ nên $K'M$ là phân giác của $BK'C$.

mà $BK'P = CK'N$

nên $MK'P = MK'B + BK'P = \frac{1}{2}BK'C + \frac{1}{2}\left(BK'P + CK'N\right) = 90°$.

Suy ra $MK' \perp NP$.

Vậy $K' \equiv K$.

Do đó: KM là tia phân giác BKC.

Câu 4: *(2,0 điểm).*

Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0;2]$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

a) Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 < 6$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Lời giải

a) Theo giả thiết, ta có: $(2-x)(2-y)(2-z) \ge 0$

$\Rightarrow 8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - xyz \ge 0$

Từ đó, ta có: $x^2 + y^2 + z^2 \le x^2 + y^2 + z^2 + 8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - xyz$

$= (x+y+z)^2 - 4(x+y+z) + 8 - xyz$

$= 5 - xyz \le 5 < 6$.

b) Ta có: $P = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right) = 3\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$

$= \frac{3}{2}\left[3\left(x^2+y^2+z^2\right) - (x+y+z)^2\right] = \frac{3}{2}\left[3\left(x^2+y^2+z^2\right) - 9\right]$

theo chứng minh trên thì $x^2+y^2+z^2\le 5$. Từ đó, ta suy ra:

$$P\le \frac{3}{2}(3.5-9)=9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (x,y,z) là một hoán vị của $(2,1,0)$.

Vậy $\max P=9$.

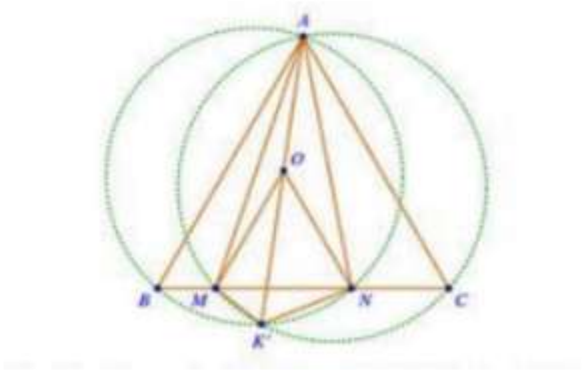
Câu 5: (*2,0 điểm*).

Cho tam giác đều ABC. Gọi M, N là hai điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MAN=30^\circ$ (M nằm giữa B và N). Gọi K là giao điểm của hai đường tròn (ABN) và (ACM). Chứng minh rằng:

a) Hai điểm K và C đối xứng với nhau qua AN.

b) Đường thẳng AK đi qua tâm đường tròn (AMN).

Lời giải



a) Bên trong MAN, lấy điểm K' sao cho $AK'=AC$ và $K'AN=NAC$.
xét $\Delta K'AN$ và ΔCAN, có:

$K'AN=NAC$

$K'A=CA$

AN: cạnh chung

Vậy $\Delta K'AN=\Delta CAN\,(c-g-c)$.

$\Rightarrow AK'N=ACN=60^\circ=ABN$

Do đó, tứ giác $ABK'N$ nội tiếp. suy ra K' thuộc đường tròn (ABN). (1)

Ta có: $MAN=30^\circ=K'AN+K'AM=NAC+K'AM$.

và $NAC+MAB=30^\circ$.

Nên $K'AM = MAB$. Từ đó, bằng cách chứng minh tương tự như trên, ta cũng có K' thuộc đường tròn (ACM). (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra K' là điểm chung thứ hai của hai đường tròn (ABN) và (ACM), tức là K' trùng K.

Bây giờ, do $\Delta K'AN = \Delta CAN$ nên $NC = NK' = NK$.

Suy ra N thuộc trung trực của KC.

Lại có $AC = AK' = AK$

nên A cũng thuộc trung trực của KC.

Do đó AN là trung trực của KC. Tức là K và C đối xứng với nhau AN.

b) Trên đoạn AK lấy điểm O sao cho $OMN = 60°$. Khi đó, do $AKN = ABN = 60°$ nên $AKN = OMN = 60°$, suy ra tứ giác $OMNK$ nội tiếp. Từ đây ta có:

$ONM = OKM = ACM = 60°$.

Mà $OMN = 60°$ nên ΔOMN đều.

Ta có $MOK = MNK$ (cùng chắn cung MK của đường tròn $(OMNK)$)

$MNK = BAK$ (cùng chắn cung BK của đường tròn (ABN))

và $BAK = 2MAK$ (dựa trên chứng minh ở câu a)) nên $MOK = 2MAK$.

Mặt khác, ta lại có: $MOK = MAK + OMA$ nên $MAK = OMA$. Suy ra ΔOMA cân tại O ,tức là ta có $OA = OM = ON$.

Vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN và như thế, ta có AK đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN.

Câu 6: (*1,0 điểm*).

Cho m, n là hai số nguyên. Chứng minh rằng: nếu $7(m+n)^2 + 2mn$ chia hết cho 225 thì mn cũng chia hết cho 225.

Lời giải

Ta có: $A = 7(m+n)^2 + 2mn = 7(m^2+n^2) + 16mn = 7(m-n)^2 + 30mn$.

Do $A \vdots 225$ nên $A \vdots 15$.

Lại có $30mn \vdots 15$ nên $7(m-n)^2 \vdots 225$.

Suy ra $(m-n) \vdots 15$.

Từ đây, ta có: $7(m-n)^2$ chia hết cho 225.

Dẫn đến $30mn \vdots 225$, tức là $mn \vdots 15$.

Mà $mn=(m-n)n+n^2$ nên $n^2 \vdots 15$ tức $n \vdots 15$. Từ đó, suy ra $m \vdots 15$ (do $(m-n) \vdots 15$).

Vậy $mn \vdots 15^2 = 225$.

Đề số 2

Bài 1.

$$\left(\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y}).(\sqrt{x}-\sqrt{y})+2(x+2y)}\right)+\left(\frac{y}{\sqrt{x}.(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\frac{x}{\sqrt{y}.(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right)=\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+2\sqrt{xy}+x+y-2\sqrt{xy}}{x-y+2x+4y}+\frac{y\sqrt{y}+x\sqrt{x}}{\sqrt{xy}.(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+y)}{3(x+y)}+\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y-\sqrt{xy})}{\sqrt{xy}.(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y-\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=1$$

$$\Leftrightarrow x+y-\sqrt{xy}=\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}=1$$

Vậy $\frac{x}{y}=1$

Bài 2.

a) **Giải phương trình** $\dfrac{2x^2.(7-x)}{\sqrt{3-x}}=x(x-7)$

Điều kiện: $x<3$

$$\frac{2x^2(7-x)}{\sqrt{3-x}}=x(x-7)\Leftrightarrow\frac{2x^2(7-x)}{\sqrt{3-x}}+x(7-x)=0$$

$$\Leftrightarrow x(7-x)\left[\frac{2x}{\sqrt{3-x}}+1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\quad(tm)\\x=7\quad(ktm)\\\dfrac{2x}{\sqrt{3-x}}+1=0(2)\end{array}\right.$$

$$(2)\Leftrightarrow 2x=-\sqrt{3-x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\4x^2=3-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{4}\quad(ktm)\\x=-1\ (tm)\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;-1\}$

b)

$$\begin{cases}(x+3)(x-1)=(y-2)(x+3)\ (1)\\(x-1)\sqrt{y^2-5y+8}=(y-2)^2\ (2)\end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow(x+3)[(x-1)-(y-2)]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+3=0\\x-1=y-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=y-1\end{array}\right.$$

+) Với $x=-3$ thay vào phương trình (2) ta có: $-4\sqrt{y^2-5y+8}=(y-2)^2$

(vô nghiệm vì $VT<0;VP\ge 0$)

+) Với $x=y-1$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$(y-2)\sqrt{y^2-5y+8}=(y-2)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y-2=0\Leftrightarrow y=2\qquad(3)\\\sqrt{y^2-5y+8}=y-2\ (4)\end{array}\right.$$

$$(3)\Rightarrow x=y-1=2-1=1\Rightarrow(x;y)=(1;2)$$

$$(4)\Leftrightarrow\begin{cases}y-2\ge 0\\y^2-5y+8=y^2-4y+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 2\\y=4\quad(tm)\end{cases}\Rightarrow x=4-1=3\Rightarrow(x;y)=(3;4)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $(x;y)=\{(1;2);(3;4)\}$

Câu 3:

a) Phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow\Delta=1-4(3m-11)=0\Leftrightarrow 1-12m+44=0\Leftrightarrow m=\frac{15}{4}$$

Khi đó phương trình (1) trở thành $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ có nghiệm kép $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$

Vậy với $m=\frac{15}{4}$ thì phương trình (1) có nghiệm kép, và nghiệm kép là $x=\frac{1}{2}$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{15}{4}$

Gọi hai nghiệm phân biệt của phương trình là $x_1; x_2$, theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \quad (2) \\ x_1x_2 = 3m - 11 (3) \end{cases}$$

Theo giả thiết ta lại có $2017x_1 + 2018x_2 = 2019$, kết hợp:

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2017x_1 + 2018x_2 = 2019 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ 2017(1 - x_2) + 2018x_2 = 2019 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Thay vào (3) ta có: $-2 = 3m - 11 \Leftrightarrow m = 3 \quad (tm)$

Thử lại : với m=3 thì ta có phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4:

a) Gọi số sào dưa của nhà ông A là x (sào) (ĐK: $x > 0$)

Số tấn dưa thu hoạch được là $2x$ (tấn) $= 2000x$ (kg)

Số dưa bán với giá $1500d/kg$ là $30\%.2000x = 600x \quad (kg)$

Số dưa bán với giá 3500 đ/1kg là $2000x - 600x = 1400x$ (kg)

Do đó số tiền thu được khi bán hết $2x$ tấn dưa là:

$600x.1500 + 1400x.3500 = 5800000x$ (đồng) $= 5,8x$ (triệu đồng)

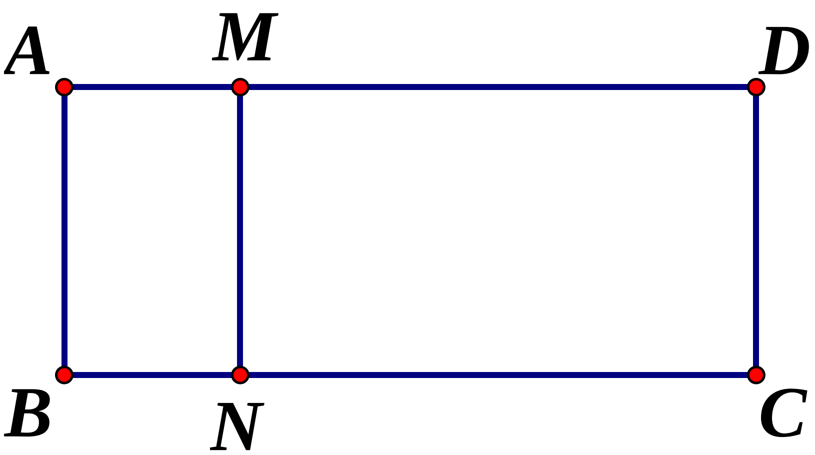
Số tiền đầu tư cho x sào dưa là $4x$ (triệu đồng)

Do nếu trừ tiền đầu tư thì lãi được 9 triệu đồng nên ta có phương trình:

$5,8x - 4x = 9 \Leftrightarrow 1,8x = 9 \Leftrightarrow x = 5 \quad (tm)$

Vậy nhà ông A đã trồng 5 sào dưa.

b)



Để nuôi được 2400 con gà, mỗi con cần $1m^2$ diện tích vườn thả thì diện tích vườn thả MNCD là $S_{MNCD} = 2400m^2$

Diện tích khu chuồng trại $ABNM$ là $S_{ABNM} = \dfrac{S_{MNCD}}{3} = 800\left(m^2\right)$

Diện tích cả khu đất ABCD là $S_{ABCD} = 2400 + 800 = 3200\left(m^2\right)$

Gọi chiều rộng AB và chiều dài của khu đất lần lượt là $x(m)$ và $y(m)$ $(0 < x < y)$

Chu vi khu đất là 240m nên ta có phương trình:

$2(x+y) = 240 \Rightarrow y = 120 - x \qquad (1)$

Diện tích khu đất $ABCD$ là $3200m^2$ nên ta có phương trình $xy = 3200 \qquad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được phương trình:

$x(120-x) = 3200$

$\Leftrightarrow x^2 - 120x + 3200 = 0$

$\Leftrightarrow (x-40)(x-80) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 40 \Rightarrow y = 80 & (tm) \\ x = 80 \Rightarrow y = 40 & (ktm) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow AB = CD = 40m$

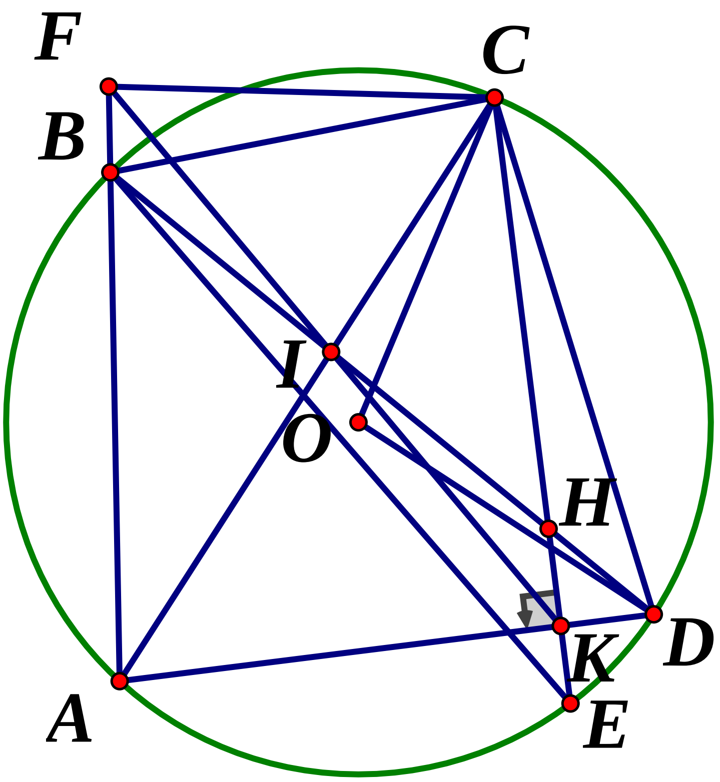
$$\Rightarrow MD = \frac{S_{MNCD}}{CD} = \frac{2400}{40} = 60(m)$$

Chu vi của khu vườn thả hình chữ nhật $MNCD$ là

$2(MD + CD) = 2(60+40) = 200 \quad (m)$

Vậy chu vi của khu đất làm vườn thả là $200m$

Bài 5



a) Ta có $COD = 2.CAD$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

$\Rightarrow COD = 2.45^0 = 90^0$

Vì $AC \perp BD \quad (gt)$ nên góc $CID = 90^0$

Vì $CK \perp AD \quad (gt)$ nên góc $CKD = 90^0$

$\Rightarrow CID = CKD = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác CIKD có 2 đỉnh I và K cùng nhìn cạnh CD dưới 1 góc 90^0 nên nó là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính CD.

Vì $AC \perp BD \quad (gt)$ nên ΔAID vuông cân tại I $\Rightarrow IA = ID \quad (1)$

Ta có góc CBD =góc CAD $= 45^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

Tam giác CIB vuông tại I có $CBI = CBD = 45^0$ nên tam giác CIB vuông cân tại I

$\Rightarrow IB = IC \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IA + IC = IB + ID \Rightarrow AC = BD$ (Vì I thuộc đoạn AC và I thuộc đoạn BD)

b) Chứng minh A là tâm……

ΔACK **vuông tại K** $\Rightarrow ICH = ACK = 90^0 - CAK = 90^0 - 45^0 = 45^0$

Tam giác CIH vuông tại I có $ICH = 45^0$ (cmt) nên nó vuông cân tại I $\Rightarrow IC = IH \quad (3)$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow IB = IH \Rightarrow I$ là trung điểm BH, mà $AI \perp BH \quad (AC \perp BD)$

$\Rightarrow AI$ là trung trực BH (4)

ΔCIH vuông cân tại I $\Rightarrow DHE = IHC$ (đối đỉnh)$= 45^0$

Mặt khác $HED = CAD = 45^0$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

$\Rightarrow DHE = HED = 45^0 \Rightarrow \Delta HDE$ vuông cân ở D.

Mà DK là đường cao hạ từ đỉnh D của $\Delta HDE \Rightarrow DK$ cũng là trung trực của HE

$\Rightarrow AK$ là đường trung trực của HE (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow A$ là giao điểm của trung trực BH và trung trực HE

$\Rightarrow A$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBHE

+) Tính IK theo R

Ta có: IK là đường trung bình của ΔBHE nên $IK = \frac{BE}{2}$

Ta có $BCH = BCI + ICH = 45^0 + 45^0 = 90^0$ (do ΔBCI và ΔCHI vuông cân)

$\Rightarrow BOE = 2.BCE = 2.90^0 = 180^0$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung BE của (T))

$\Rightarrow B, O, E$ thẳng hàng và BE là đường kính của $(T) \Rightarrow BE = 2R \Rightarrow IK = \frac{BE}{2} = R$

c) Chứng minh O là trực tâm ΔAIK

Vì $IA = ID, OA = OD = R$ nên OI là trung trực của AD $\Rightarrow OI \perp AD \Rightarrow OI \perp AK \quad (6)$

Tam giác CAK vuông ở K có $CAK = 45^0$ nên ΔCAK vuông cân tại K

$\Rightarrow KC = KA$. Mặt khác $OC = OA = R \Rightarrow OK$ là trung trực của AC $\Rightarrow OK \perp KA \quad (7)$

Từ (6) và (7) $\Rightarrow O$ là giao điểm của 2 đường cao hạ từ I và K của ΔAIK

$\Rightarrow O$ là trực tâm ΔAIK

+) Chứng minh CK.CB=CF.CD

Ta có: $BAC = BEC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC của (T))

Vì IK // BE (tính chất đường trung bình) $\Rightarrow BEC = FKC$ (đồng vị)

$\Rightarrow BAC = FKC$

Tứ giác $AFCK$ có hai đỉnh A và K cùng nhìn FC dưới một góc bằng nhau nên $AFCK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow CFB = 180^0 - CKA = 90^0 \quad (8)$

Vì ABCD là tứ giác nội tiếp nên $FBC = CDK$ (cùng bù với góc ABC) $\quad (9)$

Từ (8) và (9) $\Rightarrow \Delta FBC \sim \Delta KDC(g.g) \Rightarrow \dfrac{CF}{CK} = \dfrac{CB}{CD} \Rightarrow CK.CB = CF.CD$ (đpcm)

Đề số 3

Câu 1.

Ta có: $a+b+c=0 \Leftrightarrow b=-a-c$

$\Rightarrow a^2 = 2(a+c+1)(a+b-1)$

$\Leftrightarrow a^2 = 2(a+c+1)(a-a-c-1)$

$\Leftrightarrow a^2 = 2(a+c+1)(-c-1)$

$\Leftrightarrow a^2 + 2(a+c+1)(c+1) = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 2a(c+1) + 2(c+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (a+c+1)^2 + (c+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c+1=0 \\ c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow b=-a-c=1$

$\Rightarrow A = a^2+b^2+c^2 = 0^2+1^2+(-1)^2 = 2$

Vậy $A=2$

Câu 2

Bài a. Giải phương trình : $4\sqrt{x+3} = 1+4x+\dfrac{2}{x}$

Điều kiện : $\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x \ne 0 \end{cases}$

$4\sqrt{x+3} = 1+4x+\dfrac{2}{x}$

$\Leftrightarrow 4x\sqrt{x+3} = x+4x^2+2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + x+3-1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{x+3}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\sqrt{x+3}=1 \\ 2x-\sqrt{x+3}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3}=2x-1 \\ \sqrt{x+3}=2x+1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-1\ge 0\\ x+3=1-4x+4x^2\end{cases}\\ \begin{cases}2x+1\ge 0\\ x+3=1+4x+4x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ 4x^2-5x-2=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ 4x^2+3x-2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5+\sqrt{57}}{8}(tm)\\ x=\dfrac{5-\sqrt{57}}{8}(ktm)\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}(tm)\\ x=\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}(ktm)\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta có hệ phương trình tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{5+\sqrt{57}}{8};\dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}\right\}$

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^3=1(1)\\ x^2+y^5=x^3+y^2(2)\end{cases}$

Lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1) ta được:

$$y^5-y^3=x^3+y^2-1$$

$$\Leftrightarrow y^3.\left(y^2-1\right)-\left(y^2-1\right)=x^3$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2-1\right).\left(y^3-1\right)=x^3$$

$$\Leftrightarrow \left(1-y^2\right)\left(1-y^3\right)=x^3(*)$$

Mà từ (1) $\Rightarrow x^2=1-y^3$

Kết hợp với (1) và (*) ta được: $\begin{cases}x^2=1-y^3\\ x=1-y^2\end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \left(1-y^2\right)^2 = 1-y^3$

$\Leftrightarrow (1-y)^2.(1+y)^2 = (1-y)\left(1+y+y^2\right)$

$\Leftrightarrow (1-y).\left[(1+y)^2(1-y)-1-y-y^2\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1-y).\left(1+y-y^2-y^3-1-y-y^2\right) = 0$

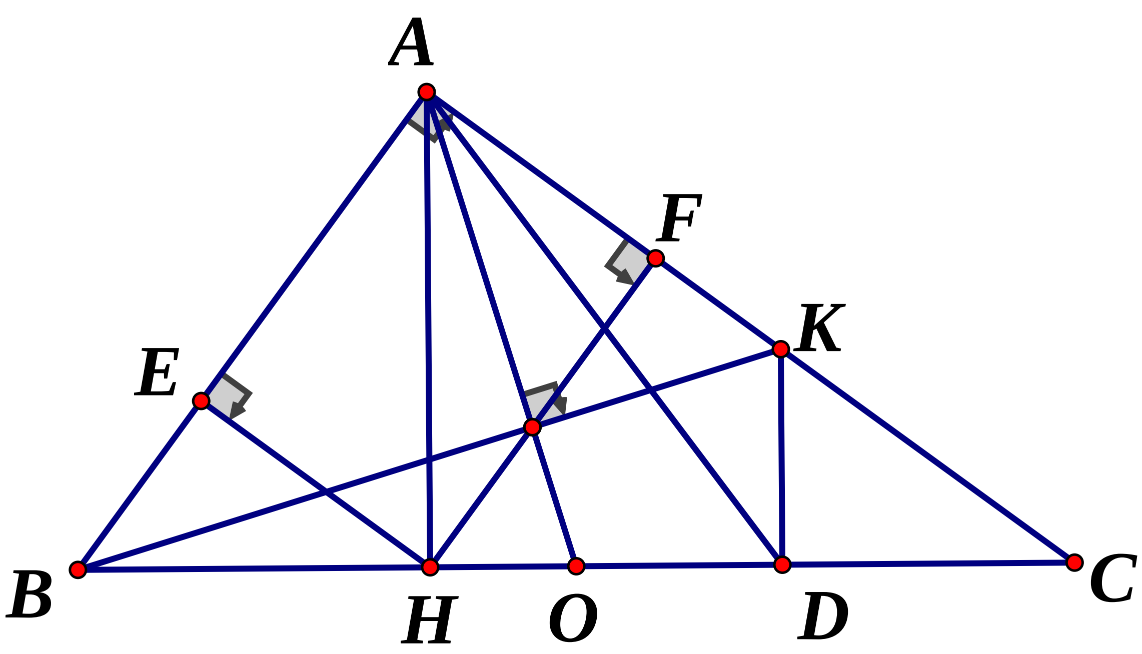
$\Leftrightarrow (1-y).\left(-2y^2-y^3\right) = 0$

$\Leftrightarrow (1-y).y^2.(-2-y) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=0 \\ y=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-2 \\ x=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S = \{(-2;-3);(0;1);(1;0)\}$

Câu 3.



Bài a.

Dễ thấy $AEHF$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông) $\Rightarrow AF = EH; AE = FH$

Ta có

$BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=AH\sqrt{BC}$

$\Leftrightarrow\left(BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}\right)^2=\left(AH\sqrt{BC}\right)^2$

$\Leftrightarrow BE^2.CH+CF^2.BH+2.BE.CF.\sqrt{CH.BH}=AH^2.BC(*)$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH ta có

$AH^2=BH.CH(1)$

Xét ΔEBH và ΔFHC ta có: $BEH=HFC=90^0; EBH=FHC$ (đồng vị)

$\Rightarrow\Delta EBH\sim\Delta FHC(g.g)$

$$\Rightarrow\frac{BE}{FH}=\frac{EH}{FC}=\frac{BH}{HC}\Rightarrow\begin{cases}BE.FC=FH.EH=AE.AF\\EH.HC=FC.BH\\BE.HC=FH.BH\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}BE^2.CH=BE.FH.BH=BE.AE.HB=HF^2.HB\\CF^2.BH=CF.EH.HC=CF.AF.HC=HF^2.HC\\2BE.CF.\sqrt{CH.BH}=2.AE.AF.AH\end{cases}$$

$\Rightarrow(*)\Leftrightarrow HE^2.HB+HF^2.HC+2AE.AF.AH=AH^2.BC$

$\Leftrightarrow\left(AH^2-HE^2\right).HB+\left(AH^2-AF^2\right).HC+2AE.AF.AH=AH^2.BC(Pitago)$

$\Leftrightarrow AH^2.(HB+HC)-\left(AE^2.HB-2AE.AF.AH+AF^2.HC\right)=AH^2.BC$

$\Leftrightarrow AH^2.BC-\left(AE^2.HB-2AE.AF.AH+AF^2.HC\right)=AH^2.BC$

$\Leftrightarrow AE^2.HB-2.AE.AF.AH+AF^2.HC=0$

$\Leftrightarrow AE^2.HB+AF^2.HC=2AE.AF.AH$

Ta có: $\Delta BEH\sim\Delta HEA(g-g)\Rightarrow\frac{EH}{EA}=\frac{BH}{HA}\Leftrightarrow AE.BH=EH.HA$

$\Delta AHF\sim\Delta HCF(g-g)\Rightarrow\frac{AH}{HC}=\frac{AF}{HF}\Leftrightarrow AF.HC=AH.HF$

$\Rightarrow AE^2.BH+AF^2.HC=AE.EH.HA+AF.AH.HF$

$=AE.AF.HA+AF.AH.AE=2.AE.AF.AH(dpcm)$

Vậy $BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=AH\sqrt{BC}$

Câu b

Gọi M là giao điểm của BK và AO

Xét tứ giác $ABDK$ ta có: $BAK+BDK=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow ABDK$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow DBK = DAK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DK)

Xét ΔBAD ta có: $\begin{cases} AH \perp BD \\ BH = HD \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác cân tại A

$\Rightarrow BAH = HAD$ (AH là phân giác của BAD)

$\Rightarrow DBK = DAK - BAD = BAC - 2.BAH = BAC - 2.BCA\left(BCA = BAH\right)$

Theo tính chất góc ngoài của tam giác và do ΔAOC cân tại O nên ta có:

$BOA = OCA + OAC = 2.BCA$

$\Rightarrow DBK = BAC - 2.BCA = 90^0 - BOA$

$\Leftrightarrow DBK + BOA = 90^0$

Xét ΔBOM ta có: $BOM + MBO = 90^0 (cmt) \Rightarrow \Delta BOM$ vuông tại M

Hay $\Rightarrow BK \perp AO(dpcm)$

Câu 4

Bài a.

Ta có $x^4 - x + \frac{1}{2} = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ (vô lý), do đó dấu bằng không xảy ra

Vậy $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$ với mọi số thực x

Bài b

Ta có: $x^2 - xy + y^2 = 3 \Rightarrow P - xy = 3 \Rightarrow xy = P - 3$

Áp dụng BĐT Cô si cho hai số $x^2; y^2$ ta có: $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy| \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} \geq |xy|$

$$\Rightarrow -\frac{x^2 + y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Rightarrow -\frac{P}{2} \leq xy \leq \frac{P}{2}$$

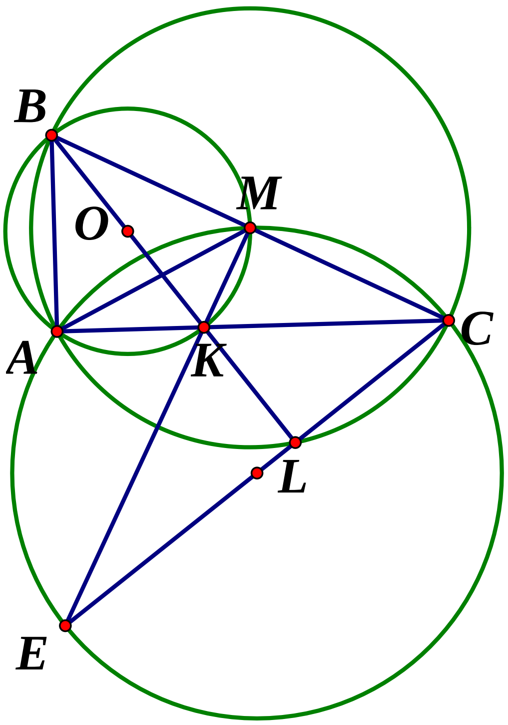
$$\Rightarrow -\frac{P}{2} \leq P - 3 \leq \frac{P}{2} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{P}{2} \leq P - 3 \\ P - 3 \leq \frac{P}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq \frac{3P}{2} \\ \frac{P}{2} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq P \leq 6$$

Dấu bằng xảy ra $\Rightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x^2 + x^2 = 3 \\ x^2 - x^2 + x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = |y| = 1 \\ |x| = |y| = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy $P_{\max} = 6 \Leftrightarrow |x| = |y| = \sqrt{3}; P_{\min} = 2 \Leftrightarrow |x| = |y| = 1$

Câu 5



Xét đường tròn (O) có $BAK = 90^0 \Rightarrow BAK$ nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

$\Rightarrow BK$ là đường kính của đường tròn (O)

Ta có BMK là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)$\Rightarrow BMK = 90^0$ hay $KM \perp BC$

$\Rightarrow EM$ là đường cao của tam giác EBC

Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có $BAC = 90^0 \Rightarrow BAC$ nội tiếp chắn nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kính BC

Ta có: BLC là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC$\Rightarrow BLC = 90^0$ hay $BL \perp LC \Rightarrow BL \perp EC \Rightarrow BL$ là đường cao ΔEBC

Xét ΔEBC ta có: EM và BL là hai đường cao của tam giác cắt nhau tại K

$\Rightarrow K$ là trực tâm $\Delta EBC \Rightarrow KC \perp BE$

Mà $KC \perp BA(gt) \Rightarrow B; A; E$ thẳng hàng$\Rightarrow EAC = 90^0$

Xét tứ giác $AECM$ ta có: $EAC = EMC = 90^0$

Mà hai góc này cùng nhìn đoạn EC

$\Rightarrow AECM$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

Hay E thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM (đpcm).

Câu 6.

Bài a.

Giả sử có một số a được tổ cả màu xanh và màu đỏ $\left(a \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 2018\right)$

$\Rightarrow a$ chia cho 24 dư 17 hay $a = 24k + 17\left(k \in \mathbb{N}^*, k \le 83\right)$

$\Rightarrow a$ chia cho 40 dư 7 hay $a = 40l + 7\left(l \in \mathbb{N}^*, l \le 50\right)$

$\Rightarrow 24k + 17 = 40l + 7$
$\Leftrightarrow 40l - 24k = 10$
$\Leftrightarrow 20l - 12k = 5$
$\Leftrightarrow 4(5l - 3k) = 5$

Vô lý do $5l - 3k \in \mathbb{Z}$ và 5 không chia hết cho 4. Do đó giả sử sai

Vậy không có số nào được tô cả hai màu xanh và đỏ

Câu 6b

a được tô màu xanh $\Rightarrow a = 24d_1 + 17\left(d_1 \in \mathbb{N}^*; d_1 \le \dfrac{2018-17}{24} \Rightarrow d_1 \le 83\right)$

b được tô màu đỏ $\Rightarrow b = 40d_2 + 7\left(d_2 \in \mathbb{N}^*; d_2 \le \dfrac{2018-7}{40} \Leftrightarrow d_2 \le 50\right)$

Ta có $|a - b| = 2 \Leftrightarrow |40d_2 + 7 - 24d_1 - 17| = 2 \Leftrightarrow |40d_2 - 24d_1 - 10| = 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 40d_1 - 24d_2 - 10 = 2 \\ 40d_1 - 24d_2 - 10 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 40d_2 - 24d_1 = 12 \\ 40d_2 - 24d_1 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10d_2 - 6d_1 = 3 \\ 5d_2 - 3d_1 = 1 \end{array}\right.$$

TH1: $10d_2 - 6d_1 = 3 \Rightarrow 2\left(5d_2 - 3d_1\right) = 3$

Vô lý vì $2\left(5d_2 - 3d_1\right)$ là số chẵn . Mà 3 là số lẻ

TH2: $5d_2 - 3d_1 = 1 \Rightarrow d_1 = \dfrac{5d_2 - 1}{3}$

Có $d_1 < 83 \Rightarrow \dfrac{5d_2 - 1}{3} \le 83 \Leftrightarrow d_2 \le 50$

Vì $d_1 \in \mathbb{Z}$ nên $5d_2 \equiv 1 (\bmod 3)$

TH1: $d_2 \equiv 1\left(\bmod 3\right) \Leftrightarrow 5d_2 \equiv 5 (\bmod 3) \equiv 2 (\bmod 3)$ (loại)

TH2: $d_2 \equiv 2(\bmod 3) \Leftrightarrow 5d_2 \equiv 10(\bmod 3) \equiv 1(\bmod 3)(tm)$

$\Rightarrow d_2 = 3k + 2\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

$\Rightarrow 1 \le 3k + 2 \le 50 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le k \le 16\left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow$ có 16 giá trị của k thỏa mãn

Với mỗi giá trị của k ta cho một giá trị của d_2, từ đó cho một giá trị của d_1 hay nói cách khác, với mỗi giá trị của k cho một cặp số $\left(d_1; d_2\right)$, tức là cho một cặp số $\left(a; b\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy có 16 cặp số $\left(a; b\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đề số 4

Câu 1. Biết a và b là các số dương khác nhau và

$$\left[\frac{(a+2b)^2-(b+2a)^2}{a+b}\right]:\left[\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})}{a-b}-3ab\right]=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+4ab+4b^2-b^2-4ab-4b^2}{a+b}:\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}-3ab\right)=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3(a^2-b^2)}{a+b}:(a^2+b^2+ab-3ab)=3 \Leftrightarrow -3(a-b):(a-b)^2=3 \Leftrightarrow a-b=-1$$

Khi đó ta có $(a-b)^2=1 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1+2ab$. Do đó $S=\dfrac{1+2ab}{a^2+b^2}=1$.

Câu 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $(x^2-6x+5)(\sqrt{x-2}-x+4)=0$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge 2$. Biến đổi phương trình đã cho ta được

$$(x^2-6x+5)(\sqrt{x-2}-x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=0 \\ \sqrt{x-2}-x+4=0 \end{array}\right.$$

+ Với $x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow x \in \{1;5\}$

+ Với $\sqrt{x-2}-x+4=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ x-2=(x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=6$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\{5;6\}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+2y}-3\right)=0 \\ x^2-6xy-y^2=6 \end{cases}$

Điều kiện xác định của hệ phương trình $x \ge 0; x+2y \ge 0$. Biến đổi hệ phương trình đã cho ta được

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+2y}-3\right)=0 \\ x^2-6xy-y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{x+2y}-3=0 \end{array}\right. \\ x^2-6xy-y^2=6 \end{cases}$$

+ Với $\begin{cases} x=0 \\ x^2-6xy-y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=-6 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm.

+ Với $\begin{cases} \sqrt{x+2y}-3=0 \\ x^2-6xy-y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-2y \\ \left(9-2y\right)^2-6\left(9-2y\right)y-y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7; y=1 \\ x=-1; y=5 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;y\right)=\left(7;1\right)$.

Câu 3 (1.5 điểm). Cho phương trình $\left(x+m\right)^2-5\left(x+m\right)+6=0\ \left(1\right)$.

a) Chứng minh rằng phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi số thực m.

Tính giác trị của biểu thức $S=\left(x_1+m\right)^2+\left(x_2+m\right)^2+5\left(x_1+x_2+2m\right)$.

Đặt $y=x+m$, khi đó phương trình $\left(1\right)$ trở thành $y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow y \in \left\{2;3\right\}$.

Do đó ta được $\left[\begin{array}{l} x+m=2 \\ x+m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-m \\ x=3-m \end{array}\right.$.

Dễ thấy $2-m \ne 3-m$ với mọi m nên phương trình $\left(1\right)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ tương ứng với phương trình $y^2-5y+6=0$ có hai nghiệm là $y_1=2$ và $y_2=3$. Khi đó ta có

$$S=\left(x_1+m\right)^2+\left(x_2+m\right)^2+5\left(x_1+x_2+2m\right)=y_1^2+y_2^2+5\left(y_1+y_2\right)=2^2+3^2+5\left(2+3\right)=38$$

b) Biết $x_1 < x_2$, tìm m sao cho $x_2 < 1$ và $x_1^2+2x_2=2\left(m-1\right)$.

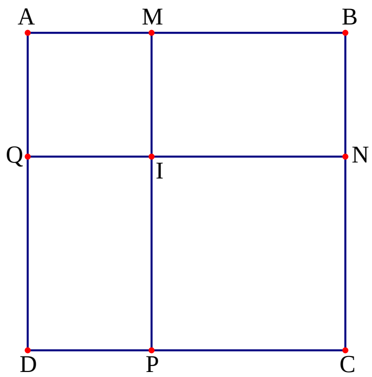
Do $x_1 < x_2$ nên $x_1=2-m; x_2=3-m$. Ta có $x_2 < 1 \Leftrightarrow 3-m < 1 \Leftrightarrow m > 2$.

$$x_1^2+2x_2=2\ \ m-1\ \Leftrightarrow\ \ 2-m\ ^2+2\ \ 3-m\ \ =2\ \ m-1$$
$$\Leftrightarrow m^2-4m+4+6-2m=2m-2\Leftrightarrow m^2-8m+12=0\Leftrightarrow m\in\ \ 2;6$$

Kết hợp với điều kiện $m>2$ ta được $m=6$ là giá trị cần tìm.

Câu 4 (2.0 điểm).

a) Nam kể với Bình rằng ông Nam có một mảnh đất hình vuông ABCD được chia thành bốn phần; hai phần (gồm các hình vuông AMIQ và INCP với M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA) để trồng các loại rau sạch, các phần còn lại dùng để trồng hoa. Diện tích phần trồng rau sạch là $1200cm^2$ và phần để trồng hoa là $1300cm^2$. Bình nói: "Chắc bạn bị nhầm rồi!". Nam nói: "Bạn nhanh thật! Mình đã nói nhầm phần diện tích. Chính xác là phần trồng rau sạch là $1300cm^2$, còn lại $1200cm^2$ trồng hoa". Hãy tính cạnh hình vuông AMIO (biết $AM<BM$) và giải thích vì sao Bình biết Nam bị nhầm?



Đặt $AM=x\ \ cm\ \ ,BM=y\ \ cm\ \ $, điều kiện $0<x<y$.

Khi đó ta có $BN=x,QI=x,IP=y$. Theo bài ra ta có $\begin{cases}x^2+y^2\ =1300\\2xy=1200\end{cases}$.

Do đó ta được $\ x+y\ ^2=x^2+y^2+2xy=2500$.

Suy ra $x+y=50$ và $\ x-y\ ^2=x^2+y^2-2xy=100\Rightarrow x-y=-10$

Do đó ta được $\begin{cases}x+y=50\\x-y=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=20\\y=30\end{cases}$.

Do đó cạnh của hình vuông AMIQ là 20cm.

Ta có $\ x-y\ ^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2xy$. Mà theo Nam nói lần đầu thì $\begin{cases}x^2+y^2\ =1200\\2xy=1300\end{cases}$.

Do đó Bình phát hiện ra Nam nói nhầm.

b) Lớp 9T có 30 bạn, mỗi bạn dự định đóng góp mỗi tháng 70000 đồng và sau ba tháng sẽ đủ tiền mua cho mỗi em ở "Mái ấm tình thương X" ba gói quà (Giá tiền các món quà như nhau). Khi các bạn đóng đủ số tiền như dự định thì "Mái ấm tình thương X" nhận thêm 9 em và giá tiền mỗi món quà sẽ lại tăng thêm 5% nên chỉ tặng được mỗi em hai gói quà. Hỏi có bao nhiêu em ở "Mái ấm tình thương X" được nhận quà?

Gọi giá tiền mỗi món quà lúc đầu là x (đồng), số em ban đầu của "Mái ấm tình thương X" là y, điều kiện $x > 0; y \in N$.

Số tiền dự định mua quà là $x.y.3 = 3xy$ (đồng).

Giá tiền mỗi món quà sau khi tăng lên 5% là $x + x.5\% = 1,05x$ (đồng).

Số em lúc sau của "Mái ấm tình thương X" là $y + 9$.

Số tiền thực tế mua quà là $1,05x.\ y+9\ .2 = 2,1x\ \ y+9$ (đồng).

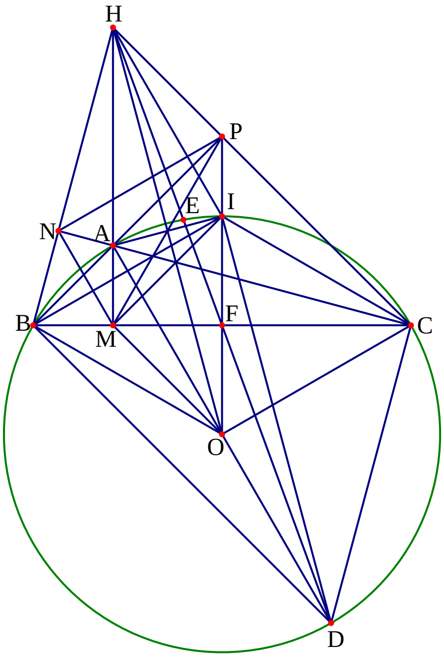
Theo đầu bài thì số tiền dự định mua quà và số tiền thực như nhau nên ta có.

$$3xy = 2,1x\ \ y+9 \Leftrightarrow 3y = 2,1\ \ y+9 \Leftrightarrow y = 21$$

Kết hợp với điều kiện $y \in N$ ta được $y = 21$.

Vậy số em ban đầu của "Mái ấm tình thương X" là 21 và số em của "Mái ấm tình thương X" được nhận quà là 30.

Bài 4 (3.0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn T tâm O và bán kính R có $BAC = 120^0; ABC = 45^0$ và H là trực tâm. AH, BH, CH lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P.



a) Tính AC theo R. Tính số đo góc HPN và $\frac{MP}{MN}$.

Ta có $ABC = \frac{1}{2}AOC$ nên $AOC = 2ABC = 90^0$.

Tam giác OAC vuông tại O có $OA = OC = R$ nên vuông cân tại O.

Do đó $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = R\sqrt{2}$.

Ta có $ACB = 180^0 - BAC - ABC = 15^0$ và $NBC = 90^0 - ACB = 75^0; BNC = BPC = 90^0$.

Do đó tứ giác BCNP nội tiếp đường tròn đường kính BC.

Suy ra $HPN = HBC = 75^0; NPA = ACB = APM$ nên $NPM = 2ACB = 30^0$.

Tương tự ta được $MNP = 2CBA = 90^0$ nên $\frac{MN}{MP} = \sin MPN = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$ hay $\frac{MP}{MN} = 2$.

b) Dựng đường kính AD của đường tròn T, HD cắt đường tròn T tại E khác D và cắt BC tại F. Chứng minh rằng các điểm A, N, H, P, E cùng thuộc một đường tròn và F là trung điểm của HD.

Ta có A, N, H, P, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

Ta có AC vuông góc với BH và AC vuông góc với CD nên BH song song với CD.

Tương tự ta có CH song song với BC. Suy ra tứ giác BHCD là hình bình hành nên F là trung điểm của HD và BC.

c) Chứng minh AD vuông góc với NP. Tia OF cắt đường tròn (T) tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và AI đi qua trung điểm của MP.

Ta có $CNP = CBP = 45^0 = NCO$ nên NP song song với OC. Mà ta có CO vuông góc với AD nên suy ra AD vuông góc với NP.

Do P là trung điểmcủa BC nên OF vuông góc với BC, do đó OF là đường trung trực của BC.

Suy ra tam giác IBC cân tại I, do IO là đường phân giác nên $BIO = \frac{1}{2}BIC = \frac{1}{2}BAC = 60^0$.

Tam giác OBI cân tại O có $BIO = 60^0$ nên là tam giác đều, do đó $IB = IO = BO = R$.

Dễ thấy F là trung điểm của OI nên OHID là hình bình hành, suy ra $IH = OD = R$.

Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.

Tam giác MAB vuông cân tại M nên $MA = MB$. Mà $OA = OB$ nên OM là đường trung trực của AB, suy ra OM vuông góc với AB.

Lại có PH vuông góc với AB nên OM song song với PH, mà MH song song với OP nên tứ giác HPOM là hình bình hành, suy ra $MH = OP$.

Ta có OF là đường trung bình của tam giác HAD nên $\text{OF} = \frac{1}{2}AH$ hay $AH = R$.

Ta có $AM = MH - AH = OP - OI = IP$ nên tứ giác AMIP là hình bình hình.

Suy ra AI đi qua trung điểm của MP.

Đề số 5

Câu 1 (2.0 điểm). Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 4m + 1 = 0\ (1)$, với m là tham số.

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Chứng minh rằng

$$\left|\frac{x_1 + x_2}{2}\right| < 1.$$

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - 2m^2 - 4m - 1 = m^2 + 2m + 1 - 2m^2 - 4m - 1 = -m^2 - 2m$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < m+1 < 1 \Leftrightarrow -2 < m < 0$$

Khi đó theo hệ thức Vi – et ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1); x_1x_2 = 2m^2 + 4m + 1$.

Ta có $-1 < m+1 < 1 \Leftrightarrow |m+1| < 1$ nên $\left|\frac{x_1 + x_2}{2}\right| = |m+1| < 1$

b) Giả sử hai nghiệm $x_1; x_2$ khác 0, chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \ge 2 \ge |x_1| + |x_2|$.

Vì $-1 < m+1 < 1 \Leftrightarrow |m+1| < 1$ nên ta được

$$-1 \le 2(m+1)^2 - 1 < 1 \Rightarrow -1 \le 2m^2 + 4m + 1 \le 1 \Rightarrow |x_1x_2| \le 1$$

Do đó $\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \ge 2\sqrt{\frac{1}{|x_1x_2|}} \ge 2$. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}\left(|x_1| + |x_2|\right)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = \left[2(m+1)\right]^2 - 2(2m^2 + 4m + 1) + 2|x_1x_2| \\ &= 2 + 2|x_1x_2| \ge 4\end{aligned}$$

Suy ra $|x_1| + |x_2| \ge 2$. Vậy ta có $\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \ge 2 \ge |x_1| + |x_2|$.

Câu 2 (2.0 điểm). Cho x, y là hai số nguyên với $x > y > 0$.

a) Chứng minh rằng nếu $x^3 - y^3$ chia hết cho 3 thì $x^3 - y^3$ chia hết cho 9.

Ta có $x^3 - y^3 = (x-y)^3 - 3xy(x-y)$. Mà ta có $x^3 - y^3$ và $3xy(x-y)$ chia hết cho 3 nên suy ra $(x-y)^3$ chia hết cho 3, do đó $x-y$ chia hết cho 3.

Suy ra $x^3 - y^3 = (x-y)^3 - 3xy(x-y)$ chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng nếu $x^3 - y^3$ chia hết cho $x+y$ thì $x+y$ không thể là số nguyên tố.

Ta có $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = (x-y)\left[(x+y)^2 - xy\right]$.

Mà ta có $x^3 - y^3$ chia hết cho $x+y$ và $(x-y)(x+y)^2$ chia hết cho $x+y$ nên $xy(x-y)$ chia hết cho $x+y$.

Nếu $x+y$ là số nguyên tố thì từ $xy\ x-y$ chia hết cho $x+y$ ta được x hoặc y hoặc $x-y$ chia hết cho $x+y$. Điều này vô lý vì $x<x+y; y<x+y, x-y<x+y$ (do $x, y\in Z$ và $x>y>0$).

Vậy $x+y$ không thể là số nguyên tố.

c) Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho x^k-y^k chia hết cho 9 với mọi x, y mà xy không chia hết cho 9.

Nếu x không chia hết cho 3 thì $x+1\ x-1 \vdots 3 \Rightarrow x^2-1\vdots 3$. Do đó $x^6-1\vdots 3$.

Áp dụng kết quả ý a) ta có $x^6-1\vdots 9$.

Theo giả thiết ta có xy không chia hết cho 3 nên x và y không chia hết cho 3 nên $x^6-1\vdots 9$ và $y^6-1\vdots 9$.

Đặt $k=6a+r\ a\in N^*, r\in\ 0;1;2;3;4;5$.

Khi đó ta có $x^k-y^k=x^{6a+r}-y^{6a+r}=x^r\ x^{6a}-1\ +y^r\ y^{6a}-1\ +\ x^r-y^r$.

Mà ta có $x^{6a}-1\vdots\ x^6-1$ nên $x^{6a}-1\vdots 9$, tương tự thì $y^{6a}-1\vdots 9$.

Do vậy $x^k-y^k\vdots 9 \Leftrightarrow x^r-y^r\vdots 9 \Leftrightarrow r=0$.

Vậy để x^k-y^k chia hết cho 9 với mọi x, y mà xy không chia hết cho 9 thì $k=6a\ a\in N^*$.

Câu 3 (1.5 điểm).

a) Cho ba số $a, b, c\geq -2$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=0$. Chứng minh rằng $a=b=c=0$.

Ta có $ab\ .\ bc\ .\ ca\ =\ abc\ ^2\geq 0$ nên trong ba tích $ab; bc; ca$ có một tích là số không âm. Do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử tích không âm là ab.

Ta có $c\geq -2$ nên suy ra $ab\ c+2\ \geq 0$. Khi đó ta được

$$a^2+b^2+c^2+abc=0 \Leftrightarrow\ a-b\ ^2+c^2+ab\ c+2\ =0$$

Từ đó dẫn đến $a-b\ ^2=c^2=ab\ c+2\ =0 \Leftrightarrow a=b=c=0$.

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm A, B, C phân biệt với $OA=OB=OC=1$. Biết rằng $x_A^2+x_B^2+x_C^2+6x_A.x_B.x_C=0$. Chứng minh $Min\ x_A; x_B; x_C\ <-\dfrac{1}{3}$.

Giả sử $Min\left\{x_A;x_B;x_C\right\} \geq -\dfrac{1}{3}$, khi đó ta được $x_A \geq -\dfrac{1}{3}; x_B \geq -\dfrac{1}{3}; x_C \geq -\dfrac{1}{3}$.

Do vai trò của ba số $x_A;x_B;x_C$ như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x_Ax_B \geq 0$.

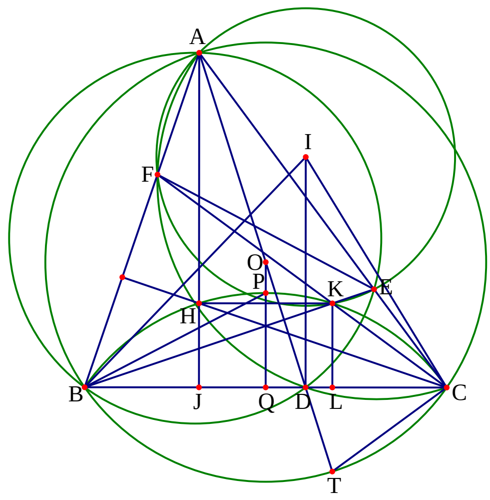
Mà ta có $x_C \geq -\dfrac{1}{3}$ nên suy ra $x_Ax_B\left(3x_C+1\right) \geq 0$. Khi đó ta có

$$x_A^2+x_B^2+x_C^2+6x_A.x_B.x_C=0 \Leftrightarrow \left(x_A-x_B\right)^2+x_C^2+2x_Ax_B\left(3x_C+1\right)=0$$

Từ đó suy ra $\left(x_A-x_B\right)^2=x_C^2=2x_Ax_B\left(3x_C+1\right)=0 \Rightarrow x_A=x_B=x_C=0$ hay ba điểm A, B, C trùng nhau. Điều này trái với giả thiết ba điểm A, B, C phân biệt.

Do đó điều giả sử trên là sai hay ta có $Min\left\{x_A;x_B;x_C\right\} < -\dfrac{1}{3}$.

Câu 4 (3.5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với O là tâm. Gọi D là một điểm thay đổi trên cạnh BC (D khác B, C). Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và ACD lần lượt cắt AC, AB tại E và F (E, F khác A). Gọi K là giao điểm của BE và CF.



a) Chứng minh tứ giác AEKF nội tiếp đường tròn.

Ta có tứ giác ABDE và ACDF nội tiếp đường tròn nên $\widehat{AEK}=\widehat{ADB}$ và $\widehat{AFK}=\widehat{ADC}$.

Mà ta có $\widehat{ADB}+\widehat{ADC}=180^0$ nên $\widehat{AEK}+\widehat{AFK}=180^0$ hay tứ giác AEKF nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh nếu A, O, D thẳng hàng thì HK song song với BC.

Gọi T là giao điểm của AD với đường tròn (O). Khi ba điểm A, O, D thẳng hàng thì ta có

$\widehat{ACT}=90^0$.

Gọi J là giao điểm của AH với BC, ta có $AJB = 90^0$.

Xét hai tam giác JAB và CAT ta có $AJB = ACT = 90^0; ABJ = ATC$.

Do đó ta được $\Delta JAB \backsim \Delta CAT$ nên $BAH = CAD$.

Ta có $BAH = BCH$ (cùng phụ với ABC). Mặt khác ta có $BHC = BKC = 180^0 - BAC$

nên tứ giác BHKC nội tiếp đường tròn, suy ra $BKH = BCH$.

Mà ta có $DBE = CAD$ nên suy ra $DBE = BKH$, do đó HK song song với BC.

c) Chứng minh khi D thay đổi trên cạnh BC thì ta luôn có $S \le \left(\frac{BC}{2}\right)^2 . \tan\frac{BAC}{2}$.

Gọi P là điểm chính giữa cung HK của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHCK. Vẽ PQ vuông góc với BC tại Q, suy ra Q là trung điểm của BC. Khi đó ta có

$$PQ = BQ\cot BPQ = \frac{BC}{2}.\cot\frac{BPC}{2} = \frac{BC}{2}.\cot\frac{BHC}{2}$$
$$= \frac{BC}{2}.\cot\left(90^0 - \frac{BAC}{2}\right) = \frac{BC}{2}.\tan\frac{BAC}{2}$$

Vẽ KL vuông góc với BC tại L, khi đó ta có $KL \le PQ$.

Do đó ta được $S_{KBC} = \frac{1}{2}KL.BC \le \frac{1}{2}PQ.BC = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \tan\frac{BAC}{2}$.

d) Chứng minh rằng $BF.BA - CE - CA = BD^2 - CD^2$ và $ID \perp BC$

+ Xét hai tam giác BAD và tam giác BCF có ABD và $BAD = BCF$ nên $\Delta BAD \backsim \Delta BCF$.

Từ đó ta được $\frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BF} \Rightarrow BA.BF = BC.BD$. Tương tự ta có $CE.CA = CB.CD$.

Do đó $BF.BA - CE.CA = BC\ \ BD - CD\ \ = \ \ BD + CD\ \ \ BD - CD\ \ = BD^2 - CD^2$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, BI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại M và N. Chứng minh tương tự như trên ta có $BF.BA = BM.BN = IB^2 - R^2$ và $CE.CA = ID^2 - R^2$.

Do đó ta được $IB^2 - ID^2 = BD^2 - CD^2$.

Vẽ ID' vuông góc với BC tại D', khi đó ta có $IB^2 = ID'^2 + BD'^2$ và $IC^2 = ID'^2 + CD'^2$

Do đó $IB^2 - IC^2 = BD'^2 - CD'^2$. Ta có $IB^2 - ID^2 = BD'^2 - CD'^2$. Do đó hai điểm D và D′ trùng nhau hay ID vuông góc với BC.

Câu 5 (1.0 điểm). Lớp 9A có 6 học sinh tham gia một kỳ thi toán và nhận 6 điểm số khác nhau là các số nguyên từ 0 đến 20. Gọi m là trung bình cộng các điểm số của 6 em học sinh trên. Ta nói rằng hai học sinh (trong 6 học sinh trên) lập thành một cặp hoàn hảo nếu điểm trung bình cộng của hai em đó lớn hơn m.

a) Chứng minh rằng không thể chia 6 em học sinh trên thành 3 cặp mà mỗi cặp đều hoàn hảo.

Giả sử ta chia 6 học sinh thành ba cặp mà mỗi cặp đều hoàn hảo có số điểm tương ứng là a và b, c và d, e và f. Khi đó ta có $\frac{a+b}{2} > m; \frac{c+d}{2} > m; \frac{e+f}{2} > m$.

Suy ra $m = \frac{a+b+c+d+e+f}{6} > m$, điều này vô lý.

Vậy không thể chia 6 em học sinh trên thành 3 cặp mà mỗi cặp đều hoàn hảo.

b) Có thể có được nhiều nhất là bao nhiêu cặp hoàn hảo.

Theo ý a) thì ta có với mỗi cách chia 6 học sinh thành 3 cặp thì có nhiều nhất hai cặp hoàn hảo. Mà ta có 5 cách chia 6 học sinh thành 3 cặp, do đó có nhiều nhất $2.5 = 10$ cặp hoàn hảo. Chẳng hạn 6 học sinh có số điểm tương ứng là $.1;12;13;14;15;16$. ta thấy có 10 cặp hoàn hảo.

Vậy có thể có được nhiều nhất 10 cặp hoàn hảo.

Đề số 6

Câu 1. (2.0 điểm).

a) Cho các số thực a, b, c sao cho $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=29$ và $abc=11$. Tính $a^5+b^5+c^5$.

Ta có $ab+bc+ca = \frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\right] = \frac{1}{2}(9-29) = -10$.

Do đó ta có $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) = (-10)^2 - 2.11.3 = 34$.

Lại có $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 3(29+10) = 117$.

Do đó ta được $a^3+b^3+c^3 = 117+33 = 150$. Từ đó dẫn đến

$$(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) = a^5+b^5+c^5+a^3b^2+a^3c^2+b^3a^2+b^3c^2+c^3a^2+c^3b^2$$
$$= a^5+b^5+c^5+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a+b+c)-abc(a+b+c)$$

Hay ta được $150.29 = a^5+b^5+c^5+34.3-11(-10)$.

Do đó $a^5+b^5+c^5 = 4138$

b) Cho biểu thức $A=(m+n)^2+3m+n$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là một số chính phương thì n^3+1 chia hết cho m.

Do m, n là các số nguyên dương nên ta có $(m+n)^3 < (m+n)^2+3m+n < (m+n+2)^2$.

Do đó $(m+n)^3 < A < (m+n+2)^2$. Mà A là số chính phương nên ta được $A=(m+n+1)^2$.

Do đó $(m+n)^2+3m+n=(m+n+1)^2 \Rightarrow 3m+n=2(m+n)+1 \Rightarrow m=n+1$.

Từ đó suy ra $n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)=m(n^2-n+1) \vdots m$.

Câu 2. (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $2(x+2)\sqrt{3x-1}=3x^2-7x-3$.

Điều kiện xác địnhcủa phương trình là $x \ge \frac{1}{3}$. Biến đổi phương trình đã cho ta được

$$2(x+2)\sqrt{3x-1}=3x^2-7x-3 \Leftrightarrow (x+2)^2+2(x+2)\sqrt{3x-1}+3x-1=4x^2$$
$$\Leftrightarrow \left(x+2+\sqrt{3x-1}\right)^2=4x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2+\sqrt{3x-1}=2x \\ x+2+\sqrt{3x-1}=-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-1}=x-2 \\ \sqrt{3x-1}=-3x-2 \end{array}\right.$$

Dễ thấy $\sqrt{3x-1}=-3x-2$ vô nghiệm vì $x \ge \frac{1}{3}$.

Ta có $\sqrt{3x-1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 3x-1=(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2-7x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{7+\sqrt{29}}{2}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=\frac{7+\sqrt{29}}{2}$ là nghiệm duy nhất.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\frac{1}{y}-\frac{10}{x}=-1 \\ 20y^2-xy-y=1 \end{cases}$

Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x \neq 0; y \neq 0$. Biến đổi hệ phương trình đã cho ta được

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} - \dfrac{10}{x} = -1 \\ 20y^2 - xy - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + \dfrac{1}{y} = \dfrac{10}{x} \\ xy + y + 1 = 20y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + \dfrac{x}{y} = 10 \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 20 \end{cases}$$

Đặt $v = \dfrac{1}{y}$, khi đó hệ phương trình trên trở thành $\begin{cases} x^2 + x + xv = 10 \\ xv + v + v^2 = 20 \end{cases}$

Lấy tổng theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$(x + v)^2 + (x + v) = 30 \Leftrightarrow (x + v + 6)(x + v - 5) = 0$$

+ Với $x + v + 6 = 0$ ta được $v = -6 - x$ khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + x + x(-6 - x) = 10 \\ v = -6 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 10 \\ v = -6 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ v = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \dfrac{1}{y} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

+ Với $x + v - 5 = 0$ ta được $v = 5 - x$ khi đó ta có hệ phương trình

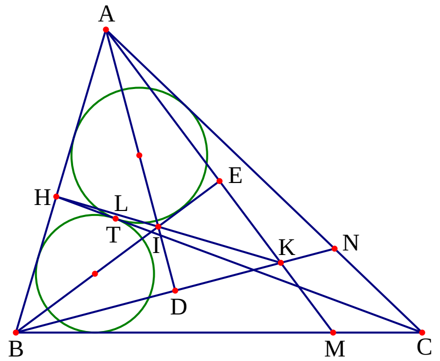
$$\begin{cases} x^2 + x + x(5 - x) = 10 \\ v = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 10 \\ v = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ v = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được các nghiệm là $(x; y) = \left(-2; -\dfrac{1}{4}\right), \left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{3}{10}\right)$

Câu 3. (1.5 điểm).

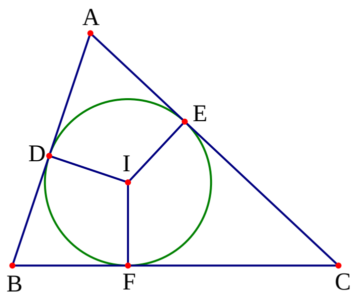
Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC < BC$. Trên các cạnh BC, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AN = AB = BM$. Các đường thẳng AM và BN cắt nhau tại K. Gọi H là hình chiếu của K lên AB. Chứng minh rằng:

a) Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên KH.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có $AB = AN$ nên tam giác ABN cân tại A. Từ đó AI là đường phân giác cũng là đường cao của tam giác ABN. Do đó ta được AI vuông góc với BK. Ta cũng có tam giác ABM cân tại B nên BI là đường phân giác cũng là đường cao của tam giác ABM, do đó BI vuông góc với AK. Từ đó dẫn đến I là trực tâm tam giác ABK. Mà ta có KH vuông góc với AB nên I nằm trên KH.

b) Các đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau.



Trước hết ta phát biểu và chứng minh bài toán phụ: Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Đường tròn I tiếp xúc với AB, AC, BC lần lượt tại D, E, F.

Khi đó ta có $AD = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

Chứng minh. Theo tính hai tiếp tuyến cắt nhau ta có

$AD = AE; BD = BF; CE = CF$. Do đó

$$AB + AC - BC = \ AD + BD \ + \ AE + CE \ - \ BF + CF \ = 2AD$$

Hay ta được $AD = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$. Vậy bài toán phụ được chứng minh.

Gọi L và T lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ACH, BCH với CH. Áp dụng bài toán phụ trên ta được

$$HL = \frac{AH + CH - AC}{2}; HT = \frac{BH + CH - BC}{2}$$

Đồng thời ta cũng có $AH=\dfrac{AB+AC-BC}{2};BH=\dfrac{AB+BC-CA}{2}$. Do đó suy ra

$$\begin{aligned}HL-HT&=\frac{AH+CH-AC}{2}-\frac{BH+CH-BC}{2}=\frac{AH-BH+BC-AC}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{AB+AC-BC}{2}-\frac{AB+BC-AC}{2}+BC-AC\right)=0\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $HL=HT$ hay hai điểm L và T trùng nhau. Vậy hai đường tròn nội tiếp hai tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau.

Câu 4. (1.5 điểm).

Cho x, y là 2 số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{16\sqrt{xy}}{x+y}+\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Ta có

$$\begin{aligned}P&=\frac{16\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{16\sqrt{xy}}{x+y}-8+\frac{x^2+y^2}{xy}-2+10\\&=-\frac{8\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{x+y}+\frac{\left(x-y\right)^2}{xy}+10=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left[\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{xy}-\frac{8}{x+y}\right]+10\\&=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left[\frac{\left(x+y\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-8xy}{xy\left(x+y\right)}\right]+10\end{aligned}$$

Mà ta có $\left(x+y\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\ge 2\sqrt{xy}.4\sqrt{x}.\sqrt{y}=8xy$ nên $\dfrac{\left(x+y\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-8xy}{xy\left(x+y\right)}\ge 0$.

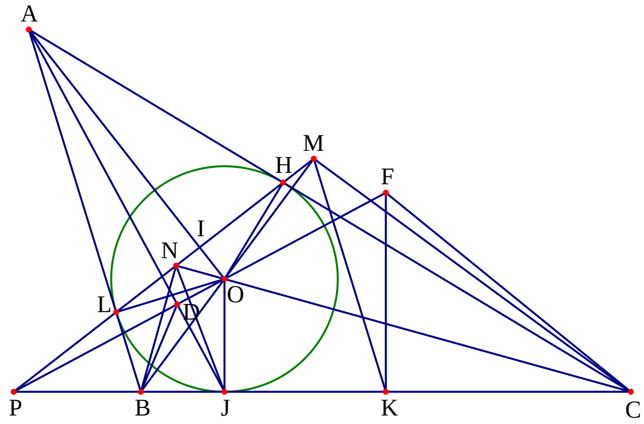
Do vậy $P\ge 10$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 10, đạt được tại $x=y$.

Câu 5. (2.0 điểm).

Cho tam giác ABC có góc B tù. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, CA, BC lần lượt tại L, H, J.

a) Các tia BO, CO cắt LH lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.



Ta có $MOC = OBC + OCB = \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}ACB = 90^0 - \frac{1}{2}BAC = AHL = MHC$ nên tứ giác OHMC nội tiếp đường tròn, do đó ta được $OMC = OHC = 90^0$.

Hoàn toàn tương tự ta có $NOB = \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}ACB = 90^0 - \frac{1}{2}BAC = ALN$ nên tớ giác BLNO nội tiếp đường tròn, do đó ta được $ONB = OLB = 90^0$.

Như vậy ta có $OMC = ONB = 90^0$ nên tứ giác BCMN nội tiếp đường tròn.

b) Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với AJ, d cắt AJ và đường trung trực của cạnh BC lần lượt tại D và F. Chứng minh rằng bốn điểm B, D, F, C cùng thuộc một đường tròn.

Gọi P là giao điểm của OD và LH, I là giao điểm của OA và LH, K là trung điểm của BC.

Ta có $\Delta ODA \backsim \Delta OIP$ nên $\frac{OD}{OI} = \frac{OA}{OP}$ hay $OI.OA = OD.OP$.

Vì tam giác HOA vuông tại H với HI là đường cao nên $HO^2 = OI.OA$.

Do đó ta có $OD.OP = OI.OA = OH^2 = \text{OJ}^2$ nên suy ra $\Delta \text{OJ}P \backsim \Delta ODJ$.

Từ đó dẫn đến $\text{OJ}P = ODJ = 90^0$ nên P thuộc BC . Ta có

$$BJN = JNO + JCO = JBO + JCO = \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}ACB$$
$$= KBM + OCH = KMB + OMH = KMH$$

Từ $BJN = KMH$ suy ra tứ giác MNJK nội tiếp đường tròn.

Từ đó ta được $\Delta PNJ \backsim \Delta PKM$ nên $\frac{PN}{PK} = \frac{PJ}{PM}$ hay $PK.PJ = PN.PM$.

Do tứ giác KJDF nội tiếp đường tròn nên ta có $PK.PJ = PD.PF$.

Do tứ giác BCMN nội tiếp đường tròn nên ta có $PM.PN = PB.PC$.

Kết hợp các kết quả trên ta được $PB.PC = PD.PF$ hay $\dfrac{PD}{PC} = \dfrac{PB}{PF}$

Mà ta lại có BPD chung nên suy ra $\Delta PBD \backsim \Delta PFC$, suy ra $PBD = PFC$.

Từ đó suy ra tứ giác BCFD nội tiếp đường tròn hay bốn điểm B, C, D, F cùng thuộc một đường tròn.

Câu 6. (1.0 điểm).

Trên một đường tròn có 9 điểm phân biệt, các điểm này được nối với nhau bởi các đoạn thẳng màu xanh hoặc màu đỏ. Biết rằng mỗi tam giác tạo bởi 3 trong 9 điểm chứa ít nhất một cạnh màu đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 4 điểm sao cho 6 đoạn thẳng nối chúng đều có màu đỏ.

Ta xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1. Có một điểm đã cho là đầu mút của ít nhất bốn đoạn màu xanh, mà không có tam giác nào có ba cạnh màu xanh. Do đó bốn đầu mút còn lại tạo thành bốn điểm mà 6 đoạn thẳng nối chúng đều có màu đỏ.

+ Trường hợp 2. Cả 9 điểm đều là đầu mút tối đa ba đoạn thẳng màu xanh. Suy ra 9 điểm đều là đầu mút của ít nhất 5 đoạn màu thẳng màu đỏ.

Giả sử trong 9 điểm, mọi điểm đều kẻ từ đó ra được chỉ đúng 5 đoạn thẳng màu đỏ.

Gọi A là tập hợp các đầu mút màu đỏ. Do mỗi đoạn thẳng màu đỏ có hai đầu mút màu đỏ nên số phần tử của tập hợp A là số chẵn. Nhưng khi đó số phần tử của tập hợp A là $5.9 = 45$, vô lý. Do đó có 1 điểm M trong 9 điểm trên là đầu mút của ít nhất 6 đoạn thẳng màu đỏ.

Gọi B là tập hợp các đầu mút còn lại của các đoạn thẳng màu đỏ nối với M. Ta chứng minh trong trong B luôn có một tam giác có 3 cạnh màu đỏ.

Thật vậy, xét điểm N tùy ý trong B, có ít nhất 5 đoạn thẳng nối với N. Trong 5 đoạn thẳng này có ít nhất ba đoạn thẳng cùng màu.

- Nếu có 3 đoạn thẳng màu đỏ nối với N, tam giác tạo bởi 3 đầu mút còn lại luôn có một cạnh màu đỏ, cạnh màu đỏ này cùng với hai 2 đoạn thẳng nối với N tạo thành một tam giác có ba cạnh màu đỏ.

- Nếu có 3 đoạn thẳng màu xanh nối với N, tam giác tạo bởi ba đầu mút còn lại ta tam giác có ba cạnh màu đỏ.

Các tam giác này cùng với điểm M tạo thành 4 điểm mà 6 đoạn thẳng nối chúng đều có màu đỏ.

Đề số 7

Câu 1.

a) Cho hai số thực a, b sao cho $|a| \neq |b|$ và $ab \neq 0$ thỏa mãn $\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{a^2-ab}=\frac{3a-b}{a^2-b^2}$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a^3+2a^2b+3b^3}{2a^3+ab^2+b^3}$.

• **Lời giải.** Với $|a| \neq |b|$ và $ab \neq 0$ thì giả thiết của bài toán được biến đổi như sau

$$\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{a^2-ab}=\frac{3a-b}{a^2-b^2} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{a(a-b)(a+b)}+\frac{(a+b)^2}{a(a-b)(a+b)}=\frac{a(3a-b)}{a(a-b)(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a+b)^2=a(3a-b) \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2=3a^2-ab$$

$$\Leftrightarrow a^2-ab-2b^2=0 \Leftrightarrow a^2-b^2-ab-b^2=0 \Leftrightarrow (a+b)(a-2b)=0$$

Do $|a| \neq |b|$ nên $a+b \neq 0$, do đó từ đẳng thức trên ta được $a-2b=0 \Leftrightarrow a=2b$.

Do đó $P=\frac{a^3+2a^2b+3b^3}{2a^3+ab^2+b^3}=\frac{(2b)^3+2(2b)^2b+3b^2}{2(2b)^3+2b.b^2+b^3}=\frac{19b^3}{19b^3}=1$.

b) Cho m, n là các số thực dương thỏa mãn $5m+n \vdots m+5n$. Chứng minh rằng $m \vdots n$.

• **Lời giải.** Ta có $5m+n \vdots m+5n$ nên $5m+n=(m+5n)a$ với a là số nguyên dương.

Khi đó ta được $5m-am=5an-n \Leftrightarrow m(5-a)=n(5a-1)$.

Do m, n, a là các số nguyên dương nên $5a-1>0$ do dó suy ra $5-a>0$.

Do a nguyên dương nên ta được $a \in \{1;2;3;4\}$. Ta đi xét các trường hợp sau.

+ Với $a=1$, khi đó ta được $4m=4n \Leftrightarrow m=n$ nên suy ra $m \vdots n$.

+ Với $a=2$, khi đó ta được $3m=9n \Leftrightarrow m=3n$ nên suy ra $m \vdots n$.

+ Với $a=3$, khi đó ta được $2m=14n \Leftrightarrow m=7n$ nên suy ra $m \vdots n$.

+ Với $a=4$, khi đó ta được $m=19n$ nên suy ra $m \vdots n$.

Vậy m luôn chia hết cho n.

Câu 2(2.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2-6x+4+2\sqrt{2x-1}=0$.

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge\frac{1}{2}$. Biến đổi phương trình đã cho ta được

$$x^2-6x+4+2\sqrt{2x-1}=0\Leftrightarrow x^2-4x+5=2x-1-2\sqrt{2x-1}+1$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=\sqrt{2x-1}-1\\ x-2=1-\sqrt{2x-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=\sqrt{2x-1}\\ 3-x=\sqrt{2x-1}\end{array}\right.$$

+ Với $x-1=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge1\\ (x-1)^2=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge1\\ x^2-4x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$.

+ Với $3-x=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le3\\ (3-x)^2=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge1\\ x^2-8x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4-\sqrt{6}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{2+\sqrt{2};4-\sqrt{6}\right\}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3=9(x+y)\\ x^2-y^2=3\end{cases}$.

• **Lời giải.** Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra được $x+y\ne0; x-y\ne0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases}(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=9(x+y)\\ (x-y)(x+y)=3\end{cases}$

Chia theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}=\frac{9(x+y)}{3}\Leftrightarrow\left(x^2+xy+y^2\right)=3(x+y)^2\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+5xy=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+4xy+2y^2+xy=0\Leftrightarrow 2x(x+2y)+y(2y+x)=0\Leftrightarrow(2x+y)(2y+x)=0$$

+ Với $2x+y=0\Leftrightarrow y=-2x$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có $x^2-(-2x)^2=3$, phương trình vô nghiệm.

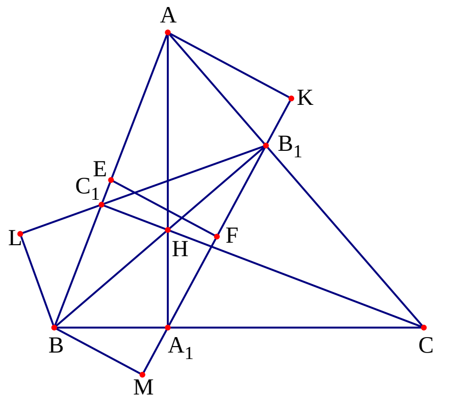
+ Với $x+2y=0\Leftrightarrow x=-2y$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$(-2y)^2-y^2=3\Rightarrow 3y^2=3\Leftrightarrow y=\pm1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2;y=-1\\ x=-2;y=1\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(-2;1),(2;-1)$.

Câu 3(2.0 điểm). Cho tam giác ABC có các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Gọi K là hình chiếu của A lên A_1B_1, L là hình chiếu của B lên B_1C_1. Chứng minh rằng $A_1K = B_1L$.

● **Lời giải.** Tứ giác AB_1HC_1 nội tiếp đường tròn, nên ta có $HB_1C_1 = HAC_1$. Tứ giác HA_1CB_1 nội tiếp nên ta có $HB_1A_1 = HCA_1$. Tứ giác ACA_1C_1 nội tiếp đường tròn nên ta có $HAC_1 = HCA_1$. Kết hợp các kết quả trên ta được $C_1B_1H = HB_1A_1$ hay B_1H là tia phân giác của góc $A_1B_1C_1$. Kẻ BM vuông góc với A_1B_1 tại M thì ta có $B_1L = B_1M$.



Mặt khác tứ giác AB_1A_1B nội tiếp đường tròn đường kính AB có tâm là trung điểm E của AB.

Gọi F là trung điểm của A_1B_1, khi đó EF vuông góc với A_1B_1.

Mặt khác do AK song song với BM nên ABMK là hình thang. Lại do EF, AK, BM song song với nhau nên suy ra EF là đường trung bình của của hình thang ABMK, từ đó ta được $FM = FK$.

Đến đây ta suy ra được $B_1M = A_1K$, kết hợp với $B_1L = B_1M$ ta được $A_1K = B_1L$

Câu 4(3.0 điểm). Cho x, y là các số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y} - \frac{x+y}{2} \le \frac{1}{4}$.

● **Lời giải.** Ta có $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y} = \frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x+y} \le \frac{x+y}{2}.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$.

Lại có $2\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2\right] \ge \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \Rightarrow -\frac{x+y}{2} \le -\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{4}$.

Từ đó ta được $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y} - \frac{x+y}{2} \le \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} - \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{4}$.

Ta cần chứng minh $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} - \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{4} \le \frac{1}{4}$ hay ta được

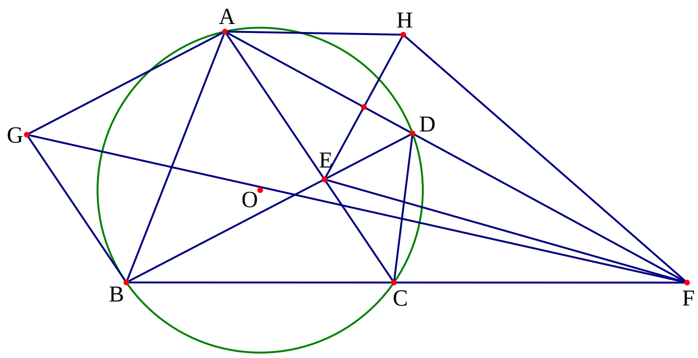
$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) + 1 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)^2 \ge 0$$

Dễ thấy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, do vậy ta có điều cần chứng minh.

Vậy ta được $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y} - \frac{x+y}{2} \le \frac{1}{4}$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4}$.

Câu 5(1.0 điểm). Cho tứ giác nội tiếp ABCD có AC cắt BD tại EE. Tia AD cắt tia BC tại F. Dựng hình bình hành AEBG.

a) Chứng minh $FD.FG = FB.FE$. Ta có $ADB = ACB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung). Do tứ giác AEBG là hình bình hành nên AG song song với BD nên ta được $ADB + FAG = 180^0$. Mà ta lại có $ACB + FCE = 180^0$. Do đó ta được $FCE = FAG$.	 **1.**

Ta có $\Delta FCD \backsim \Delta FAB$ nên ta được $\frac{FA}{FC} = \frac{FB}{FD} = \frac{AB}{CD}$.

Ta có $\Delta EAB \backsim \Delta EDC$ nên ta được $\frac{AB}{CD} = \frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC}$.

Kết hợp hai kết quả trên ta thu được $\frac{EB}{EC} = \frac{FA}{FC}$ hay $\frac{FC}{EC} = \frac{FA}{EB}$

Mà ta lại có $EB = AG$ nên ta được $\frac{FC}{EC} = \frac{FA}{AG}$.

Hai tam giác FCE và FAG có $FCE = FAG$ và $\frac{FC}{EC} = \frac{FA}{AG}$ nên $\Delta FCE \backsim \Delta FAG$.

Do đó $\frac{FG}{FE} = \frac{FA}{FC}$, suy ra ta được $\frac{FB}{FD} = \frac{FG}{FE}$ nên $FD.FG = FB.FE$.

b) Gọi H là điểm đối xứng của E qua AD. Chứng minh rằng điểm F, H, A, G cùng thuộc một đường tròn.

Ta có E và H đối xứng với nhau qua AD nên ta được $AEF = AHF$.

Ta có $\Delta FCE \backsim \Delta FAG$ nên $AGF = CEF$. Mặt khác ta lại có $CEF + AEF = 180^0$.

Từ các kết quả trên ta được $AHF + AGF = 180^0$ nên tứ giác AHFG nội tiếp đường tròn.

Câu 6(điểm). Nam cắt một tờ giấy ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng rồi lấy một số miếng nhỏ đó cắt ra làm 4 hoặc 8 miếng nhỏ hơn và Nam cứ tiếp tục thực hiện việc cắt như thế nhiều lần. Hỏi Nam có thể cắt được 2016 miếng lớn và nhỏ hay không?Vì sao?

- **Lời giải.** Gọi x là số miếng giấy Nam có được sau k lần cắt ($k, x \in N^*$). Do mỗi lần cắt một miếng giấy thành 4 hoặc 8 miếng giấy nên sau mỗi lần như vậy số miếng giấy tăng thêm 3 hoặc 7 miếng. Do đó x 3 dư 1 hoặc x chia 7 dư 1. Mà ta có 2016 chia 3 hoặc chia 7 đều có số dư là 0. Do đó x không thể bằng 2016. Vậy sau một số lần cắt thì số miếng giấy mà Nam có được không thể là 2016.

Đề số 8

Bài 1. Biết a và b là các số thực dương với $a \neq b$ và

$$\left[\frac{a(a-4b)+b(b+2a)}{a+b}\right]:\left[\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\right]=2016$$

Tính tổng $S = a + b$.

- **Lời giải.** Ta có $\frac{a(a-4b)+b(b+2a)}{a+b} = \frac{a^2-4ab+b^2+2ab}{a+b} = \frac{a^2-2ab+b^2}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{a+b}$ và

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=a-2\sqrt{ab}+b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

$$\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}=a+2\sqrt{ab}+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$$

Do đó ta được $2016=\frac{\left(a-b\right)^2}{a+b}.\left[\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\right]=\frac{1}{a+b}$.

Từ đó suy ra $S=a+b=\frac{1}{2016}$.

Bài 2.

a) Giải phương trình $x\sqrt{x+5}=2x^2-5x$.

● **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge 5$. Biến đổi tươngđương phương trình ta được

$$x\sqrt{x+5}=2x^2-5x\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x+5}-2x+5\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x+5}-2x+5=0\end{array}\right.$$

Xét phương trình $\sqrt{x+5}-2x+5=0$, biến đổi phương trình ta được

$$\sqrt{x+5}=2x-5\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5\ge 0\\ x+5=\left(2x-5\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5\ge 0\\ 4x^2-21x+20=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có tập nghiệm là $S=\left\{0;4\right\}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{y}+x-3\right)\left(y+\sqrt{x}\right)=0\\ x^2+y=5\end{cases}$

● **Lời giải.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x\ge 0;y\ge 0$. Ta có

$$\left(\sqrt{y}+x-3\right)\left(y+\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{y}+x-3=0\\ \sqrt{y}+x=0\end{array}\right.$$

+ Với $\sqrt{y}+x=0$, kết hợp với điều kiện $y\ge 0$ ta suy ra được $x=y=0$, thay vào phương trình thứ hai ta thấy không thỏa mãn.

+ Với $\sqrt{y}+x-3=0$. Khi đó đặt $a=\sqrt{y}\ \left(a\ge 0\right)$ và kết hợp với phương trình thứ ha ta có hệ

$$\begin{cases}a+x=3\\ a^2+x^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-x\\ \left(3-x\right)^2+x^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;a=2\\ x=2;a=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;y=4\\ x=2;y=1\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có các nghiệm là $x;y\ =\ 1;4\ ,\ 2;1$.

Bài 3. Cho phương trình $\dfrac{x+1\quad x^2+mx+2m+14}{\sqrt{x}}=0$.

a) Giải phương trình trên khi $m=-8$.

b) Tìm các giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn

$$\sqrt{x_2^2+\ \ m+1\ \ x_2+2m+14}=3-\sqrt{x_1}$$

Bài 3. Cho phương trình $\dfrac{x+1\quad x^2+mx+2m+14}{\sqrt{x}}=0$.

a) Giải phương trình trên khi $m=-8$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x>0$. Khi $m=-8$ phương trình đã cho được viết lại thành

$$\frac{x+1\quad x^2-8x-2}{\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow x^2-8x-2=0\Leftrightarrow x=4\pm 3\sqrt{2}$$

(Do $x>0$ nên $x+1>0$)

Vậy với $m=-8$ thì phương trình có tập nghiệm là $S=\ \ 4+3\sqrt{2};4-3\sqrt{2}$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn

$\sqrt{x_2^2+\ \ m+1\ \ x_2+2m+14}=3-\sqrt{x_1}$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $x^2+mx+2m+14=0$ có nghiệm dương.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt $x_1;x_2$ thì $x^2+mx+2m+14=0$ phải có hai nghiệm dương phân biệt $x_1;x_2$. Điều này xẩy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta=m^2-4\ \ 2m+14\ \ >0\\ S=x_1+x_2=-m>0\\ P=x_1.x_2=2m+14>0\end{cases}$$

Do x_2 là nghiệm của phương trình củap hương trình $x^2+mx+2m+14=0$ nên ta được

$$x_2^2+mx_2+2m+14=0\Leftrightarrow x_2^2+\ \ m+1\ \ x_2+2m+14=x_2$$

Từ đó ta được $\sqrt{x_2^2+\ \ m+1\ \ x_2+2m+14}=3-\sqrt{x_1}\Leftrightarrow\sqrt{x_2}=3-\sqrt{x_1}\Leftrightarrow\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3$

Bình phương hai vế và kết hợp với hệ thức Vi – et ta được

$$\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2=3\Leftrightarrow x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=9\Leftrightarrow -m+\sqrt{2m+14}=9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2m+14}=m+9\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -9\\ 4\left(2m+14\right)=\left(m+9\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -9\\ m^2+10m+25=0\end{cases}\Leftrightarrow m=-5$$

Thử $m=-5$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy $m=-5$ là giá trị cần tìm.

Bài 4.

a) Ông An cải tạo một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 2,5 lần chiều rộng. Ông thấy rằng nếu đào một cái hồ có mặt hồ hình chữ nhật thì sẽ chiếm 3% diện tích mảnh vườn, còn nếu giảm chiều dài 5m và tăng chiều rộng 2m thì mặt hồ có hình vuông và diện tích mặt hồ giảm được $20\,m^2$. Hãy tính các cạnh của mảnh vườn.

• **Lời giải.** Gọi chiều dài và chiều rộng của mặt hồ lần lượt là x, y(m).

Khi giảm chiều dài 5m và tăng chiều rộng 2m thì mặt hồ có hình vuông nên ta có $x-5=y+2$.

Diện tích mặt hồ lúc đầu là xy và sau khi giảm chiều dài, tăng chiều rộng là $\left(x-5\right)\left(y+2\right)$. Khi đó ta có phương trình $xy-\left(x-5\right)\left(y+2\right)=20$. Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x-5=y+2\\ xy-\left(x-5\right)\left(y+2\right)=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+7\\ y\left(y+7\right)-\left(y+2\right)^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+7\\ 3y=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=15\\ y=8\end{cases}$$

Từ đó ta được diện tích của mặt hồ là $120\left(m^2\right)$.

Gọi a là chiều rộng mảnh vườn, khi đó chiều dài mảnh vườn là $2,5a$ và diện tích mảnh vườn là $2,5a^2$.

Theo bài ra ta có phương trình $2,5a^2.3\%=120\Leftrightarrow a^2=160\Leftrightarrow a=40$.

Từ đó chiều rông mảnh vườn là $40\left(m\right)$ và chiều dài mảnh vườn là $100m$.

b) Lớp 9A có 27 học sinh nam và 18 học sinh nữ. Nhân dịp sinh nhật bạn X(là một thành viên của lớp), các bạn trong lớp có nhiều món quà tặng X. Ngoài ra mỗi bạn nam trong lớp làm 3 tấm thiệp và mỗi bạn nữ trong lớp làm 2 hoặc 5 con hạc để tặng X. Biết rằng số tấm thiệp và số con hạc bằng nhau, hỏi bạn X là nam hay nữ?

• **Lời giải.** Gọi x là số bạn nữ tặng X 2 con hạc và y là số bạn nữ tặng X 5 con hạc $\left(x;y\in N^*\right)$.

+ Giả sử X là bạn nam, khi đó có 18 bạn nữ tặng hạc cho X nên ta có phương trình $x+y=18$.

Số hạc X được tặng là $2x+5y$.

Số bạn nam tặng thiệp cho X là 26 nên số thiệp X nhận được là 26.3.

Do số tập thiệp được tặng bằng số hạc nên ta có phương trình $2x+5y=26.3$.

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=18 \\ 2x+5y=26.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=14 \end{cases}$, thỏa mãn.

+ Giả sử X là bạn nữ, khi đó có 17 bạn nữ tặng hạc cho X nên ta có phương trình $x+y=17$.

Số hạc X được tặng là $2x+5y$.

Số bạn nam tặng thiệp cho X là 27 nên số thiệp X nhận được là 27.3.

Do số tập thiệp được tặng bằng số hạc nên ta có phương trình $2x+5y=27.3$.

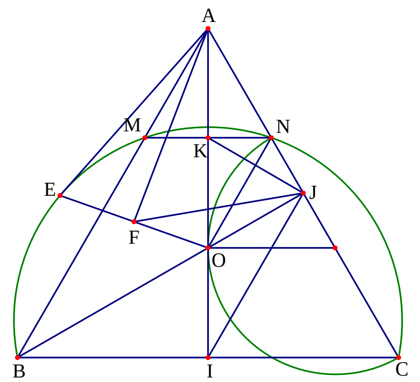
Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=17 \\ 2x+5y=27.3 \end{cases}$, hệ không có nghiệm nguyên.

Vậy bạn X là nam.

Bài 5. Cho tam giác đều ABC có tâm O và $AB=6a$, các điểm M và N lần lượt trên cạnh AB, AC sao cho $AM=AN=2a$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, CA và MN.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N, B, C cùng thuộc một đường tròn T. Tính diện tích của tứ giác BMNC theo a.

Ta có $AM=AN=2a$ và $MAN=60^0$ nên tam giác MAN đều. Từ đó ta được $AMN=ACB=60^0$ nên tứ giác BMNC nội tiếp đường tròn.



Lại có MN song song với BC và $AK \perp MN; AI \perp BC$ nên ta suy ra được ba điểm A, K, I thẳng hàng.

Do đó $AI = AC.\sin ACB = 6a.\sin 60^0 = 3a\sqrt{3}$ và $AI = AN.\sin ANM = 2a.\sin 60^0 = a\sqrt{3}$.

Từ đó dẫn đến $IK = 2a\sqrt{3}$. Suy ra ta có $S_{BMNC} = \frac{1}{2}IK \;\; MN + BC \;\; = 8a^2\sqrt{3}$ (đvdt)

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK. Chứng minh đường tròn đường kính NC tiếp xúc với AI.

Ta có OJ vuông góc với AC và $NJ = \text{AJ} - AN = a; NK = \frac{1}{2}MN = a$ nên suy ra $\Delta \text{OJ}N = \Delta OKN$.

c) Giả sử AE tiếp xúc với đường tròn T tại E(E và B cùng phía đối với AI). Gọi F là trung điểm của OE. Tình số đo góc $\text{AF}J$.

Đề số 9

Câu 1(2.5 điểm).

a) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y \;\; x + my \;\; = m^2 - 2m - 3 \\ y - 2x \;\; y + mx \;\; = m^2 - 2m - 3 \end{cases}$. Giải phương trình khi $m = -3$ và tìm m để hệ phương trình có ít nhất một nghiệm $\;x_0; y_0\;$ thỏa mãn điều kiện $x_0 > 0, y_0 > 0$.

+ Khi $m = -3$ hệ phương trình trên được viết lại thành

$$\begin{cases} x - 2y \;\; x - 3y \;\; = 12 \\ y - 2x \;\; y - 3x \;\; = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 12 \\ y^2 - 5xy + 6x^2 = 12 \end{cases}$$

Lấy hiệu theo vế hai phương trình của hệ ta được $5\;\; x^2 - y^2 \;\; = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$.

∘ Với $x = y$, khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành $x^2 = 6 \Rightarrow x = y = \pm\sqrt{6}$.

∘ Với $x = y$, khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành $x^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = -1 \\ x = -1; y = 1 \end{array}\right.$.

Do đó hệ phương trình có các nghiệm là $\;x; y\; = \; -1; 1\;, \; 1; -1\;, \; \sqrt{6}; \sqrt{6}\;, \; -\sqrt{6}; -\sqrt{6}\;$.

+ Hệ phương trình đã cho được viết lại thành $\begin{cases} x^2 + \;\; m - 2 \;\; xy - 2my^2 = m^2 - 2m - 3 \\ y^2 + \;\; m - 2 \;\; xy - 2mx^2 = m^2 - 2m - 3 \end{cases}$

Lấy hiệu theo vế hai phương trình của hệ ta được $\;2m + 1\;\; x^2 - y^2 \;\; = 0$.

○ Nếu $m=-\dfrac{1}{2}$, khi đó từ hệ phương trình đã cho ta được $x^2-\dfrac{5}{2}xy+y^2=-\dfrac{7}{4}$. Phương trình có nghiệm $\left(\dfrac{5+\sqrt{2}}{2};2\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

○ Nếu $m\neq-\dfrac{1}{2}$, khi đó từ phương trình trên ta được $x=\pm y$.

Dễ thấy $x=-y$ không thỏa mãn yêu cần bài toán(vì khi đó $x;y$ trái dấu). Từ đó ta được $x=y$, khi đó từ phương trình thứ nhất ta được $-\ m+1\ x^2=\ m+1\ \ m-3\ $.

Khi $m=-1$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x-2y\ \ x-y\ =0 \\ y-2x\ \ y-x\ =0 \end{cases}$.

Dễ thấy trường hợp này thỏa mãn yêu cầu bài toán, chỉ cần chọn $x=y=1$.

Khi $m\neq-1$ khi đó ta có $x^2=m-3$.

Để hệ phương trình có nghiệm $x_0=y_0>0$ thì $3-m>0\Leftrightarrow m<3$.

Khi đó hệ phương trình có nghiệm $x_0=y_0=\sqrt{3-m}$.

Vậy với $m<3$ thì hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Tìm $a\geq1$ để phương trình $ax^2+\ 1-2a\ x+1-a=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_2^2-\mathrm{ax}_1=a^2-a-1$.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là
$\Delta=\ 1-2a\ ^2-4a\ 1-a\ =8m^2-8a+1>0$.

Theo định lí Vi – et ta có $x_1+x_2=\dfrac{2a-1}{a}$ suy ra $ax_1+\mathrm{ax}_2=2a-1$ hay $ax_1=2a-1-\mathrm{ax}_2$.

Kết hợp với $x_2^2-\mathrm{ax}_1=a^2-a-1$ ta được $x_2^2+\mathrm{ax}_2-2a+1=a^2-a-1$.

Từ đó suy ra $\mathrm{ax}_2^2+a^2x_2-a^3-a^2+2a=0$.

Do x_2 là một nghiệm của phương trình nên ta có $ax_2^2+\ 1-2a\ x_2+1-a=0$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} &\mathrm{ax}_2^2+a^2x_2-a^3-a^2+2a\ -\left[ax_2^2+\ 1-2a\ x_2+1-a\right]=0 \\ \Leftrightarrow\ & a^2+2a-1\ x_2=a^3+a^2-a+2 \end{aligned}$$

Do $a\geq1$ nên $a^2+2a-1>0$ nên từ phương trình trên ta được $x_2=a-1$.

Thế vào phương trình $\mathrm{ax}_2^2+a^2x_2-a^3-a^2+2a=0$ ta được

$$a-1\ ^2+a\ a-1\ -a^2-a+2=0\Leftrightarrow a\in\ 1;3$$

Thử lại vào phương trình đã cho ta được $a = 1$ và $a = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2(2.0 điểm). Cho x, y là hai số nguyên dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho xy.

a) Chứng minh rằng x và y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

Giả sử trong hai số x và y có một số chẵn, do vài trò của x và y như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử x là số chẵn. Khi đó do $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho xy nên $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho 2. Từ đó dẫn đến y^2 chia hết cho 2. Từ đó suy ra được $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho 4, dẫn đến 10 chia hết cho 4, điều này vô lí. Do đó cả hai số x và y đều là số lẻ.

Gọi $d = \ x;y\ $, khi đó $x = dx_0; y = dy_0$ với $x_0; y_0 \in N,\ x_0; y_0\ = 1$.

Từ đó ta có $x^2 + y^2 + 10 = d^2x_0^2 + d^2y_0^2 + 10$ chia hết cho $d^2x_0y_0$ nên suy ra 10 chia hết cho d^2 nên suy ra $d = 1$ hay x và y nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh rằng $k = \dfrac{x^2 + y^2 + 10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k \geq 12$.

Đặt $x = 2m + 1; y = 2n + 1\ \ m, n \in N\ $. Khi đó ta có $k = \dfrac{4\ \ m^2 + n^2 + m + n + 3}{2m + 1\ \ 2n + 1}$.

Do 4 và $\ 2m + 1\ \ 2m + 1\ $ nên suy ra $m^2 + n^2 + m + n + 3$ chia hết cho $\ 2m + 1\ \ 2n + 1\ $.

Hay ta được $\dfrac{m^2 + n^2 + m + n + 3}{2m + 1\ \ 2n + 1}$ là số nguyên. Từ đó suy ra k chia hết cho 4.

Cũng từ $k = \dfrac{x^2 + y^2 + 10}{xy}$ ta được $x^2 + y^2 + 10 = kxy$. Nếu trong hai số x và y có một số chia hết cho 3, khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là x. Khi đó ta suy ra được $y^2 + 10$ chia hết cho 3 nên $y^2 + 1$ chia hết cho 3 hay y^2 chia 3 dư 2, điều này vô lý vì y^2 chia 3 dư 0 hoặc dư 1. Do vậy x và y không chia hết cho 3. Suy ra $x^2; y^2$ chia 3 cùng có số dư là 1. Do đó ta được $x^2 + y^2 + 10 = kxy$ chia hết cho 3. Mà ta lại có $\ 3; xy\ = 1$ nên k chia hết cho 3.

Kết hợp với k chia hết cho 4 ta suy ra được k chia hết cho 12. Do đó $k \geq 12$.

Câu 3(1.5 điểm). Biết $x \geq y \geq z; x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

a) Tính $S = \ x - y\ ^2 + \ x - y\ \ y - z\ + \ y - z\ ^2$.

Ta có $\ x + y + z\ ^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 0$.

Mà ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ nên suy ra $xy + yz + zx = -3$. Ta có

$$S = \; x-y \;^2 + \; x-y \;\; y-z \; + \; y-z \;^2 = x^2 - 2xy + y^2 + xy - y^2 + yz - zx + y^2 - 2yz + z^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 6 + 3 = 9$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $P = \left| \; x-y \;\; y-z \;\; z-x \; \right|$.

Do $x \geq y \geq z$ nên ta có $0 \leq \; x-y \;\; y-z \; \leq \frac{1}{3}\left[\; x-y \;^2 + \; x-y \;\; y-z \; + \; y-z \;^2 \right] = 3$.

Từ đó suy ra $P = \left| \; x-y \;\; y-z \;\; z-x \; \right| \leq 3\left|z-x\right|$.

Ta có $\left|z-x\right| = x + \; -z \; \leq \sqrt{2\; x^2 + z^2 \;} \leq \sqrt{2\; x^2 + y^2 + z^2 \;} = \sqrt{12}$.

Từ đó suy ra $P \leq 3\sqrt{12}$, dấu bằng xẩy ra khi $x = \sqrt{3}; y = 0; z = -\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $6\sqrt{3}$, đạt được tại $x = \sqrt{3}; y = 0; z = -\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn có $BAC > 45^0$. Dựng các tam giác vuông ABMN, ACPQ (M và C khác phía đối với AB, B và Q khác phía đối với AC). AQ cắt đoạn BM tại E và NA cắt CP tại F.

a) Chứng minh rằng $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$ và tứ giác EFQN nội tiếp đường tròn.

Ta có $EAB + BAC = 90^0$ và

$FAC + BAC = 90^0$ nên ta được

$EAB = FAC$.

Mặt khác ta lại có $ABE + ACF = 90^0$

nên suy ra $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$.

Do đó ta có

$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$.

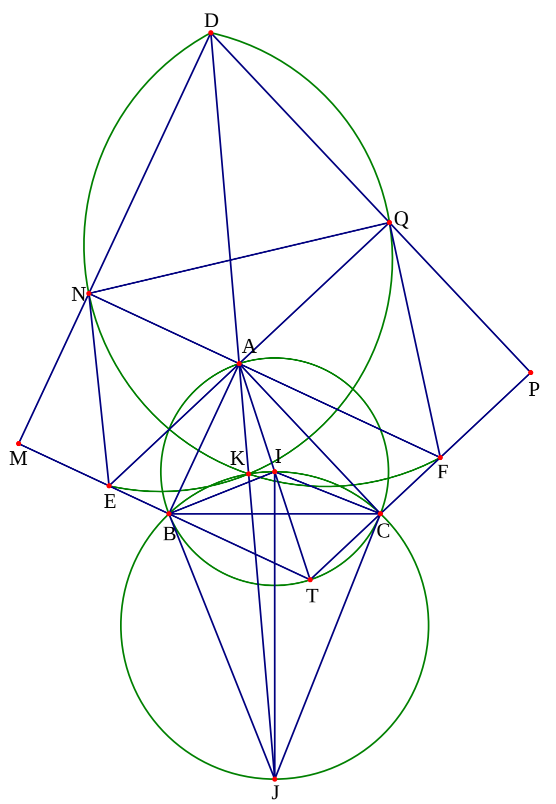
Mà ta lại có $AC = AQ; AB = AN$ nên ta

được $AE.AQ = AN.AF$

Suy ra $\frac{AE}{AN} = \frac{AF}{AQ}$ nên

$\Delta NAE \backsim \Delta QAF$, suy ra ta có

$ENF = EQF$ nên tứ giác QNEF nội tiếp



đường tròn. b) Chứng minh rằng trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. + Cách 1. Gọi T giao điểm của MB và CP. Ta có tứ giác ABTC nội tiếp đường tròn và AT là đường kính của đường tròn ngoài tiếp tam giác ABC.	

Mặt khác AF song song với ET và AE song song với FT nên tứ giác AETF là hình bình hành. Suy ra trung điểm của EF cũng là trung điểm của AT. Do đó I là trung điểm của EF và là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

+ Cách 2. Xét hình thang AEBF, gọi X là trung điểm của AB, khi đó IX thuộc đường trung bình của hình thang. Do đó IX song song với BE gay IX vuông góc với AB. Từ đó dẫn đến IX là đường trùn trự của AB. Chứng minh tương tự ta được I cũng thuộc đường trung trự của AC. Do đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) MN cắt PQ tại D, các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNQ cắt nhau tại K(khác D), các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại J. Chứng minh rằng các điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Giả sử DA cắt EF tại K', khi đó do tứ giác NQEF nội tiếp đường tròn nên $NFK' = NQA$.

Mà ta lại có tứ giác AQDN nội tiếp nên $NQA = NDA$. Suy ra ta được $NDA = \mathrm{AF}K'$.

Suy ra tứ giác DNFK' nội tiếp đường tròn.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được tứ giác DQK'E nội tiếp đường tròn.

Như vậy K' là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DQM và DPN. Do đó hai điểm K và K' trùng nhau hay ba điểm D, A, K thẳng hàng.

Ta có $BKE = EAB = CAF = CKF$ nên suy ra được

$$BKC = 180^0 - 2BKE = 2\ 90^0 - EAB\ = 2BAC = BIC$$

Do đó tứ giác BKIC nội tiếp đường tròn.

Lại có tứ giác IBJC nội tiếp đường tròn nên $IB = JC$ và $BKJ = CKJ$ hay KJ là phân giác của BKC.

Mặt khác ta có $BKA = 180^0 - AEB = 180^0 - \mathrm{AF}C = AKC$, suy ra tia đối của tia KA cũng là tia phân giác của BKC. Do đó ta được ba điểm A, K, J thẳng hàng.

Vậy bốn điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Câu 5. Với mỗi số nguyên dương m lớn hơn 1, kí hiệu $s\ m$ là ước nguyên dương lớn nhất của m và khác m. Cho số tự nhiên $n > 1$, đặt $n_0 = n$ và lần lượt tính các số

$$n_1 = n_0 - s\ n_0\ ; n_2 = n_1 - s\ n_1\ ;...; n_{i+1} = n_i - s\ n_i\ ;...$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k để $n_k = 1$ và tính k khi $n = 2^{16}.14^{17}$.

Ta có $s\ n_i\ < n_i$ nên suy ra $n_i - s\ n_i\ \geq 1$. Từ đó dẫn đến $n_{i+1} \geq 1$. Suy ra $n_i \geq 1$ với $i = 1, 2, 3, ...$

Mặt khác do $n_{i+1} = n_i - s\ n_i\ < n_i$ với mọi i. Suy ra $n = n_0 > n_1 > n_2 > ... > n_i > .....$

Nếu không tồn tại n_k để $n_k = 1$ ta xây dựng được dãy vô hạn các số nguyên dương giảm dần và nhỏ hơn n, điều này vô lí vì số các số nguyên dương nhỏ hơn n là $n - 1$. Vậy tồn tại số k sao cho $n_k = 1$.

Với $n = 2^{16}.14^{17}$ ta được $n = 2^{16}.14^{17} = 2^{33}.7^{17}$, suy ra $s\ n\ = 2^{32}.7^{17}$.

Từ đó ta được $n_1 = 2^{33}.7^{17} - 2^{32}.7^{17} = 2^{32}.7^{17}$.

Hoàn toàn tương tự ta được $n_2 = 2^{32}.7^{17} - 2^{31}.7^{17} = 2^{31}.7^{17}$.

Tiếp tục như vậy đến một lúc ta được $n_{33} = 7^{17}$.

Đặt $m_0 = 7^{17}$, khi đó ta có $s\ m_0\ = 7^{16}$ nên $m_1 = 6.7^{16}$, do đó $s\ m_1\ = 3.7^{16}$ nên $m_2 = 3.7^{16}$.

Tiếp tục như vậy ta được $m_3 = 2.7^{16}; m_4 = 7^{16};...; m_8 = 7^{15};...; m_{68} = 7^0 = 1$.

Vậy ta được $k = 33 + 68 = 101$.

Đề số 10

Câu 1.

Với $ab = 1$, $a + b \neq 0$, ta có:

$$P=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3(ab)^3}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4(ab)^2}+\frac{6(a+b)}{(a+b)^5(ab)}=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4}+\frac{6(a+b)}{(a+b)^5}$$

$$=\frac{a^2+b^2-1}{(a+b)^2}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4}+\frac{6}{(a+b)^4}=\frac{(a^2+b^2-1)(a+b)^2+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2-1)(a^2+b^2+2)+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)+4}{(a+b)^4}=\frac{(a^2+b^2+2)^2}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+2ab)^2}{(a+b)^4}=\frac{\left[(a+b)^2\right]^2}{(a+b)^4}=1$$

Vậy $P=1$, với $ab=1$, $a+b\neq 0$.

Câu 2 a) Điều kiện: $x\geq -3$

Với điều kiện trên, phương trình trở thành:

$$2(x)^2-3(x)\left(\sqrt{x+3}\right)+\left(\sqrt{x+3}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x)^2-2(x)\left(\sqrt{x+3}\right)-(x)\left(\sqrt{x+3}\right)+\left(\sqrt{x+3}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(x-\sqrt{x+3}\right)-\sqrt{x+3}\left(x-\sqrt{x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(2x-\sqrt{x+3}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=x\quad(1)\\ \sqrt{x+3}=2x\,(2)\end{array}\right.$$

- $(1):\sqrt{x+3}=x\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ x+3=x^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ x^2-x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

- $(2): \sqrt{x+3} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+3 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

So với điều kiện ban đầu, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là:

$$S = \left\{1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$$

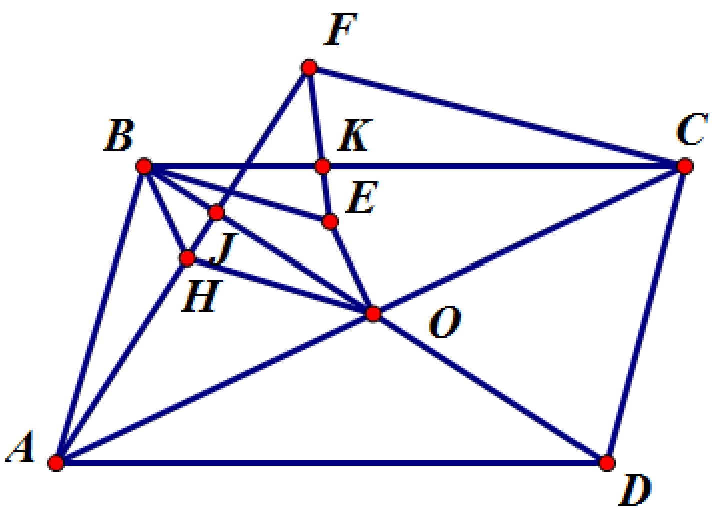
b) Trường hợp 1: Trong *a, b, c* cố 1 số chia hết cho 7 $\Rightarrow$đpcm

Trường hợp 2: Cả 3 số a, b, c đều không chia hết cho 7.

Khi đó a^3, b^3, c^3 chia cho 7 có thể dư 1 hoặc (-1). Theo nguyên lý Dirichle thì có 2 số trong 3 số a^3, b^3, c^3 có cùng số dương khi chia cho 7.

$\Rightarrow (a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3) \vdots 7 \Rightarrow dpcm$

Câu 3.



Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow OH // BE$ và H là trực tâm tam giác OAB.

$\Rightarrow BH \perp AC \Rightarrow BH // OE \Rightarrow BHOE$ Là hình bình hành $\Rightarrow BE = OH$

Mặt khác $CF \perp CD \Rightarrow CF // OH \Rightarrow$ là đường trung bình của tam giác ACF.

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}CF \Rightarrow BE = \frac{1}{2}CF \Rightarrow \frac{KE}{KF} = \frac{BE}{CF} = \frac{1}{2}$

Câu 4.

$$a^2-\frac{3}{4a}-\frac{a}{b}\le -\frac{9}{4}\Leftrightarrow \frac{3}{4a^2}-\frac{9}{4a}+\frac{1}{b}-a\ge 0 \qquad (*)$$

$$\frac{3}{4a}+3a\ge 3\Rightarrow \frac{3}{4a^2}-\frac{3}{a}\ge -3\Rightarrow \frac{3}{4a^2}-\frac{9}{4a}+3a\ge 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{b}+4b\ge 4\Rightarrow \frac{1}{b}+4b\ge 4a+4b\Rightarrow \frac{1}{b}-4a\ge 0 \qquad (2)$$

Lấy (1) cộng (2) ta chứng minh được (*)

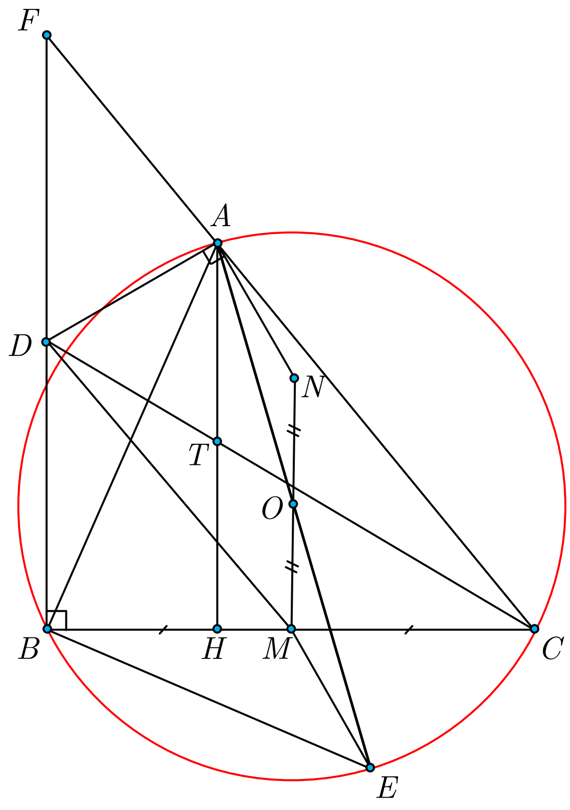
Cách khác:

$$a^2-\frac{3}{4a}-\frac{a}{b}\le a^2-\frac{3}{4a}-\frac{a}{1-a}$$

Ta chứng minh $a^2-\frac{3}{4a}-\frac{a}{1-a}\le -\frac{9}{4}\Leftrightarrow .... \Leftrightarrow (2a-1)^2\left(a^2+3\right)\ge 0$ (đpcm)

Câu 5.

a) Chứng minh $BA\,.\,BC=2BD\,.\,BE$



- Ta có: $DBA+ABC=90^0$, $EBM+ABC=90^0$
  $\Rightarrow DBA=EBM$ (1)
- Ta có: $\Delta ONA=\Delta OME$ (c-g-c)
  $\Rightarrow EAN=MEO$

  Ta lại có: $DAB+BAE+EAN=90^0$,

  và $BEM+BAE+MEO=90^0$

  $\Rightarrow DAB=BEM$ (2)
- Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BDA\ \#\ \Delta BME$ (g-g)
  $\Rightarrow \frac{BD}{BM}=\frac{BA}{BE}\Rightarrow BD.BE=BA.BM=BA.\frac{BC}{2}$

  $\Rightarrow 2BD.BE=BA.BC$

b) CD đi qua trung điểm của đường cao AH của $\Delta\ ABC$

- Gọi F là giao của BD và CA.
  Ta có $BD.BE=BA.BM$ (cmt)

  $\Rightarrow \frac{BD}{BA}=\frac{BM}{BE}\Rightarrow \Delta BDM\ \#\ \Delta BAE$ (c-g-c)

  $\Rightarrow BMD=BEA$. Mà $BCF=BEA$ (cùng chắn AB)

  $\Rightarrow BMD=BCF \Rightarrow MD//CF\Rightarrow D$ là trung điểm BF.
- Gọi T là giao điểm của CD và AH.

ΔBCD có $TH//BD \Rightarrow \dfrac{TH}{BD} = \dfrac{CT}{CD}$ (HQ định lí Te-let) (3)

ΔFCD có $TA//FD \Rightarrow \dfrac{TA}{FD} = \dfrac{CT}{CD}$ (HQ định lí Te-let) (4)

Mà $BD = FD$ (D là trung điểm BF) (5)

- Từ (3), (4) và (5) suy ra $TA = TH \Rightarrow T$ là trung điểm AH.

Câu 6.

Mỗi người đều chơi đúng 9 trận với 9 người khác và không có trận hòa nên

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = ... = x_{10} + y_{10} = 9$$

Ta thấy rằng trong thi đấu vòng tròn thì tổng số trận thắng bằng tổng số trận thua nên

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} = y_1 + y_2 + .. + y_{10}$

$\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2\right) - \left(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2\right) = \left(x_1^2 - y_1^2\right) + \left(x_2^2 - y_2^2\right) + ... + \left(x_{10}^2 - y_{10}^2\right)$

$= 9\left(x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + ... + x_{10} - y_{10}\right) = 0$

Đề số 11

Câu I.

a) Phương trình (1) có hệ số $a = m^2 + 5 > 0$ nên là phương trình bậc hai ẩn x. Do đó Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$<=> \Delta' = m^2 + (m^2 + 5).6m > 0$

$<=> m^2 + 6m^3 + 30m > 0$

$<=> m(6m^2 + m + 30) > 0$

$<=> m\underbrace{\left[5m^2 + (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{119}{4}\right]}_{>0 \forall m} > 0$

$<=> m > 0$

Khi đó theo định lý Vi–ét ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{m^2 + 5}$

Xét $m^2 + 5 - 2m = (m-1)^2 + 4 > 0$. Mà m>0 => $m^2 + 5 > 2m > 0$

$=> 0 < \dfrac{2m}{m^2 + 5} < 1 => 0 < x_1 + x_2 < 1$

Vậy tổng hai nghiệm của (1) không thể là số nguyên.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$

$\Delta' \geq 0 <=> \text{m}\left[5m^2 + (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{119}{4}\right] \geq 0$

$<=> m \geq 0$

Khi đó, theo định lý Vi–ét: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m^2+5} \\ x_1x_2=\dfrac{-6m}{m^2+5} \end{cases}$

Ta có:

$(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2})^4=16$

$<=>\left[\begin{array}{l} x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=2 \\ x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=-2 \end{array}\right.$

$TH1: x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=2$

$<=>\dfrac{-6m}{m^2+5}-\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=2(2)$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}};t\geq 0$ phương trình (2) trở thành $-3t^2-t-2=0$

Xét $\Delta=1^2-4(-3)(-2)=-23<0\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

$TH2: x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=-2<=>\dfrac{-6m}{m^2+5}-\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=-2(3)$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}};t\geq 0$ phương trình (3) trở thành $-3t^2-t+2=0$

$<=>(t+1)(3t-2)=0$

$<=>\left[\begin{array}{l} t=-1(L) \\ t=\dfrac{2}{3}(\mathrm{T}M)=>\dfrac{2m}{m^2+5}=\dfrac{4}{9}<=>4m^2-18m+20=0<=>(m-2)(4m-10)=0<=>\left[\begin{array}{l} m=2(TM) \\ m=\dfrac{2}{5}(TM) \end{array}\right. \end{array}\right.$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là $m\in\left\{2;\dfrac{2}{5}\right\}$

Câu II.

$\begin{cases} 2(1+x\sqrt{y})^2=9y\sqrt{x} \\ 2(1+y\sqrt{x})^2=9x\sqrt{y} \end{cases}$ (I)

ĐK: $x\geq 0,\ y\geq 0$

Đặt $a=x\sqrt{y};b=y\sqrt{x}$, điều kiện $a\geq 0,\ b\geq 0$. Hệ (I) trở thành

$\begin{cases} 2(1+a)^2=9b(1) \\ 2(1+b)^2=9a(2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$2(1+a)^2-2(1+b)^2=9(b-a)$

$<=> 2(a-b)(a+b+2)+9(a-b)=0$

$<=> (a-b)(\underbrace{2a+2b+13}_{>0\forall a,b>0})=0$

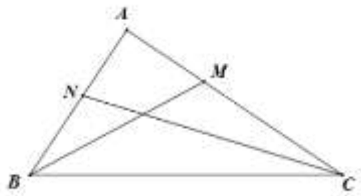
$<=> a=b$

Thay a = b vào (1) ta có

$$2(1+a)^2=9a <=> \left[\begin{array}{l} a=2 => b=2(TM) => \begin{cases} x\sqrt{y}=2 \\ y\sqrt{x}=2 \end{cases} <=> x=y=\sqrt[3]{4} \\ a=\frac{1}{2} => b=\frac{1}{2}(TM) => \begin{cases} x\sqrt{y}=\frac{1}{2} \\ y\sqrt{x}=\frac{1}{2} \end{cases} <=> x=y=\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{4}\right);\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}};\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$

2)



Vì BM, CN lần lượt là phân giác góc ABC, ACB nên theo tính chất đường phân giác, ta có:

$\frac{MC}{MA}=\frac{BC}{AB} => \frac{MC+MA}{MA}=1+\frac{BC}{AB}$

$\frac{NB}{NA}=\frac{BC}{AC} => \frac{BN+NA}{NA}=1+\frac{BC}{AC}$

$=> \frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA}=(1+\frac{BC}{AB})(1+\frac{BC}{AC})=1+\frac{BC^2}{AB.AC}+\frac{BC}{AB}+\frac{BC}{AC}$

Áp dụng định lý Pi–ta–go cho tam giác vuông ABC và BĐT Cô–si cho hai số không âm, ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2\ge 2AB.AC => \frac{BC^2}{AB.BC}\ge 2$

$\frac{BC}{AB}+\frac{BC}{AC}\ge 2\sqrt{\frac{BC}{AB}.\frac{BC}{AC}}\ge 2\sqrt{2}$

$=> \frac{(MA+MC)(NB+NA)}{MA.NA}\ge 1+2+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$

Câu III.

a) Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} => \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{c} => c(a+b)=ab(*)$

Giả sử a + b là số nguyên tố, khi đó từ (*) ⇒ ab ⋮ (a + b) ⇒ a ⋮ (a + b) hoặc b ⋮ (a + b)

Điều này mâu thuẫn do 0 < a < a + b, 0 < b < a + b.

Vậy a + b không thể là số nguyên tố.

b) Giả sử a + c và b + c đồng thời là số nguyên tố.

Từ c(a+b)=ab=>ca+cb=ab=>ca+ab=2ab-ab=>a(b+c)=b(2a-c)

⇒ a(b + c) ⋮ b (**)

Mà b + c là số nguyên tố, b là số nguyên dương nhỏ hơn b + c nên (b + c, b) = 1

Do đó từ (**) suy ra a ⋮ b.

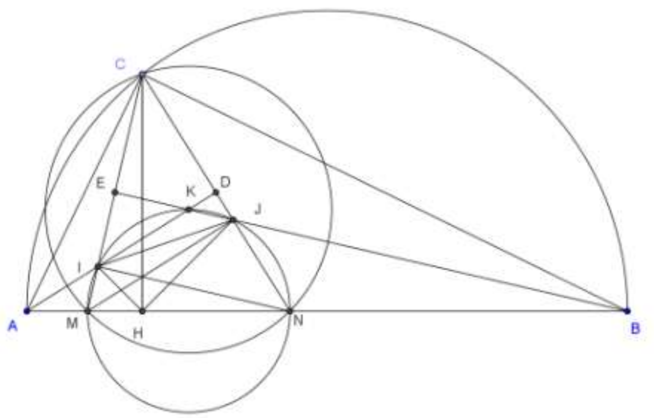
Chứng minh tương tự ta có b(a + c) = a(2b – c) ⇒ b ⋮ a

Vậy a = b. Từ (*) ⇒ a = b = 2c

Do đó a + c = b + c = 3c, không là số nguyên tố với c > 1 (mâu thuẫn với giả sử)

Vậy a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố.

Câu IV.



a) Ta có: HCA =ABC (cùng phụ với HCB)

Vì CN là phân giác của góc HCB nên HCN =BCN

Do đó CAN= HCA +HCN= ABC +BCN

Mặt khác, xét Δ BCN với góc ngoài ANC ta có: ANC= ABC+ BCN

Suy ra CAN= ANC ⇒ Δ ACN cân tại A ⇒ AC = AN.

Chứng minh tương tự ta có BC = BM.

b) Vì CM, CN lần lượt alà phân giác của góc ACH và BCH nên

$$MCN = MCH + NCH = \frac{1}{2}ACH + \frac{1}{2}BCH = \frac{1}{2}ACB = 45^o$$

Tam giác ACN cân tại A có AI là phân giác kẻ từ đỉnh A, nên cũng là trung trực của đáy CN.

⇒ IC = IN.

⇒ Δ ICN cân tại I.

Tam giác ICN cân tại I có ICN=45^o nên là tam giác vuông cân tại I

⇒ CI ⊥ IN

Chứng minh tương tự ta có CJ ⊥ MJ.

Tứ giác MIJN có MIN=MJN=90^o nên là tứ giác nội tiếp

⇒ Bốn điểm M, I, J, N cùng thuộc một đường tròn.

Vì CH ⊥ MN, MJ ⊥ CN, NI ⊥ CM nên CH, MJ, NI đồng quy tại trực tâm của Δ CMN.

c) Đặt $AC = b; BC = a => a^2 + b^2 = BC^2 = 4R^2(Pi - ta - go)$

Theo câu a, ta có AN=AC= b; BM=BC=b

Do đó a+b=AN+BM=BC+MN=>MN=a+b-BC=a+b-2R

Ta có:

$(a-b)^2 \geq 0 => 2ab \leq a^2 + b^2 => (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) = 8R^2$

$<=> a+b \leq 2\sqrt{2}R => MN = a+b-2R \leq 2R(\sqrt{2}-1)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b ⇔ CA = CB ⇔ C là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên CH ≤ R.

Do đó $S_{CMN} = \frac{1}{2}CH.MN \leq \frac{1}{2}R.2.R(\sqrt{2}-1) = \mathrm{R}^2(\sqrt{2}-1)$

Dấu bằng xảy ra ⇔ C là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $2R(\sqrt{2}-1)$ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác CMN là $R^2(\sqrt{2}-1)$

đều xảy ra khi và chỉ khi C là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

Câu V.

a) Gọi 5 số tự nhiên đã cho là a, b, c, d, e.

Do chúng đôi một phân biệt nên có thể giả sử a < b < c < d < e.

Theo giả thiết ta có a + b + c > d + e ⇒ a + b + c ≥ d + e + 1

Suy ra a ≥ d + e + 1 – b – c.

Vì b, c, d, e là số tự nhiên nên từ

d > c ⇒ d ≥ c + 1; c > b ⇒ c ≥ b + 1

Suy ra d ≥ b + 2 ⇒ d – b ≥ 2

e > d ⇒ e ≥ d + 1 ⇒ e ≥ c + 2 ⇒ e – c ≥ 2

Do đó a ≥ (d – b) + (e – c) + 1 ≥ 5. Suy ra b, c, d, e > 5

Vậy tất cả các số đều không nhỏ hơn 5.

b) Nếu a ≥ 6 ⇒ b ≥ a + 1 ≥ 7. Tương tự c ≥ 8, d ≥ 9, e ≥ 10 ⇒ a + b + c + d + e ≥ 40 (mâu thuẫn)

Suy ra a < 6. Mà theo câu a ta có a ≥ 5 ⇒ a = 5.

Ta có 5 + b + c ≥ d + e + 1 ⇒ b + c ≥ d + e – 4.

Mà d – 2 ≥ b, e – 2 ≥ c ⇒ d + e – 4 ≥ b + c.

Do đó

$\begin{cases} b = d-2 \\ c = e-2 \end{cases}$ =>a+b+c+d+e=5+2b+2c+4<40

$=> b+c < \frac{31}{2} => b+(b+1) \leq \mathrm{b+c} < \frac{31}{2} => b \leq 7$

Suy ra b = 6 hoặc b = 7

Nếu b = 6 thì d = b + 2 = 8. Vì b < c < d nên c = 7 ⇒ e = c + 2 = 9.

Nếu b = 7 thì d = b + 2 = 9. Vì b < c < d nên c = 8 ⇒ e = c + 2 = 10.

có hai bộ thỏa mãn đề bài là (5;6;7;8;9) và (5;7;8;9;10).

Đề số 12

Câu 1

$a) x\sqrt{2x-3} = 3x-4$ (ĐKXĐ: x ≥ 3/2)

$<=> x^2(2x-3) = (3x-4)^2$

$<=> 2x^3 - 3x^2 = 9x^2 - 24x + 16$

$<=> 2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 = 0$

$<=> 2(x-2)^3 = 0$

$<=> x = 2 (TM)$

Vậy S = {2}

b)Ta có

$x + y + z = 0$

$<=> (y+z)^2 = (-x)^2$

$<=> y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$

Tương tự:

$z^2 + x^2 - y^2 = -2zx$

$x^2 + y^2 - z^2 = -2yx$

$$P = \frac{x^2}{-2yz} + \frac{y^2}{-2zx} + \frac{z^2}{-2yx} = \frac{x^3+y^3+z^3}{-2xyz}$$

Mà

$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + z^3$

$= (-z)^3 - 3xy(x+y) + z^3 = 3xy$

$$=> P = \frac{3xyz}{-2xyz} = \frac{-3}{2}$$

Câu 2

ĐKXĐ: x, y ≠ 0

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{x} (1) \\ x + y - \dfrac{4}{x} = \dfrac{4y}{x^2} (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\frac{1}{y} + \frac{4}{x} = \frac{9}{x} - \frac{4y}{x^2}$$

$$<=> \frac{4y}{x^2} - \frac{5}{x} + \frac{1}{y} = 0$$

$<=> x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$

$<=> (x-4y)(x-y) = 0$

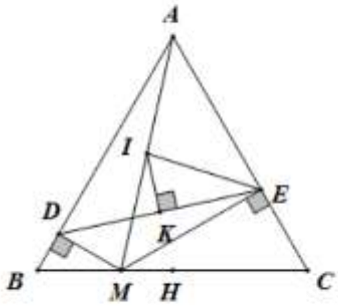
$$<=> \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 4y \end{array}\right.$$

Với x = y, thế vào (1) có $2x - \frac{8}{x} = 0 <=> x = y = \pm 2$

Với x = 4y, thế vào (1) có $5y - \frac{5}{4y} = 0 <=> y = \pm\frac{1}{2} => x = \pm 2$

Vậy $S = \left\{(2;2);(-2;-2);(2;\frac{1}{2});(-2;\frac{-1}{2})\right\}$

Câu 3:



$C_{MDE} = MD + ME + DE = (BM + CM)\sin 60^o + DE$

$= BC.\sin 60^o + DE$

Mà BC.sin60⁰ không đổi nên chi vi tam giác MDE nhỏ nhất ⇔ DE nhỏ nhất

Tứ giác ADME nội tiếp đường tròn đường kính AM (ADM =AEM =90°) nên tam giác ADEcũng nội tiếp đường tròn đường kính AM, tâm I là trung điểm AM.

Gọi K là trung điểm DE, suy ra IK ⊥ DE và $EIK = BAC (= \frac{DIE}{2})$

Gọi R là bán kính đường tròn tâm I đường kính AM thì

$\sin KIE = \frac{KE}{IE} = \frac{0,5DE}{R} = \frac{DE}{2R} = \frac{DE}{AM}$

$=> DE = AM.\sin BAC = AM.\sin 60^o$

Vì sin60° không đổi nên DE nhỏ nhất ⇔ AM nhỏ nhất ⇔ M ≡ H (H là chân đường vuông góc hạtừ A xuống BC, mà tam giác ABC đều nên H là trung điểm BC).

Vậy khi M là trung điểm BC thì chu vi tam giác MDE nhỏ nhất.

Câu 4

$a) \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \ge \frac{x}{y} + \frac{y}{x} (x \ne 0; y \ne 0) <=> \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \ge 0$

$<=> \frac{x^4 + y^4 - x^3y - xy^3}{x^2y^2} \ge 0 <=> \frac{(x-y)(x^3 - y^3)}{x^2y^2} \ge 0$

$<=> \frac{(x-y)^2(x^2 + xy + y^2)}{x^2y^2} \ge 0 <=> \frac{(x-y)^2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2\right]}{x^2y^2} \ge 0$

(luôn đúng ∀ x,y ≠ 0)

c) Tìm minP (a, b > 0)

$$P=\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$$

$$=\frac{(a+b)^2+ab}{\sqrt{ab}(\text{a}+\text{b})}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(a+b)^2+ab+\frac{3}{4}(a+b)^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(a+b)^2+ab}{\sqrt{ab}(a+b)}+\frac{\frac{3}{4}(a+b)}{\sqrt{ab}}\geq\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2.ab}}{\sqrt{ab}(a+b)}+\frac{\frac{3}{4}\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

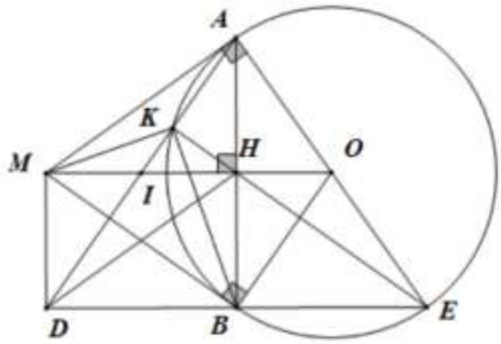
Dấu bằng xảy ra $<=>\begin{cases}\frac{1}{4}(a+b)^2=ab\\ a=b\end{cases}<=>a=b$

Vậy $MinP=\frac{5}{2}<=>a=b$

*Cách khác

$$P=\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}=\frac{(a+b)^2+ab}{\sqrt{ab}(a+b)}=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{3}{4}.\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+(\frac{1}{4}.\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b})\geq\frac{3}{4}.2+2\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}$$

Câu 5



a) Kẻ đường kính AE của (O), EH cắt (O) tại K′, AK′ cắt EB tại D. Dễ thấy H là trực tâm tamgiác AED nên DH ⊥ AO

⇒ DH // AM (1)

Ta có BDH= EAH =HMB nên tứ giác HMDB nội tiếp

⇒ HM ⊥ MD ⇒ DM // AH (2)

Từ (1) và (2) ⇒ AHDM là hình bình hành.

⇒ AD đi qua trung điểm I của HM

⇒ K′ là giao của AI với (O)

⇒ K′ ≡ K

⇒ HK ⊥ AI

b) Ta có IAM =ABK (cùng chắn cung AK)

AMI= OBA (OAMB nội tiếp)

Nên

IAM+AMI=ABK+OBA

⇔AIH=OBK
Mặt khác
AIH+KHI=90^o
OBK+KBM=90^o
=>KHI=KBM
⇒ Tứ giác HKMB nội tiếp
=>BKM=BHM=90^o

Câu 6

$$2015(x^2+y^2)-2014(2xy+1)=25$$

$$<=> 2014(x-y)^2+x^2+y^2=2039$$

Đặt t=|x-y| , $t \in N$ do x, y nguyên
Xét các trường hợp:
TH1: t = 0, tức x = y ⇒ phương trình vô nghiệm
TH2: t = 1, tức là x – y = ±1
+ Với x – y = 1 hay x = y + 1, phương trình trở thành:

$$(y+1)^2+y^2=25 <=> y^2+y-12=0$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-4 \end{array}\right.$$

Với y = 3 thì x = 4; với y = –4 thì x = –3
+ Với x – y = –1 hay x = y – 1, phương trình trở thành:

$$(y-1)^2+y^2=25 <=> y^2-y-12=0$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ y=4 \end{array}\right.$$

Với y = –3 thì x = –4; với y = 4 thì x = 3
TH3: t ≥ 2, VT > VP ⇒ phương trình vô nghiệm
Vậy các cặp (x;y) thỏa là (4;3), (–3;–4), (–4;–3), (3;4)
Cách khác: Sử dụng phương pháp biến đổi phương trình về dạng vế trái là tổng của các bìnhphương. Vế phải là tổng của các số chính phương, hoặc cách điều kiện có nghiệm của phươngtrình bậc hai cũng có thể giải ra đáp số.

Đề số 15

Câu 1: Giải phương trình : $\sqrt{8x+1}+\sqrt{46-10x}=-x^3+5x^2+4x+1$

Điều kiện : $\frac{-1}{8} \le x \le \frac{46}{10}$

$$\sqrt{8x+1}+\sqrt{46-10x}=-x^3+5x^2+4x+1 \Leftrightarrow \sqrt{8x+1}-3+\sqrt{46-10x}-6=-x^3+5x^2+4x-8$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{8x+1}-3\right)\left(\sqrt{8x+1}+3\right)}{\sqrt{8x+1}+3}+\frac{\left(\sqrt{46-10x}-6\right)\left(\sqrt{46-10x}+6\right)}{\sqrt{46-10x}+6}=(1-x)\left(x^2-4x+8\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8(1-x)}{\sqrt{8x+1}+3}+\frac{10(1-x)}{\sqrt{46-10x}+6}=(1-x)\left(x^2-4x+8\right)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 1-x=0 & (1) \\ \dfrac{-8}{\sqrt{8x+1}+3}+\dfrac{10}{\sqrt{46-10x}+6}=x^2-4x+8 & (2) \end{array}\right.$$

Từ (1) suy ra: x = 1 .

Từ (2), ta có : $x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4 \geq 4$ với mọi x

$$\sqrt{46-10x}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{46-10x}+6\geq 6 \Leftrightarrow \frac{10}{\sqrt{46-10x}+6}\leq \frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

suy ra : $\dfrac{10}{\sqrt{46-10x}+6}+\dfrac{-8}{\sqrt{8x+1}+3}=\dfrac{10}{\sqrt{46-10x}+6}-\dfrac{8}{\sqrt{8x+1}+3}<\dfrac{5}{3}$

Vậy : $\dfrac{10}{\sqrt{46-10x}+6}+\dfrac{-8}{\sqrt{8x+1}+3}<x^2-4x+8$, với mọi x.

Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất : x = 1.

Câu 2: Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. với a là số nguyên dương, biết: f(5) – f(4) = 2012 . Chứng minh: f(7) – f(2) là hợp số.

Ta có :

f(5) – f(4) = 2012 ⇔ (125a + 25b + 5c + d) – (64a + 16b + 4c + d) = 2012 ⇔ 61a + 9b + c = 2012.

f(7) – f(2) = (343a + 49b + 7c + d) – (8a + 4b + 2c + d) = 335a + 45b + 5c

= 305a + 45b + 5c +30a = 5(61a + 9b + c) + 30a = 2012 + 30a = 2(1006 + 15a)

Vì a là số nguyên nên ta được : 2(1006 + 15a) chia hết cho 2.

Vậy f(7) – f(2) là hợp số

Câu 3: Cho ba số dương a; b và c thỏa a + b + c = 1. Tìm GTNN của :

$$A=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Ta có : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow \dfrac{1-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}=ab+bc+ca$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^2a + b^3 + bc^2 + c^3 + ca^2 + a^2b + b^2c + c^2a$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si:

$a^3 + b^2a \ge 2a^2b$; $b^3 + bc^2 \ge 2b^2c$; $c^3 + ca^2 \ge 2c^2a$, dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^2a + b^3 + bc^2 + c^3 + ca^2 + a^2b + b^2c + c^2a \ge 3(a^2b + b^2c + c^2a)$

suy ra:

$$\frac{1}{a^2b+b^2c+c^2a} \ge \frac{3}{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a} \ge \frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{3-3(a^2+b^2+c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Đặt : $t = a^2 + b^2 + c^2$, ta có : $3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a + b + c)^2 = 1 \Leftrightarrow t \ge \frac{1}{3}$, dấu "=" xảy ra khi a = b = c $= \frac{1}{3}$.

Ta được : $A = 14t + \frac{3-3t}{2t} = \frac{28t}{2} + \frac{3}{2t} - \frac{3t}{2t} = \frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si : $\frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} \ge 2\sqrt{\frac{27t}{2}.\frac{3}{2t}} = 9$ dấu "=" xảy ra khi : $t = \frac{1}{3}$.

Mặt khác : $\frac{t}{2} - \frac{3}{2} \ge \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}\left(\text{vì}: t \ge \frac{1}{3}\right)$

Suy ra: $A \ge 9 - \frac{4}{3} = \frac{23}{3}$ dấu "=" xảy ra khi : $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$ và a = b = c suy ra: $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{23}{3}$, khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

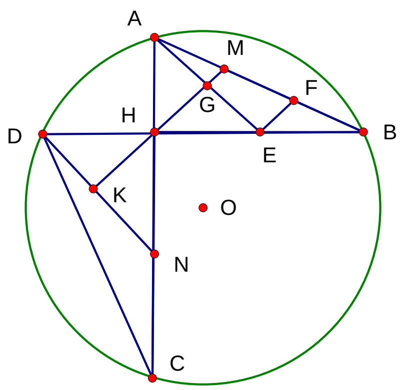
Câu 4: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O; R) có AC vuông góc BD tại H. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho:

AM = 1/3 AB. Trên cạnh HC lấy trung điểm N. chứng minh MH vuông góc với DN

+ Gọi E; F lần lượt là trung điểm của HB và MB,

Suy ra: AM = MF = FB = 1/3 AB.

+ Gọi K và G lần lượt là giao điểm của MH với DN và AE.



+ Ta có: ◎ AHB ~ ◎ DHC => AH : HB = DH : HC

=> AH : (2HE) = DH : (2HN) ⇔ AH : HE = DH : HN

=> ◎ AHE ~ ◎ DHN => NDH = EAH

+ Ta có : EF là đường trung bình của tam giác HMB => HM // EF

+ Xét ◎ AEF : AM = MF và MG // EF => AG = GE.

+ Xét ◎ AEH: vuông tại H có G là trung điểm của AE, suy ra:

$AG = HG = EG$ => ◎ AHG cân tại G => $AHG = EAH$

+ Ta có : $KDH + DHK = EAH + DHK = AHG + DHK = 90^0$, suy ra ◎ DHK vuông tại K.

Vậy MH vuông góc với DN.(đpcm)

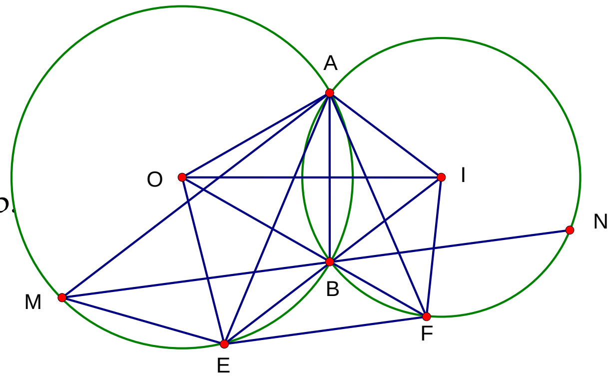
Câu 5:

Cho đường tròn tâm O và đường tròn tâm I cắt nhau tại hai điểm A và B(O và I khác phía đối với A và B). IB cắt (O) tại E: OB cắt (I) tại F. Qua B vẽ MN // EF(M thuộc (O) và N thuộc (I).

a) Chứng minh :Tứ giác OAIE nội tiếp ;

b) Chứng minh :AE + AF = MN

a)



+ ◎ BOE cân tại O => $OBE = OEB$;

+ ◎ BIF cân tại I => $IBF = IFB$;

Do : $OBE = IBF \Rightarrow OEB = IFB$, suy ra: tứ giác OIFE nội tiếp.

+ Do : ◎AOI = ◎BOI (c – c – c) => $OAI = OBI$

+ Ta có :

$OAI + OEI = OBI + OBE = 180^0$, suy ra tứ giác AOEI nội tiếp

Vậy 5 điểm O; A; I; E; F nằm trên cùng một đường tròn.

Vậy Tứ giác OAIE nội tiếp được.

b) + Xét đường tròn (O) : $AMB = FOI = \frac{1}{2}\text{Sd } AB$

+ Do : MN // EF ta được : $BEF = MBE$ (slt)

+ Do 5 điểm O; A; I; E; F nằm trên cùng một đường tròn, suy ra: $BEF = FOI$

Suy ra: $AMB = FOI = BEF = MBE$ suy ra: AM // EB.

Vậy tứ giác MABE là hình thang và nội tiếp đường tròn (O) suy ra: MABE là hình thang cân => MB = AE.

+ Chứng minh tương tự ta được : NB = AF, suy ra: AE + AF = MB + NB = MN. (đpcm).

Câu 6:

Trên mặt phẳng cho 2013 điểm tùy ý sao cho khi 3 điểm bất kỳ thì khoảng cách giữa hai điểm luôn bé hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1007 điểm(kể cả biên).

Gọi các điểm là : A_1; A_2; A_3; …; A_i; A_{i+1} ; A_{2012}; A_{2013}. Ta chia các cặp điểm như sau: (A_1; A_{2013});

(A_2; A_{2012}); …(A_i; A_{2013-i})…;(A_{1006}; A_{1008}) , và điểm A_{1007}.

Xét điểm A_{1007} với các cặp điểm đã cho, theo giả thiết trong mỗi cặp điểm tồn tại một điểm A_m sao cho đoạn thẳng $A_{1007}A_m$ có độ dài nhỏ hơn 1. Không mất tính tổng quát giả sử các điểm A_1; A_2; …; A_{1006} có khoảng cách đến điểm A_{1007} nhỏ hơn 1, suy ra các điểm A_1; A_2; …; A_{1006} nằm trong đường tròn tâm A_{1007} bán kính bằng 1.

Vậy tồ tại đường tròn có bán kính bằng 1 chứa 1007 điểm trong 2013 điểm đã cho. (đpcm).

Đề số 16

Câu 1:

a) $\Delta = (4m + 1)^2 - 8(m - 4) = 16m^2 + 33 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta có: $S = -4m - 1$ và $P = 2m - 8$.

Do đó: $|x_1 - x_2| = 17 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 289 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 289$

$\Leftrightarrow \quad (-4m - 1)^2 - 4(2m - 8) = 289 \Leftrightarrow 16m^2 + 33 = 289$

$\Leftrightarrow \quad 16m^2 = 256 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4.$

Vậy m thoả YCBT $\Leftrightarrow m = \pm 4$.

b) $\begin{cases} 2x \ge m - 1 & (a) \\ mx \ge 1 & (b) \end{cases}$.

Ta có: (a) $\Leftrightarrow x \ge \dfrac{m-1}{2}$.

Xét (b): * $m > 0$: (b) $\Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{m}$.

* $m = 0$: (b) $\Leftrightarrow 0x \ge 1$ (VN)

* $m < 0$: (b) $\Leftrightarrow x \le \dfrac{1}{m}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \dfrac{1}{m} = \dfrac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Câu 2:

a) $S = \dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$ (a, b, c khác nhau đôi một)

$= \dfrac{a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \dfrac{ac-ab+ba-bc+cb-ca}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0.$

b) $P = \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$ $(x \geq 2)$

$= \dfrac{\sqrt{2}\left[\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}\right]}{\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}-\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}\left[\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|\right]}{\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}\left[\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|\right]}{\left|\sqrt{2x-1}+1\right|-\left|\sqrt{2x-1}-1\right|}$

$= \dfrac{\sqrt{2}\left[\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1\right]}{\sqrt{2x-1}+1-(\sqrt{2x-1}-1)}$ (vì $x \geq 2$ nên $\sqrt{x-1} \geq 1$ và $\sqrt{2x-1} \geq 1$)

$= \sqrt{2}\sqrt{x-1}.$

Câu 3: Cho a, b, c, d là các số nguyên thoả $a \leq b \leq c \leq d$ và $a + d = b + c$.

a) Vì $a \leq b \leq c \leq d$ nên ta có thể đặt $a = b - k$ và $d = c + h$ $(h, k \in N)$

Khi đó do $a + d = b + c \Leftrightarrow b + c + h - k = b + c \Leftrightarrow h = k$.

Vậy $a = b - k$ và $d = c + k$.

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (b - k)^2 + b^2 + c^2 + (c + k)^2$

$= 2b^2 + 2c^2 + 2k^2 - 2bk + 2ck$

$= b^2 + 2bc + c^2 + b^2 + c^2 + k^2 - 2bc - 2bk + 2ck + k^2$

$= (b + c)^2 + (b - c - k)^2 + k^2$ là tổng của ba số chính phương (do $b + c$, $b - c - k$ và k là các số nguyên)

b) Ta có $ad = (b - k)(c + k) = bc + bk - ck - k^2 = bc + k(b - c) - k^2 \leq bc$ (vì $k \in N$ và $b \leq c$)

Vậy $ad \leq bc$ (ĐPCM)

Câu 4:

a) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của phương trình $(x_1 \leq x_2)$

Ta có $a = -x_1 - x_2$ và $b = x_1x_2$ nên

$5(-x_1 - x_2) + x_1x_2 = 22$

$\Leftrightarrow \quad x_1(x_2 - 5) - 5(x_2 - 5) = 47$

$\Leftrightarrow \quad (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 47 \quad (*)$

Ta có: $-4 \le x_1 - 5 \le x_2 - 5$ nên

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5 = 1 \\ x_2 - 5 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 52 \end{cases}.$

Khi đó: a = – 58 và b = 312 thoả 5a + b = 22. Vậy hai nghiệm cần tìm là $x_1 = 6$; $x_2 = 52$.

b) Ta có $(x + y)(x^2 + y^2) = x^3 + y^3 + xy(x + y)$ (1)

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ (2)

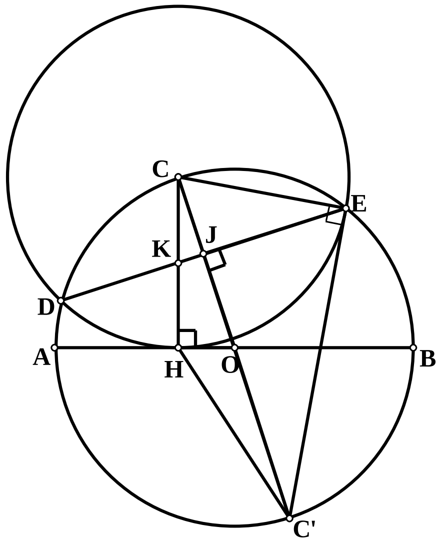
$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$ (3)

Vì $x + y$, $x^2 + y^2$ là số nguyên nên từ (2) $\Rightarrow 2xy$ là số nguyên.

Vì $x^2 + y^2$, $x^4 + y^4$ là số nguyên nên từ (3) $\Rightarrow 2x^2y^2 = \frac{1}{2}(2xy)^2$ là số nguyên

$\Rightarrow (2xy)^2$ chia hết cho 2 $\Rightarrow$ 2xy chia hết cho 2 (do 2 là nguyên tố)
$\Rightarrow$ xy là số nguyên.

Do đó từ (1) suy ra $x^3 + y^3$ là số nguyên.



Câu 5: Ta có: OC ⊥ DE (tính chất đường nối tâm

$\Rightarrow \Delta$ CKJ và Δ COH đồng dạng (g–g)

$\Rightarrow$ CK.CH = CJ.CO (1)

$\Rightarrow$ 2CK.CH = CJ.2CO = CJ.CC'

mà Δ CEC' vuông tại E có EJ là đường cao

$\Rightarrow CJ.CC' = CE^2 = CH^2$

$\Rightarrow 2CK.CH = CH^2$

$\Rightarrow$ 2CK = CH

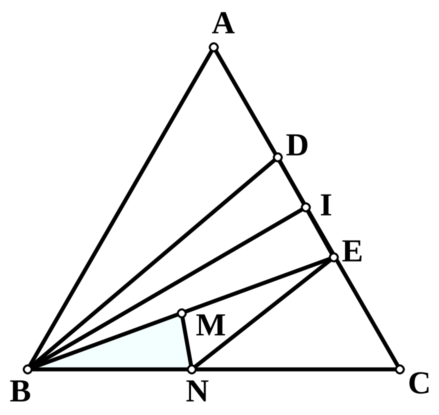
$\Rightarrow$ K là trung điểm của CH.

Câu 6: Kẻ BI ⊥ AC $\Rightarrow$ I là trung điểm AC.

Ta có: ∠ ABD = ∠ CBE = 20^0 $\Rightarrow$ ∠ DBE = 20^0 (1)

Δ ADB = Δ CEB (g–c–g)

$\Rightarrow$ BD = BE $\Rightarrow \Delta$ BDE cân tại B $\Rightarrow$ I là trung điểm DE.



mà BM = BN và $\angle$ MBN = 20^0

$\Rightarrow \Delta$ BMN và Δ BDE đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{S_{BMN}}{S_{BED}} = \left(\frac{BM}{BE}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_{BNE} = 2S_{BMN} = \frac{1}{2}S_{BDE} = S_{BIE}$$

Vậy $S_{BCE} + S_{BNE} = S_{BCE} + S_{BIE} = S_{BIC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Câu 7: Cho a, b là hai số thực sao cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh $0 < a + b \le 2$.

Ta có: $a^3 + b^3 > 0 \Rightarrow a^3 > -b^3 \Rightarrow a > -b \Rightarrow a + b > 0$ (1)

$(a-b)^2(a+b) \ge 0 \Rightarrow (a^2 - b^2)(a-b) \ge 0 \Rightarrow a^3 + b^3 - ab(a+b) \ge 0$

$\Rightarrow a^3 + b^3 \ge ab(a+b) \Rightarrow 3(a^3 + b^3) \ge 3ab(a+b)$

$\Rightarrow 4(a^3 + b^3) \ge (a+b)^3 \Rightarrow 8 \ge (a+b)^3 \Rightarrow a + b \le 2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 < a + b \le 2$.